

# Sicherheitsbeurteilung der Grenzlastzustände von Stahlbetontragwerken

Karl-Heinz Müller

---

## 1. Einführung

Die Zulassung der Ausschöpfung von Reserven des Tragwerks infolge des globalen nichtlinearen Systemverhaltens im EC erfordert neue Überlegungen bezüglich des Sicherheitskonzeptes, denn das Konzept, das für Beschränkung auf lineares Systemverhalten entwickelt wurde, kann nicht unverändert angewandt werden.

Daraus folgend sind Analysen des Tragwerksverhaltens unter Berücksichtigung stochastischer System- und Lastparameter notwendig. Diese Analysen können sowohl zur Beurteilung der Zuverlässigkeit konkreter Situationen (wie auch im EC allgemein gefordert) als auch zur Erstellung von Sicherheitskonzepten für die Erfassung von nichtlinearem Systemverhalten dienen.

Der Plastische Grenzlastfaktor (PGLF), der die Ausnutzung der Kapazitäten des Tragwerks bis zum Kollaps ermöglicht, wird als Kriterium zur Beurteilung der Tragfähigkeit von Tragwerken benutzt. Von den verschiedenen Möglichkeiten der (deterministischen) Bestimmung des PGLF soll die der Berechnung über die Formulierung von Extremalaufgaben gewählt werden, welche ohne Kenntnis der Lastgeschichte den Grenzzustand bestimmt.

Dies ermöglicht die direkte Bestimmung des Zustandes „Kollaps“, bereitet aber bei der stochastischen Analyse des Systems einige Schwierigkeiten, da die zugehörigen Grenzzustandsgleichungen (GZG) nicht gutartig sind. Es wird eine stochastische Methode zur Bestimmung der Versagenswahrscheinlichkeit vorgeschlagen, die unter Berücksichtigung der Eigenschaften dieses mechanischen Modells Nachteile bisheriger Methoden überwindet.

## 2. Mechanisches und stochastisches Modell

Für das Modell eines ebenen Stahlbetontragwerks wird ideal-starr-plastisches Materialverhalten vorausgesetzt [6]. Die Bestimmung des PGLFs  $p$  für ein gegebenes Lastbild kann ausgehend von einem Extremalprinzip über die Lösung einer Optimierungsaufgabe erfolgen:

$$\mathbf{c}^T * \mathbf{X} = -p \rightarrow \min \quad \text{mit} \quad \mathbf{A}(\mathbf{d}, \mathbf{Z}) * \mathbf{X} - \mathbf{b}(\mathbf{d}, \mathbf{Z}) \leq \mathbf{0} \quad (1)$$

Dabei sind  $\mathbf{d}$  bzw.  $\mathbf{Z}$  die deterministischen bzw. stochastischen Eingangsgrößen und in  $\mathbf{X}$  sind sowohl die unbekanntes Schnittgrößen an diskreten Stellen des Tragwerks als auch das gesuchte  $p$  enthalten. Die Nebenbedingungen bestehen aus den Gleichgewichtsbedingungen und den Plastizitätsbedingungen (Ungleichungen). Die (zufällige) Lösung  $\mathbf{X}^*$  enthält den gesuchten PGLF  $p(\mathbf{d}, \mathbf{Z})$ .

Dieser Lösungsweg hat den Vorteil, daß nicht der minimale aller Lasterhöhungsfaktoren von den möglichen oder zumindest für wesentlich gehaltenen kinematischen Ketten zu ermitteln ist, sondern der PGLF und die zugehörige kinematische Kette direkt bestimmt werden können.

Als Grenzzustand wird das Erreichen des PGLF  $p$  durch die Lastintensität  $p_0$  definiert. Damit tritt Versagen des Systems ein, wenn die Grenzzustandsfunktion  $g(\mathbf{d}, \mathbf{Z})$  negativ wird, d.h. wenn der (zufällige) PGLF  $p(\mathbf{d}, \mathbf{Z})$  den Wert  $p_0$  unterschreitet:

$$g(\mathbf{X}^*) = g(\mathbf{X}^*(\mathbf{d}, \mathbf{Z})) = g(\mathbf{d}, \mathbf{Z}) = p(\mathbf{d}, \mathbf{Z}) - p_0 < 0 \quad (2)$$

