

## NUMERISCHE ANALYSE VON VERBUNDQUERSCHNITTEN MIT NICHTLINEAREM MATERIALVERHALTEN UNTER BERÜCKSICHTIGUNG VON VORVERFORMUNGEN

Erich Raue<sup>\*</sup>, Hans-Georg Timmler

<sup>\*</sup> *Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Bauhaus-Universität Weimar  
Marienstraße 13, 99421 Weimar, Germany  
E-mail: [erich.raue@bauing.uni-weimar.de](mailto:erich.raue@bauing.uni-weimar.de)*

**Keywords:** Mathematical Optimisation, Composite Cross-Section, Retrofitting, Pre-Stressing

**Abstract.** *The presented method for an physically non-linear analysis of stresses and deformations of composite cross-sections and members based on energy principles and their transformation to non-linear optimisation problems. From the LAGRANGE principle of minimum of total potential energy a kinematic formulation of the mechanical problem can be developed, which has the general advantage that pre-deformations excited by shrinkage, temperature, residual deformations after unloading et al., can be considered directly. Thus the non-linear analysis of composite cross-sections with layers of different mechanical properties and different preloading becomes possible and cracks in concrete, stiffness degradation and other specifics of the material behaviour can be taken into account without cardinal modification of the mathematical model. The impact of local defects on the bearing capacity of an entire element can also be analysed in this principle way.*

*Standard computational systems for mathematical optimisation or general programs for spreadsheet analysis enable an uncomplicated implementation of the developed models and an effective non-linear analysis for composite cross-sections and elements.*

# 1 PROBLEMÜBERSICHT

Verbundkonstruktionen sind durch die planmäßige Ausnutzung der spezifischen Materialeigenschaften der einzelnen Komponenten charakterisiert. Massivbautypische Verbundquerschnitte aus Stahlbeton- oder Spannbetonfertigteilen in Kombination mit Ortbetonergänzungen, sind i.A. durch Betonanteile mit signifikant unterschiedlichen Materialkennwerten charakterisiert. Eine analoge Situation entsteht, wenn im Zuge von Revitalisierungsmaßnahmen vorhandene Tragelemente nachträglich verstärkt werden. Dabei werden die einzelnen Querschnittsanteile in Anhängigkeit vom Zeitpunkt, der Art und den Bedingungen ihrer Herstellung und Belastung sehr unterschiedlich beansprucht. Im Allgemeinen können die Beanspruchungen in Betonverbundkonstruktionen durch Untersuchungen am Gesamtquerschnitt nur unzureichend abgeschätzt werden, d.h. eine Betrachtung der Formänderungen und Spannungen für unterschiedliche wirksame Querschnittsanteile unter Berücksichtigung von Vorverformungen ist unumgänglich. In der Ingenieurpraxis werden vorverformungsbedingte Besonderheiten des Tragverhaltens von Verbundquerschnitten oft nur unzureichend bei der Bemessung und Nachweisführung berücksichtigt.

Die Analyse von Verbundkonstruktionen baut i.A. auf Betrachtungen der Gleichgewichtsbedingungen, der Kompatibilitätsbedingungen der Deformationen sowie der Spannungs-Dehnungsbeziehungen auf. Die im Folgenden erläuterte alternative Modellbildung basiert auf Energieprinzipien in kinematischer Formulierung, d.h. Ausgangspunkt sind das Prinzip von LAGRANGE vom Minimum des Gesamtpotentials und daraus abgeleitete Extremalaufgaben mit Nebenbedingungen.

Diese Extremalaufgaben können über die EULER-LAGRANGE-Gleichungen in Randwertprobleme überführt werden. Nach entsprechender Diskretisierung ergeben sich algebraische Gleichungssysteme, wie sie für die traditionelle FEM charakteristisch sind. Physikalische und geometrische Nichtlinearitäten werden dabei über Pfadverfolgungsalgorithmen berücksichtigt.

