

Misztal Stanisław

Misztal Grzegorz

Technische Universität, Zielona Góra, Polen

ANWENDUNG VON δ -DIRAC-FUNKTION UND HEVISIDE-FUNKTION ZUR BERECHNUNG DER INNEREN KRÄFTE UND VERSCHIEBUNGEN IN GEBOGENEN BALKEN

1. Vorwort

Die Computermethoden der Berechnung von Stabkonstruktionen verlangen oft die Bestimmung der inneren Kräfte und Verschiebungen in den Einfeldbalken bei Anwendung einer einheitlichen Berechnungsmethode für beliebige Belastungen. Bei Anwendung der Verschiebungsmethode zur Berechnung von Stabsystemen werden beispielsweise innere Kräfte und Verschiebungen an den Knoten gewonnen. In den Abschnitten zwischen den Knoten ist es notwendig, zwecks der Bestimmung von inneren Kräften und Verschiebungen, die Einfeldbalken zu berechnen, mit den aufgegebenen beliebigen Feldbelastungen und Randbedingungen an den Enden der Stäbe (in den Knoten) in Form von Biegemomenten und Verschiebungen.

In der dargestellten Bearbeitung wurden zur Beschreibung der diskreten Belastungsfunktionen auf der Stablänge die Delta-Dirac-Funktion $\delta(x-x_i)$ und die Heviside-Funktion $h(x-x_j)$ angewendet.

2. Theoretische Grundlagen

In der praktischen Anwendungen können neben den Einzelkräften und dem Kraftpaar, als eindeutig bestimmten Größen, beliebige stetige Belastungen auftreten, die mit der zu praktischen Zwecken ausreichenden Annäherungen durch eine Reihe von Trapezlasten ersetzt werden können (im Verhältnis zu der die stetige Belastungsfunktion bestimmenden Kurve umschrieben, eingeschrieben oder im Mittelwert gerechnet) - Bild 2.1.

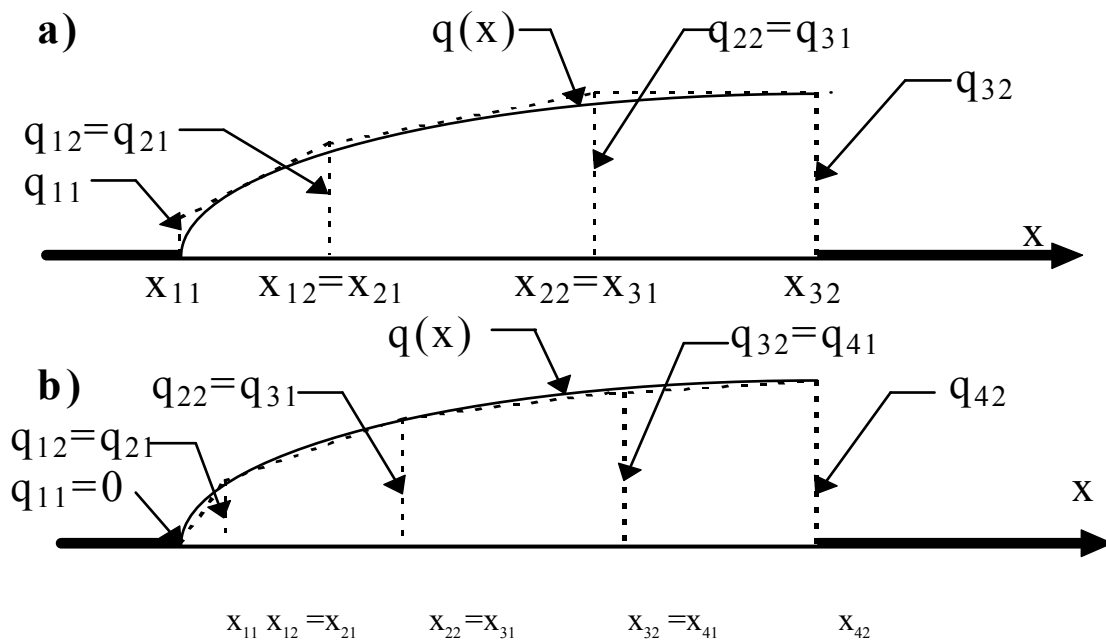


Bild 2.1. Trapeze: a) auf der Kurve umbeschrieben, b) in die Kurve eingeschrieben