Die Wahrscheinlichkeitsmasse der Dichte  $f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})$  im Versagensbereich  $D_f = \{ \mathbf{Z} \mid g(\mathbf{d}, \mathbf{Z}) < 0 \}$  ist dann die gesuchte Versagenswahrscheinlichkeit  $P_f$  als Maß für die Sicherheit des Systems:

$$P_f = \int \mathbb{I}_{D_f}(\mathbf{z}) * f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \quad (3)$$

Im allgemeinen ist dieses Integral weder analytisch noch numerisch direkt auswertbar. Da die zugehörigen Grenzzustandsgleichungen (GZG) stark nichtlinear sind, ist die Eignung bekannter probabilistischer Methoden zur Bestimmung von  $P_f$  i.a. nicht gegeben [5].

### 3. Stochastische Methoden zur Bestimmung von $P_f$

#### 3.1 Beta-Verfahren

Der Sicherheitsindex  $\beta$  als kürzester Abstand des Ursprungs zur Grenzzustandsgleichung im standardisierten normalen Raum (Y-Raum) und der Bemessungspunkt  $\mathbf{Y}^*$  als der zugehörige Berührungspunkt können durch Lösung einer Optimierungsaufgabe bestimmt werden.

Ein spezieller Algorithmus wurde von HASOFER/LIND eingeführt und von RACKWITZ/FIESZLER weiterentwickelt als eine Iteration zur Suche des Bemessungspunktes  $\mathbf{Y}^*$  im standardisierten Raum (und  $\beta$ ), die schrittweise eine Linearisierung der transformierten Grenzzustandsfunktion  $h(\mathbf{Y})$  im jeweiligen Iterationspunkt verwendet:

$$\mathbf{Y}_{i+1} = \{ \mathbf{H}(\mathbf{Y}_i)^T * \mathbf{Y}_i - h(\mathbf{Y}_i) \} * \mathbf{H}(\mathbf{Y}_i) / |\mathbf{H}(\mathbf{Y}_i)|^2$$

mit  $\mathbf{H}(\mathbf{Y}_i) = (d h(\mathbf{Y}) / d \mathbf{Y})|_{\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_i}$  (4)

Das Betaverfahren zielt nur auf eine lokale Lösung, berücksichtigt bestenfalls nur die gefährlichste Versagenssituation und führt darüber hinaus zu sehr ungenauen zugehörigen Werten für  $P_{f,B} = M(-\beta)$ .

#### 3.2 Monte-Carlo-Simulation

Indem  $N$  Realisierungen der Basisvariablen  $\mathbf{z}_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) erzeugt werden, kann  $P_f$  daraus geschätzt werden [9]:

$$P_{f,MC} = 1/N * \sum_{i=1:N} \mathbb{I}_{D_f}(\mathbf{z}_i) \quad (5)$$

Die Monte-Carlo-Simulation ist prinzipiell geeignet. Vorabinformationen sind nicht notwendig, aber die notwendige Versuchsanzahl  $N$  ist bei den sehr kleinen angestrebten Werten für  $P_{f,MC}$  unverträglich hoch.

#### 3.3 Importance-Sampling-Methoden

Indem gemäß einer Sampling-Dichte  $h_{\mathbf{V}}$  im Z-Raum, die über den wesentlichen Versagensbereich gespannt wird, simuliert wird, kann die Anzahl der notwendigen Realisierungen erheblich reduziert werden. Die Schätzung von  $P_f$  ergibt sich dann folgendermaßen [9]:

$$P_{f,IS} = 1/N * \sum_{i=1:N} \mathbb{I}_{D_f}(\mathbf{v}_i) * f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{v}_i) / h_{\mathbf{V}}(\mathbf{v}_i) \quad (6)$$

Die Güte der Schätzung hängt stark von der prinzipiell beliebigen Wahl der Sampling-Dichte  $h_V$  ab. Ohne Vorabinformationen ist die Festlegung von  $h_V$  nicht möglich. Importance-Sampling-Methoden sind prinzipiell gut geeignet, aber die Wahl einer geeigneten Sampling-Dichte ist nicht hinreichend geklärt.