Alternativ hierzu können die Extremalaufgaben mittels entsprechender Diskretisierung in nichtlineare Optimierungsaufgaben überführt und als solche gelöst werden. Zielfunktion dieser Optimierungsaufgaben ist das Minimum des Gesamtpotentials, d.h. die Summe der Formänderungsenergie und des Potentials der äußeren Kräfte. Es soll hervorgehoben werden, dass der Einsatz der mathematischen Optimierung ausschließlich auf die Bestimmung mechanischer Zustandsvariablen orientiert ist. Probleme der Strukturoptimierung wie Minimierung von Eigengewicht, Kosten usw. sind nicht Gegenstand der vorliegenden Untersuchungen.

Der gewählte methodische Ansatz auf der Basis einer kinematischen Formulierung bietet den Vorteil, dass die Anzahl der Unbekannten begrenzt ist und dass die Spezifik des Materialverhaltens direkt über die Formänderungsenergiedichte erfasst und in das mathematische Modell eingebaut werden kann [1,2]. In Verbindung mit Optimierungsalgorithmen ergeben sich so weitergehende Möglichkeiten, Vorverformungen, Rissbildungen, Steifigkeitsdegradationen usw. ohne Aufwand in die Modellbildung einzubeziehen [3,4].

## 2 GRUNDLAGEN DER MODELLBILDUNG

Die im Beitrag erläuterte Modellbildung basiert auf elementaren Betrachtungen zum Verformungsverhalten von biege- und normalkraftbeanspruchten Verbundquerschnitten. Die Querschnitte bestehen aus Querschnittsteilen, die sich bezüglich ihrer stofflichen und geometrischen Eigenschaften unterscheiden und die zu unterschiedlichen Zeitpunkten im Verbundquerschnitt wirksam werden (nachträgliche Ergänzung, Vorspannung mit nachträglichem Verbund). Die zum jeweiligen Betrachtungszeitpunkt im Verbund stehenden Querschnittsteile bilden den wirksamen Verbundquerschnitt.

Die Kompatibilität der Querschnittsdeformationen basiert auf den Annahmen von starrem Verbund zwischen den Querschnittsteilen und vom eben bleiben des wirksamen Querschnitts. Damit ist die Dehnung  $\varepsilon(y,z)$  in einem beliebigen Punkt des Querschnitts durch drei Parameter eindeutig bestimmt, z.B. durch die Dehnung  $\varepsilon_0$  im Koordinatenursprung und die beiden Neigungen der Krümmungsebene  $\kappa_y$  und  $\kappa_z$ :

$$\varepsilon(y,z) = \varepsilon_0 + \kappa_y y + \kappa_z z. \quad (1)$$

Während die Dehnungen der einzelnen Querschnittsteile  $\varepsilon_i(y,z)$  den Dehnungen des Gesamtquerschnitts  $\varepsilon(y,z)$  entsprechen, wenn sie im gleichen Deformationsprozess entstehen, können Deformationen einzelner Querschnittsteile infolge Vorspannung, Vorbelastung, Temperatur oder infolge des Schwindens und Kriechens des Betons sowie bleibende Verformungen infolge von Plastizierungen als Vorverformungen  $\varepsilon_i^{(0)}(y,z)$  berücksichtigt werden:

$$\varepsilon_i(y,z) = \varepsilon(y,z) + \varepsilon_i^{(0)}(y,z). \quad (2)$$

Die kinematische Formulierung folgt aus dem Prinzip vom Minimum des Gesamtpotentials

$$\Pi_i + \Pi_a = \text{Minimum}, \quad (3)$$

wobei  $\Pi_i$  die Formänderungsenergie und  $\Pi_a$  die potentielle Energie der äußeren Kräfte beschreibt.

Die Dehnungen  $\varepsilon_i(y,z)$  im Querschnittsteil  $i$  und die entsprechenden Spannungen  $\sigma_i(y,z)$  sind über ein für die jeweilige Faser relevantes Materialgesetz gekoppelt, wobei unter der Annahme monoton wachsender Deformationen die Spannungen  $\sigma_i$  eindeutig als Funktion der Dehnungen  $\varepsilon_i$  dargestellt werden können:

$$\sigma_i = f_i(\varepsilon_i). \quad (4)$$

Die spezifische Formänderungsenergie  $W_{(i)}$  des Querschnittsteils  $i$ , kann somit als Funktion der Dehnung  $\varepsilon_i$  d.h. in Abhängigkeit von den Parametern  $\varepsilon_0$ ,  $\kappa_y$  und  $\kappa_z$  der Dehnungsebene ermittelt werden:

$$W_{(i)} = \int_0^{\varepsilon_i} \sigma_{(i)} d\varepsilon_{(i)} = \int_0^{\varepsilon_i} f(\varepsilon_{(i)}) d\varepsilon_{(i)}. \quad (5)$$