Zur bestimmung der inneren Kräfte und Verschiebungen in den Einfeldbalken von beliebigen Abstützungsbedingungen (von beliebigen Randbedingungen) wurde die Differential-gleichung der Achse des verformten homogenen Balkens vom festen Querschnitt verwendet in Form von

$$E \cdot I_z \cdot \frac{d^4 y}{dx^4} = -q^*(x)$$

(2.1.)

wo:

EI_z - Biegesteifigkeit des Balkens (E - Elastizitätsmodul, I_z - Tragheitsmoment des Querschnitts von dem Balkenquerschnitt hinsichtlich der zentralen Haupttragheitsachse berechnet)

x - Koordinate längs der Balkenachse,

y - Verschiebung der Balkenachse (senkrecht zur x -Achse)

z - Achse, die zu der durch die Koordinaten x und y gebildeten Ebene senkrecht ist,

$q^*(x)$ -Allgemeinbelastung, die alle durch die Abhängigkeit (2.2.) umbeschriebenen

Belastungen auf der ganzen Balkenlänge umfaßt,

$$q^*(x) = \sum_{i=1}^{np} P_i \cdot \delta(x - x_i) + \sum_{j=1}^{nq} [q_{1xj} \cdot h(x - x_{1j}) - q_{2xj} \cdot h(x - x_{2j})] + \sum_{k=1}^{nm} M_k \cdot \delta'(x - x_k), \quad (2.2.)$$

in der:

np - Zahl der Einzelkräfte in dem gegebenen Balkenfeld,

nq - Zahl der stetigen Trapezlasten in dem gegebenen Balkenfeld,

nm- Zahl der Einzelmomente in dem gegebenen Balkenfeld.

$$q_{1x_j} = q_{1j} + b_{jj} (x - x_{1j}), \quad q_{2x_j} = q_{2j} + b_{jj} (x - x_{2j}), \quad (2.3.)$$

$$b_{jj} = (q_{2j} - q_{1j}) / (x_{2j} - x_{1j}) \quad (2.4.)$$

$\delta(x-x_i)$, $\delta'(x-x_i)$ - Dirac - Funktion und ihre Ableitung nach Variable x;

$$\delta(x-x_i) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \neq x_i \\ \infty & \text{dla } x = x_i \end{cases} \quad (2.5.)$$

Die Stammfunktion der δ - Dirac - Funktion ist die Heviside - Funktion $h(x-x_i)$

$$h(x-x_i) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < x_i \\ 1 & \text{dla } x \geq x_i \end{cases} \quad (2.6.)$$

Das Schema des beanspruchten Einfeldbalkens und die angenommenen Bezeichnungen wurden auf dem Bild 2.2. Natürlich können auf der Balkenfeldlänge die beliebige Zahl der „np“ Belastungen in Form von Einzelkräften P_i , die beliebige Zahl der „nq“ in Form von Trapezlasten q_{x_j} sowie die beliebige Zahl der Einzelmomente M_k auftreten. Auf dem Bild 2.2. wurden die Einzelkräfte, die Trapezlast und das Einzelmoment dargestellt, als die Repräsentanten dieser drei Belastungsmengen.