#### 4. Multimodal Importance Sampling (MMIS)

Es wird ein Verfahren vorgeschlagen, das auf die Eigenschaften des speziellen Problems abgestimmt ist, dadurch nicht unbedingt den Anspruch einer universellen Nutzung besitzt. Indem die nur stückweise Stetigkeit GZG zur Bestimmung des plastischen GLF berücksichtigt wird, wird eine Suche der „wesentlichen Bemessungspunkte“ durch Anwendung des Betaverfahrens zur Voraussetzung für einen Importance-Sampling-Algorithmus mit multimodaler Sampling Dichte durchgeführt.

##### 4.1 Voraussetzungen

Die Grenzzustandsfunktion muß gegeben sein. D.h. es müssen Werte von  $g(\mathbf{d}, \mathbf{Z})$  für beliebige  $\mathbf{Z}$  bestimmbar sein. Probleme, deren Grenzzustand nur durch die charakteristische Funktion des Versagensbereichs beschrieben wird, können nicht betrachtet werden.

##### 4.2 Prinzipieller Algorithmus

Die folgenden Bezeichnungen werden verwendet:

$\mathbf{Z}$ : Vektor der Zufallsvariablen im physikalischen Raum

$\mathbf{Y}$ : Vektor der Zufallsvariablen im standardisierten normalen Raum

$n_z$ : Dimension der Vektoren  $\mathbf{Z}$  und  $\mathbf{Y}$

$n_b$ : Anzahl der ermittelten Bemessungspunkte

$\beta$ : Abstand des Sicherheitsindex zu unwesentlichen Bemessungspunkten

$a$ : Norm-Abstand der wesentlich verschiedenen Bemessungspunkte

Der Algorithmus läßt sich in drei Stufen einteilen:

*Algorithmus 1. Stufe: Bestimmung der maßgebenden Bemessungspunkte mit zugehörigen Sicherheitsindizes (n<sub>z</sub> Suchrichtungen mit jeweiliger Iteration)*

1.  $i = 1$ , Bestimmung von  $\mathbf{Y}_{v1} = \mathbf{Y}^*$  und  $\beta_0$  mit dem Betaverfahren
2.  $i = i+1$ , zufällige Erzeugung der Suchrichtung  $\mathbf{Y}_{vi}$  mit  $|\mathbf{Y}_{vi}| = \beta_1$  so, daß  $\mathbf{Y}_{vi} \cdot \mathbf{Y}_{vj} = 0$  für alle  $j < i$
3. Verschieben der Ausgangsdichte im Y-Raum in Richtung  $\mathbf{Y}_{vi}$
4. Bestimmung von  $\mathbf{Y}_i^*$  und  $\beta_i$  für die Ausgangsdichte durch Iteration und Anwendung des Betaverfahrens in jedem Iterationsschritt
5. Registrierung von  $\mathbf{Y}_i^*$  und  $\beta_i$  als neuen Bemessungspunkt, falls  $\beta_i < \beta_1 + \beta$  und  $|\mathbf{Y}_i^* - \mathbf{Y}_j^*| < a$  für alle  $j < i$
6. Falls  $i < n_z$ , gehe zu 2.

(7.) Evtl. Wiederholung von 3., 4. und 5. für alle  $-Y_{vi}$  ( $i=1,\dots,nz$ )

Ergebnis: Bemessungspunkte  $Y_{vk}$  mit  $\beta_k$  ( $k=1,\dots,nb$ )

*Algorithmus 2. Stufe: Festlegung der Merkmale der Sampling-Dichten bei jedem Bemessungspunkt und Konstruktion der multimodalen Sampling-Dichte*

1. Bestimmung des Erwartungswertes  $y_{g,k}$  der bedingten Randdichten bzgl.  $\beta_k$  [1]:  
$$y_{g,k} = \exp(-\beta_k^2/2) / M(-\beta_k) / (2B)^{1/2} \quad (k=1,\dots,nb)$$
2. Bestimmung der Sampling-Zentren  $Y_{zi}$  im Y-Raum:  
$$Y_{zk} = y_{g,k} / \beta_k * Y_{vi} \quad (k=1,\dots,nb)$$
3. Bestimmung der zu  $\beta_k$  gehörigen  $P_{f,k}$ :  $P_{f,k} = M(-\beta_k)$  ( $k=1,\dots,nb$ )
4. Transformation der Bemessungspunkte  $Y_{zk}$  in die physikalischen Sampling-Zentren  $Z_{zk}$  und Konstruktion der multimodalen Sampling-Dichte  $h_v$ :  
$$h_v = P_{f,k} * h_{v,k} / E_{j=1:nb} P_{f,j}$$
  