Die Integration der spezifischen Formänderungsenergie  $W_i(\varepsilon_i)$  über die Fläche des Querschnittsteils  $i$  liefert die Formänderungsenergie  $\Pi_{i(i)}$  für den Querschnittsteil  $i$ :

$$\Pi_{i(i)} = \int_{h(i)} \int_{b(i)} \int_0^{\varepsilon(i)} \sigma_{(i)} d\varepsilon_{(i)} dz dy . \quad (6)$$

Die Formänderungsenergie des Gesamtquerschnitts folgt aus der Summation der Energieanteile der Teilquerschnitte:

$$\Pi_i^Q = \sum_i \Pi_{i(i)} . \quad (7)$$

Das für Querschnitte beschriebene Modell kann so erweitert werden, dass die Berechnung der Deformationen, Schnittgrößen und Spannungen von Verbundelementen auf der Basis der Minimierung des totalen Potentials des gesamten Elements möglich wird. Die Gesamtdehnungsenergie ergibt sich, wenn die Integration über die Gesamtlänge des Elements ausgedehnt wird:

$$\Pi_i^E = \int_0^l \Pi_i^Q(\varepsilon_o(x), \kappa_x(x), \kappa_y(x)) dx . \quad (8)$$

Die potentielle Energie der äußeren Lasten  $p_x(x)$ ,  $p_y(x)$  und  $p_z(x)$  wird in Abhängigkeit von den Verschiebungen  $u(x)$ ,  $v(x)$  and  $w(x)$  ermittelt:

$$\Pi_a^E = - \int_0^l [p_x(x)u(x) + p_y(x)v(x) + p_z(x)w(x)] dx . \quad (9)$$

Zusätzlich sind die Kompatibilitätsbedingungen zwischen den Balkenverschiebungen und den Querschnittsdeformationen zu berücksichtigen:

$$\varepsilon_o(x) - u'(x) = 0 \quad (10)$$

$$\kappa_x(x) + v''(x) = 0 \quad (11)$$

$$\kappa_y(x) + w''(x) = 0 . \quad (12)$$

### 3 ANWENDUNG AUF STAHLBETONVERBUNDQUERSCHNITTE

Bei der Anwendung des im Abschnitt 2 erläuterten Modells auf Stahlbeton- bzw. Spannbetonverbundquerschnitte soll beispielhaft von einfach symmetrischen Querschnitten unter einachsiger Beanspruchung ausgegangen werden. Für die Dehnung  $\varepsilon(y)$  gilt dann

$$\varepsilon(y) = \varepsilon_o + \kappa_y y , \quad (13)$$

d.h. der Deformationszustand des Querschnitts ist durch zwei Parameter eindeutig bestimmt.

Wird der Betonquerschnitt in einzelne Schichten  $i$  mit Rändern  $y_{(i)}$  und  $y_{(i+1)}$  und der Breite  $b_{(i)}(y)$  unterteilt, können diese Schichten als separate Querschnittsanteile mit spezifischen Material- und Steifigkeitseigenschaften dargestellt werden. Der Formänderungsenergieanteil  $\Pi_{ic(i)}$  der Schicht  $i$  ergibt sich durch Integration der spezifischen Formänderungsenergie über die Fläche der Schicht:

$$\Pi_{ic(i)} = \int_{y(i)}^{y(i+1)} b_{(i)}(y) W_{(i)}(y) dy. \quad (14)$$

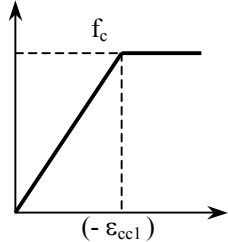
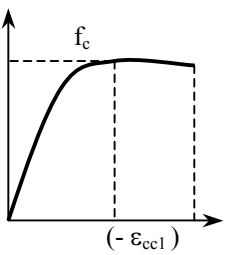
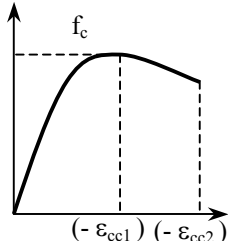
wobei das Integral näherungsweise berechnet werden kann:

$$\Pi_{ic(i)} = \frac{b_{(i)} + b_{(i+1)}}{2} (y_{(i+1)} - y_{(i)}) \frac{W_{(i)} + W_{(i+1)}}{2}. \quad (15)$$