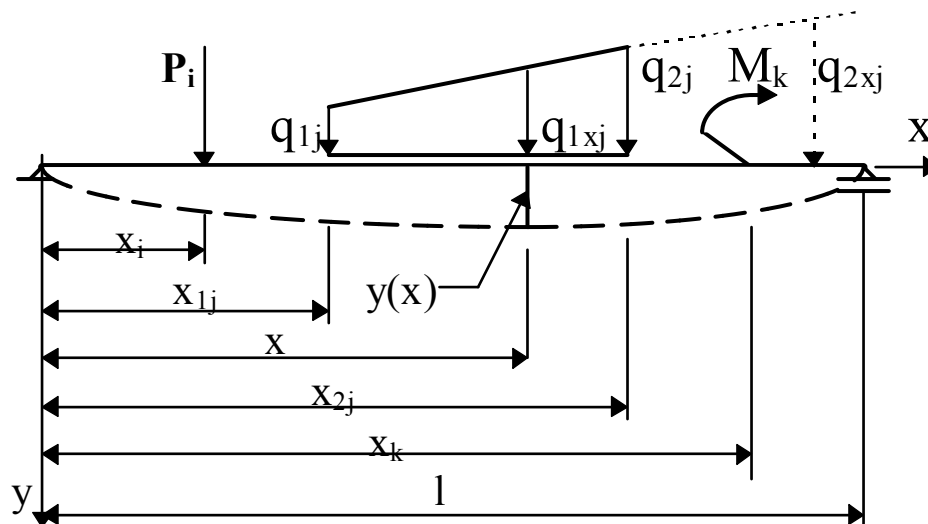


Bild 2.2. Statisches Balkenschema und die angenommenen Bezeichnungen

Nach der Differentiation der Funktion $h(x-x_i)$ erhielt man

$$\frac{d}{dx} [h(x - x_i) + A] = \delta(x - x_i)$$

(2.7.)

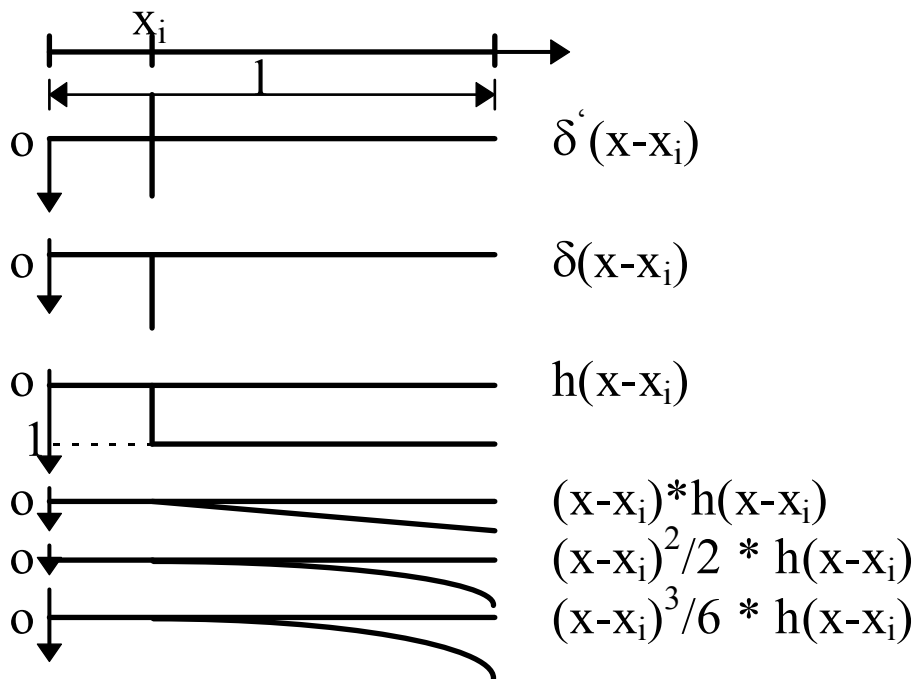
Die Stammfunktionen der δ - Dirac - Funktion sind die folgende Abhängigkeiten:

$$\frac{d^2}{dx^2} [(x - x_i) \cdot h(x - x_i) + A \cdot x + B] \frac{d}{dx} [h(x - x_i) + A] = \delta(x - x_i) \quad (2.8.)$$

$$\frac{d^3}{dx^3} \left[\frac{(x - x_i)^2}{2} \cdot h(x - x_i) + A \cdot x^2 / 2 + B \cdot x + C \right] = \delta(x - x_i) \quad (2.9.)$$

$$\frac{d^4}{dx^4} \left[\frac{(x - x_i)^3}{6} \cdot h(x - x_i) + A \cdot x^3 / 6 + B \cdot x^2 / 2 + C \cdot x + D \right] = \delta(x - x_i) \quad (2.10.)$$

Die graphische Interpretation der δ - Dirac - Funktion , ihrer Ableitung und auch ihrer Stammfunktionen wurde auf dem Bild 2.3. dargestellt. Die Integrationskonstanten A, B, C, D, die in den Gleichungen (2.7.) - (2.10.) auftreten und die das Ergebnis der Differentialgleichung (2.1.) sind wurden aus den Randbedingungen je nach der Art der Balkenunterstützung an beiden Enden (jeweils zwei Randbedingungen an jedem Balkenende) bestimmt.