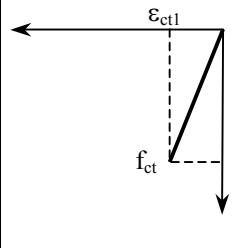
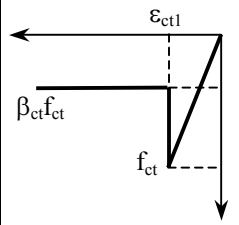
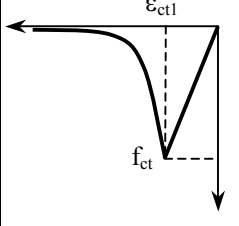
Für die Bewehrung wird von konstanten Dehnungen  $\varepsilon_{s(k)}$  im Stahlquerschnitt  $k$  ausgegangen, so dass für die spezifische Formänderungsenergie der Stahlanteile  $\Pi_{is(k)}$  gilt:

$$\Pi_{is(k)} = A_{s(k)} \int_0^{\varepsilon_{s(k)}} \sigma_{s(k)} d\varepsilon_{s(k)} = A_{s(k)} W_{s(k)} \quad (16)$$

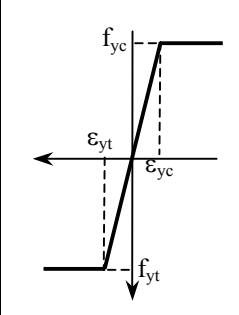
In den Tafeln 1 und 2 sind exemplarisch Spannungs-Dehnungsbeziehungen zur Beschreibung des Betonverhaltens im Zug- und im Druckbereich sowie die daraus abgeleiteten Formulierungen der spezifischen Formänderungsenergie  $W_{(i)}$  zusammengestellt. Tafel 3 enthält die entsprechenden Angaben für Stahl.

		Spannungs-Dehnungsbeziehung	spezifische Formänderungsenergie
1		$\sigma_c = \begin{cases} -f_c & \varepsilon_c < \varepsilon_{cc1} \\ -\frac{f_c}{\varepsilon_{cc1}} \varepsilon_c & \varepsilon_{cc1} \leq \varepsilon_c \leq 0 \end{cases}$	$W_c = \begin{cases} -\frac{f_c \varepsilon_{cc1}}{2} + (-f_c)(\varepsilon_c - \varepsilon_{cc1}) \\ -\frac{f_c \varepsilon_c^2}{2\varepsilon_{cc1}} \end{cases}$
2		$\sigma_c = \left( \frac{k\eta - \eta^2}{1 + (k-2)\eta} \right) (-f_c)$ $\eta = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cc1}}$ $k = 1,1 \frac{E_{cm}(-\varepsilon_{cc1})}{f_c} = \frac{E_{c0}(-\varepsilon_{cc1})}{f_c}$	$W_c = \left\{ \frac{\eta^2}{2((k-2))} - \frac{(k-1)^2 \eta}{(k-2)^2} + \frac{(k-1)^2 \ln[1 + (k-2)\eta]}{(k-2)^3} \right\} (-\varepsilon_{cc1}) f_c$
3		$\sigma_c = \left[ \sum_{\nu=1}^n a_{\sigma\nu} \left( \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cc1}} \right)^\nu \right] (-f_c)$	$W_c = \left[ \sum_{\nu=1}^n \frac{a_{\sigma\nu}}{\nu+1} \left( \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cc1}} \right)^{(\nu+1)} \right] (-\varepsilon_{cc1}) f_c$

Tafel 1: Spannungs-Dehnungsbeziehungen und spezifische Formänderungsenergie für Beton unter Druckbeanspruchung

		Spannungs-Dehnungsbeziehung	spezifische Formänderungsenergie
1		$\sigma_c = \begin{cases} \frac{f_{ct} \epsilon_c}{\epsilon_{ct1}} & 0 \leq \epsilon_c \leq \epsilon_{ct1} \\ 0 & \epsilon_c > \epsilon_{ct1} \end{cases}$	$W_c = \begin{cases} \frac{f_{ct} \epsilon_c^2}{2 \epsilon_{ct1}} & 0 \leq \epsilon_c \leq \epsilon_{ct1} \\ \frac{f_{ct} \epsilon_{ct1}}{2} & \epsilon_c > \epsilon_{ct1} \end{cases}$
2		$\sigma_c = \begin{cases} \frac{f_{ct} \epsilon_c}{\epsilon_{ct1}} & 0 \leq \epsilon_c \leq \epsilon_{ct1} \\ \beta_{ct} f_{ct} & \epsilon_c > \epsilon_{ct1} \end{cases}$ <p><math>(0,3 \leq \beta_{ct} \leq 0,6)</math></p>	$W_c = \begin{cases} \frac{f_{ct} \epsilon_c^2}{2 \epsilon_{ct1}} & 0 \leq \epsilon_c \leq \epsilon_{ct1} \\ \frac{f_{ct} \epsilon_{ct1}}{2} + \beta_{ct} f_{ct} (\epsilon_c - \epsilon_{ct1}) & \epsilon_c > \epsilon_{ct1} \end{cases}$
3		$\sigma_c = \begin{cases} \frac{f_{ct} \epsilon_c}{\epsilon_{ct1}} & 0 \leq \epsilon_c \leq \epsilon_{ct1} \\ f_{ct} e^{-\alpha(\epsilon_c - \epsilon_{ct1})} & \epsilon_c > \epsilon_{ct1} \end{cases}$	$W_c = \begin{cases} \frac{f_{ct} \epsilon_c^2}{2 \epsilon_{ct1}} & 0 \leq \epsilon_c \leq \epsilon_{ct1} \\ \frac{f_{ct} \epsilon_{ct1}}{2} + \frac{f_{ct}}{\alpha} \left[ 1 - e^{-\alpha(\epsilon_c - \epsilon_{ct1})} \right] & \epsilon_c > \epsilon_{ct1} \end{cases}$

Tafel 2: Spannungs-Dehnungsbeziehungen und spezifische Formänderungsenergie für Beton unter Zugbeanspruchung

		Spannungs-Dehnungsbeziehung	spezifische Formänderungsenergie
1		$W_s = \begin{cases} -f_{yt} & \epsilon_s < \epsilon_{yc} \\ \frac{f_{yc} \epsilon_s}{\epsilon_{yc}} & \epsilon_{yc} \leq \epsilon_s \leq \epsilon_{yt} \\ f_{yt} & \epsilon_s > \epsilon_{yt} \end{cases}$	$W_s = \begin{cases} \frac{f_{yc} \epsilon_s^2}{2 \epsilon_{yc}} + (-f_{yt})(\epsilon_s - \epsilon_{yc}) & \epsilon_s < \epsilon_{yc} \\ \frac{f_{yc} \epsilon_s^2}{2 \epsilon_{yc}} & \epsilon_{yc} \leq \epsilon_s \leq \epsilon_{yt} \\ \frac{f_{yc} \epsilon_s^2}{2 \epsilon_{yc}} + f_{yt}(\epsilon_s - \epsilon_{yt}) & \epsilon_s > \epsilon_{yt} \end{cases}$

Tafel 3: Spannungs-Dehnungsbeziehungen und spezifische Formänderungsenergie für Stahl

#### 4 NUMERISCHE UMSETZUNG UND ANWENDUNGSBEISPIEL

Grundlage der numerischen Umsetzung des oben erläuterten Berechnungsmodells ist die Überführung der Extremalaufgabe in eine nichtlineare Optimierungsaufgabe durch geeignete Diskretisierung der einzelnen Querschnittsanteile. Im Fall zweiachsiger Beanspruchung ergibt sich ein Fasernmodell und bei einachsiger Beanspruchung einfach symmetrischer Querschnitte ein Schichtenmodell, wobei unabhängig vom Grad der Diskretisierung drei bzw. zwei unbekannte Deformationsparameter zu bestimmen sind.