Rys. 2.3. Die graphische Interpretation der δ - Dirac - Funktion, ihrer Ableitung sowie ihrer Stammfunktionen

Indem die Abhängigkeit (2.1.) einfach mal x integriert wurde, bei Berücksichtigung (2.2.) erhielt man:

$$T(x) = -EI_z \frac{d^3 y}{dx^3} = - \sum_{i=1}^{np} P_i \cdot h(x - x_i) - \sum_{j=1}^{nq} [q_{1j} (x - x_{1j}) + b_{jj} \cdot (x - x_{1j})^2 / 2] \cdot h(x - x_{1j}) + \sum_{j=1}^{nq} [q_{2j} \cdot (x - x_{2j}) + b_{jj} \cdot (x - x_{2j})^2 / 2] \cdot h(x - x_{2j}) - \sum_{k=1}^{nm} M_k \cdot \delta(x - x_k) + A \quad (2.11.)$$

$$\begin{aligned}
M(x) = & -EI_z \frac{d^2 y}{dx^2} = -\sum_{i=1}^{np} P_i \cdot (x - x_i) \cdot h(x - x_i) + \\
& -\sum_{j=1}^{nq} \left[q_{1j} \cdot (x - x_{1j})^2 / 2 + b_{jj} \cdot (x - x_{1j})^3 / 6 \right] \cdot h(x - x_{1j}) + \\
& +\sum_{j=1}^{nq} \left[q_{2j} \cdot (x - x_{2j})^2 / 2 + b_{jj} \cdot (x - x_{2j})^3 / 6 \right] \cdot h(x - x_{2j}) + \\
& -\sum_{k=1}^{nm} M_k \cdot h(x - x_k) + A \cdot x + B
\end{aligned}$$

(2.12.)

$$\begin{aligned}
EI_z \cdot \theta(x) = & EI_z \frac{d y}{dx} = -\sum_{i=1}^{np} P_i \cdot [(x - x_i)^2 / 2] \cdot h(x - x_i) + \\
& -\sum_{j=1}^{nq} \left[q_{1j} \cdot (x - x_{1j})^3 / 6 + b_{jj} \cdot (x - x_{1j})^4 / 24 \right] \cdot h(x - x_{1j}) + \\
& +\sum_{j=1}^{nq} \left[q_{2j} \cdot (x - x_{2j})^3 / 6 + b_{jj} \cdot (x - x_{2j})^4 / 24 \right] \cdot h(x - x_{2j}) + \\
& -\sum M_k \cdot (x - x_k) \cdot h(x - x_k) + A \cdot x^2 / 2 + B \cdot x + C
\end{aligned}$$

(2.13.)

$$\begin{aligned}
EI_z \cdot y = & -\sum_{i=1}^{np} P_i \cdot [(x - x_i)^3 / 6] \cdot h(x - x_i) + \\
& -\sum_{j=1}^{nq} \left[q_{1j} \cdot (x - x_{1j})^4 / 24 + b_{jj} \cdot (x - x_{1j})^5 / 120 \right] \cdot h(x - x_{1j}) + \\
& +\sum_{j=1}^{nq} \left[q_{2j} \cdot (x - x_{2j})^4 / 24 + b_{jj} \cdot (x - x_{2j})^5 / 120 \right] \cdot h(x - x_{2j}) + \\
& -\sum_{k=1}^{nm} M_k \cdot [(x - x_k)^2 / 2] \cdot h(x - x_k) + A \cdot x^3 / 6 + B \cdot x^2 / 2 + C \cdot x + D
\end{aligned}$$

(2.14.)

Die Integrationskonstanten A, B, C, D, die in den Gleichung (2.11.) - (2.14.) auftreten und die das Ergebnis der Integration der Differentialgleichung (2.1.) sind, werden aus den Randbedingungen je nach der Art der Balkenunterstützung an beiden Enden bestimmt (jeweils zwei Randbedingungen an jedem Balkenende).