Die gewählte kinematische Formulierung zur Analyse auf Querschnittsebene liefert eine Extremalaufgabe ohne Nebenbedingungen bzw. nach der Diskretisierung eine nichtlineare Optimierungsaufgabe ohne Nebenbedingungen. Die Gleichgewichtsbedingungen am Querschnitt können somit zur Kontrolle der Lösung herangezogen werden.

In den letzten Jahren wurden international leistungsfähige Algorithmen und Programme zur Lösung nichtlinearer Optimierungsaufgaben erarbeitet und in Standardsoftware und Tabellenkalkulationsprogramme implementiert. Insbesondere die Begrenzung der Zahl der Unbekannten bei der vorgestellten Modellbildung ermöglicht es, solche Standardsoftware zur Formulierung und numerischen Lösung von Optimierungsaufgaben der nichtlinearen Tragwerksanalyse zu nutzen.

An einem Prinzipbeispiel soll die Anwendung der vorgestellten Berechnungsmethode zur Analyse von Spannungs- und Dehnungszuständen in Stahlbetonquerschnitten mit nachträglicher Ortbetonergänzung erläutert werden. Der Ausgangsquerschnitt (Abb. 1) wird durch ein Biegemoment  $M$  und durch eine Normalkraft  $N$  beansprucht. Der resultierende Spannungs- und Dehnungszustand ist in Tafel 4 dargestellt.

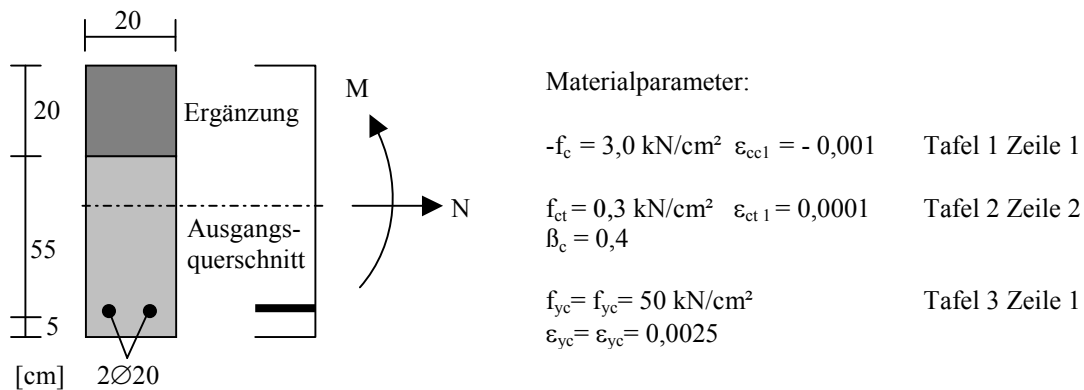
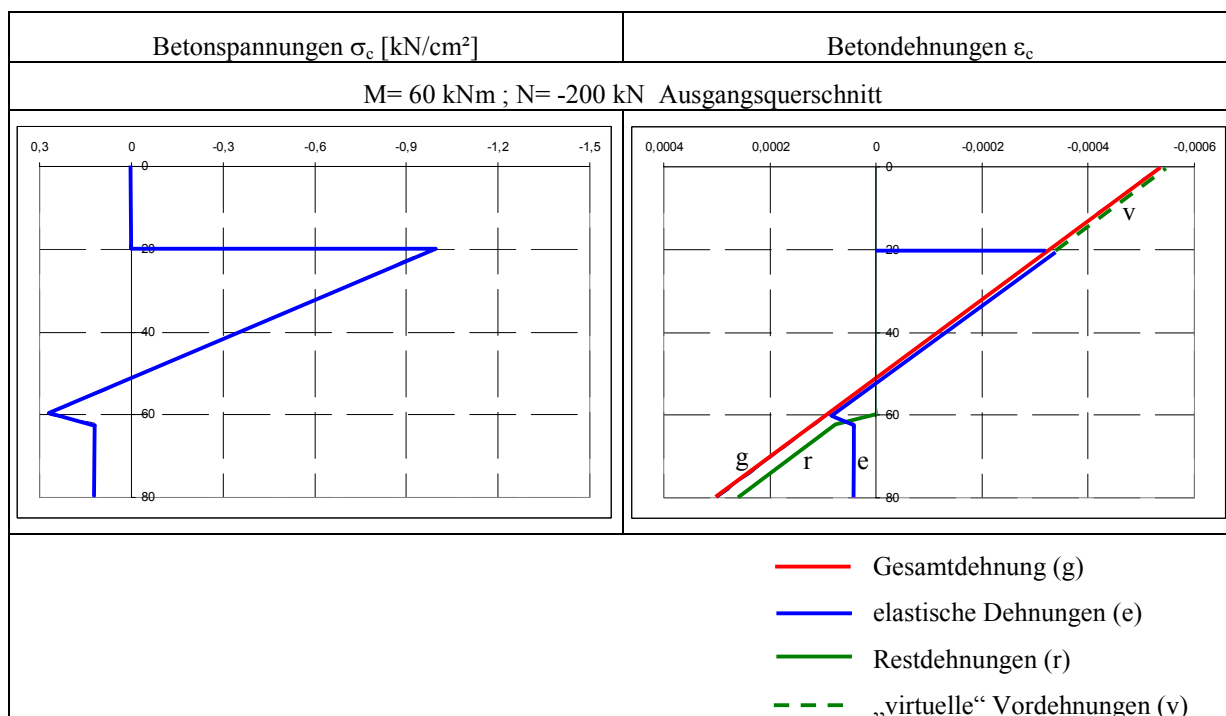


Abb. 1: Rechteckquerschnitt mit nachträglicher Ergänzung: Geometrie- und Materialparameter

Die Gesamtdehnungen setzen sich im Bereich der gerissenen Zugzone aus einem elastischen und einem Restdehnungsanteil zusammen. Die zum Gesamtdehnungszustand kompatiblen Dehnungen im nicht vorhandenen Querschnitt werden als „virtuelle“ Vordehnungen definiert.

Der Querschnitt wird im belasteten Zustand durch eine 20 cm Ortbetonschicht ergänzt. Für die weiteren Berechnungen müssen die am Ausgangsquerschnitt ermittelten „virtuellen“ Vordehnungen berücksichtigt werden. In Tafel 5 sind Spannungen und Dehnungen für den Gesamtquerschnitt für verschiedene Belastungssituationen zusammengefasst.

Aus der Forderung der Kompatibilität der Deformationen (eben bleiben des neuen Gesamtquerschnitts) folgt, dass auch bei reiner Druckbeanspruchung ( $M=0$ ;  $N=-200\text{kN}$ ) die Unterseite des Querschnitts auf Zug beansprucht wird. Die Reduzierung der Drucknormalkraft ( $M=60\text{kNm}$ ;  $N=0$ ) hat zur Folge, dass der Querschnitt weiter aufreißt und in der ergänzten Betonschicht Zugspannungen auftreten. Bei Erhöhung der Momentenbeanspruchung ( $M=120\text{kNm}$ ;  $N=-200$ ) gegenüber der Ausgangsbelastung wird der ergänzte Querschnitt vollständig überdrückt.