3. Beispiel für Bestimmung von Integrationskonstanten für den frei gelagerten Balken mit den auf beiden Stützen A und B aufgegebenen Verschiebungen

(M_1 i M_3 - Einspannungsmomente an den Stabenden, als Feldmomente angesehen, den Stützen A und B unendlich nach gelegen)

Für $x=0$, $dy/dx=\theta_A$; sowie $y=y_A$ daher die Integrationskonstanten .

$$(3.1) \quad C = EI_z \cdot \theta_A$$

$$D = EI_z \cdot y_A \quad (3.2)$$

$$np=2; \quad nq=2; \quad nm=3$$

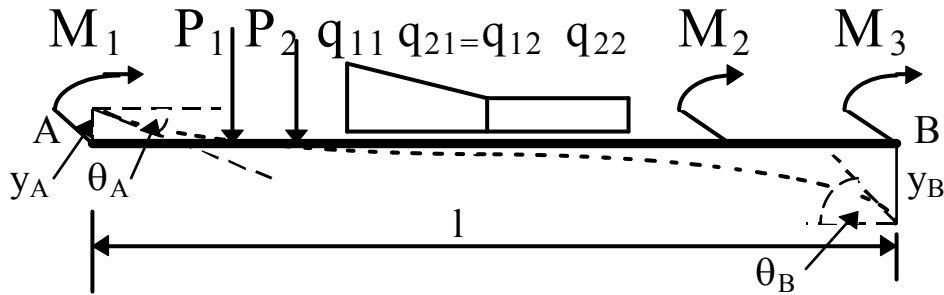


Bild 3.1.

Für $x=l$, $dy/dx=\theta_B$; sowie $y=y_B$.

$$A \cdot l^2 / 2 + B \cdot l + C + EI_z \cdot \theta_B = R_3 = \sum_{i=1}^{np} P_i \cdot [(l - x_i)^2 / 2] \cdot h(l - x_i) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{nq} [q_{1j} \cdot (l - x_{1j})^3 / 6 + b_{jj} \cdot (l - x_{1j})^4 / 24] \cdot h(l - x_{1j}) +$$

$$- \sum_{j=1}^{nq} [q_{2j} \cdot (l - x_{2j})^3 / 6 + b_{jj} \cdot (l - x_{2j})^4 / 24] \cdot h(l - x_{2j}) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{nm} M_k \cdot (l - x_k) \cdot h(l - x_k)$$

(3.3.)

$$A \cdot l^2 / 6 + B \cdot l / 2 + C + D / l + EI_z \cdot y_B / l = R_4 = \frac{1}{l} \left\{ \sum_{i=1}^{np} P_i \cdot [(l - x_i)^3 / 6] \cdot h(l - x_i) + \right.$$

$$+ \sum_{j=1}^{nq} [q_{1j} \cdot (l - x_{1j})^4 / 24 + b_{jj} \cdot (l - x_{1j})^5 / 120] \cdot h(l - x_{1j}) +$$

$$- \sum_{j=1}^{nq} [q_{2j} \cdot (l - x_{2j})^4 / 24 + b_{jj} \cdot (l - x_{2j})^5 / 120] \cdot h(l - x_{2j}) +$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{nm} M_k \cdot [(l - x_k)^2 / 2] \cdot h(l - x_k) \right\}$$

(3.4) Daher erhielt man zwei lineare Gleichungen zur Bestimmung von Integrationskonstanten

$$A \cdot l^2 / 2 + B \cdot l + C + EI_z \cdot \theta_B = R_3$$

$$A \cdot l^2 / 3 + B \cdot l + 2 \cdot C + 2 \cdot D / l + 2 \cdot EI_z \cdot y_B / l = 2 \cdot R_4$$

Indem mit Seiten subtrahiert wurde und nach den Transformationen erhielt man:

$$A = \frac{6}{l^2} [C + 2 \cdot D / l - EI_z \cdot \theta_B + 2 \cdot EI_z \cdot y_B / l + R_3 - 2 \cdot R_4] \quad (3.5.)$$

$$B = \frac{1}{l} [R_3 - A \cdot l^2 / 2 - C - EI_z \cdot \theta_B] \quad (3.6.)$$