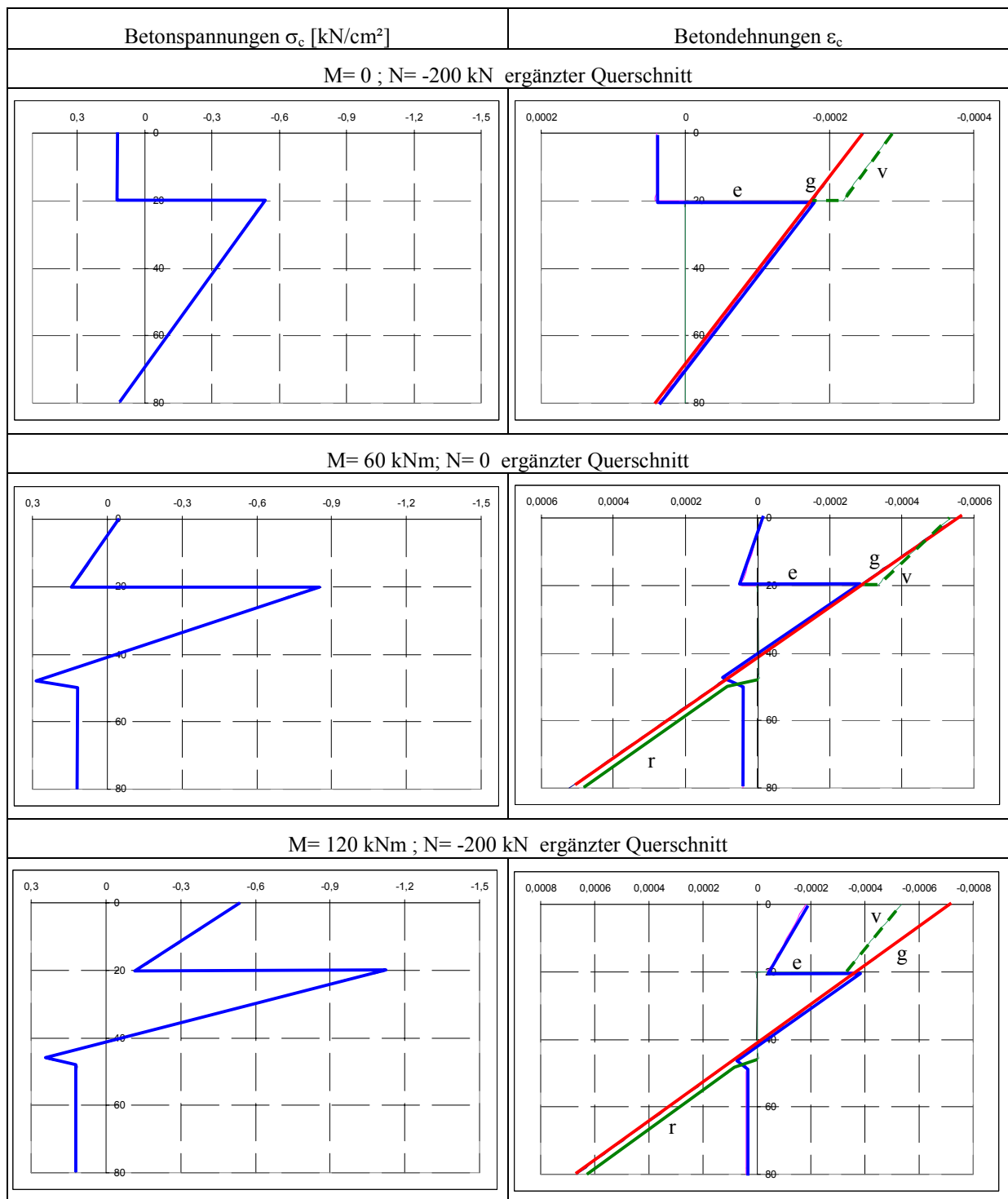


Tafel 4: Spannungs-Dehnungsverteilung für den Ausgangsquerschnitt

## LITERATUR

- [1] E. Raue, Alternative mathematical modelling in the analysis of reinforced concrete structures, *7<sup>th</sup> International Conference Modern Building Materials, Structures and Techniques*, Vilnius, 2004.
- [2] E. Raue, Berechnung von Verbundquerschnitten mit Hilfe der mathematischen Optimierung. *Massivbau in ganzer Breite, Festschrift zum 60. Geburtstag von Prof. Zilch*. Springer Verlag, Berlin, 2004.
- [3] E. Raue, H.-G. Timmler, Modelling and Assessment of Retrofitted Pre-Stressed Concrete Members; *First Munich Bridge Assessment Conference*, Munich, 2005.
- [4] E. Raue, H.-G. Timmler, Alternative Analytical Modelling of Retrofitted Reinforced Concrete Members; *International Conference on Concrete Repair, Rehabilitation and Retrofitting*, Cape Town, 2005.





Tafel 5: Spannungs-Dehnungsverteilung am ergänzten Querschnitt für verschiedene Beanspruchungssituationen