 $h_{v,k}$ : normale unkorrelierte Verteilungen in den Sampling-Zentren  $Z_{zk}$  mit den Streuungen der Originaldichte

*Algorithmus 3. Stufe: Bestimmung der Versagenswahrscheinlichkeit durch Importance Sampling mit der multimodalen Sampling-Dichte*

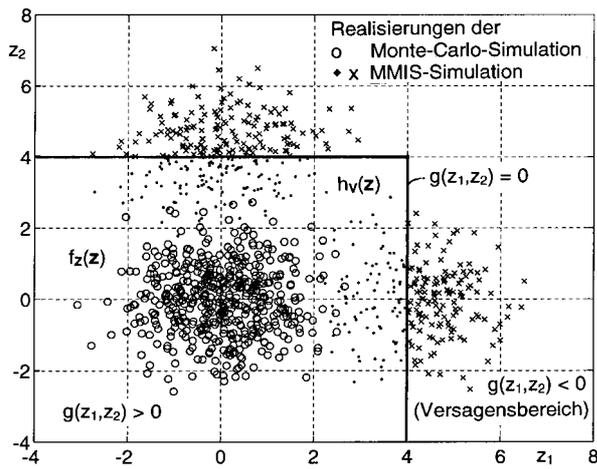
1. Erzeugung von N Realisierungen  $v_i$  gemäß der multimodalen Sampling-Dichte  $h_m$  (d.h. zufälliger Bemessungspunkt  $j$  nach der diskreten Verteilung  
 $(p_k) = (P_{f,k} / E_{j=1:nb} P_{f,j})_{k=1,\dots,nb}$   
und anschließende Erzeugung von  $v_i$  gemäß Verteilung  $h_{v,j}$ ) [3]
2. Bestimmung der gesuchten Versagenswahrscheinlichkeit  $P_{f,MMIS}$ :  
$$P_{f,MMIS} = 1/N * E_{i=1:N} \Pi_{Df}(v_i) * f_Z(v_i) / h_{v,m}(v_i)$$

## 6. Beispiele

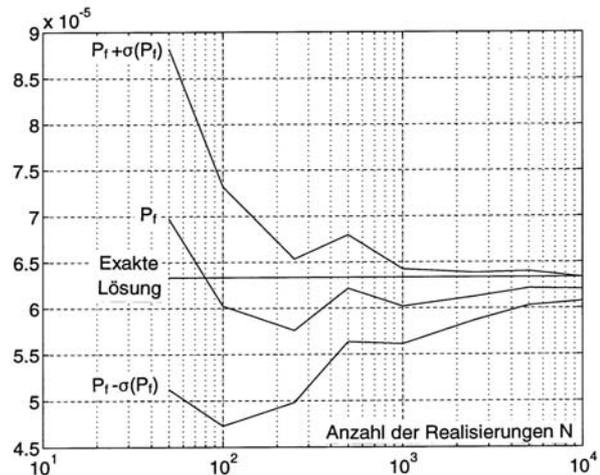
### 6.1 Zweidimensionale stückweise lineare GZG

Das zweidimensionale Problem aus [1], das einen für das gegebene mechanische Problem typischen Versagensbereich besitzt [5], wird zum Vergleich bezüglich der Effektivität des Verfahrens benutzt. Die Originaldichte ist eine zweidimensionale standardisierte Normalverteilung. Der Versagensbereich ist  $D_f = \{z \mid 4-z_1 < 0 \wedge 4-z_2 < 0\}$ . Es wurde eine Grenzzustandsfunktion  $G(z_1, z_2) = (z_1-4)*(z_2-4) + (4-z_1)*\text{abs}(4-z_2) + (4-z_2)*\text{abs}(4-z_1)$  konstruiert, die diesen Versagensbereich beschreibt.

In der 1. Stufe des Algorithmus werden die beiden wesentlichen Bemessungspunkte  $P_1 = (4,0)$  und  $P_2 = (0,4)$  mit den zugehörigen Betawerten  $\beta_1 = \beta_2 = 4$  und Wahrscheinlichkeiten  $P_{f,1} = P_{f,2} = 3.1671 * 10^{-5}$  bestimmt. Die Wichtung der Bemessungspunkte beträgt damit  $p_1 = p_2 = 0.5$ . Die beiden Dichten  $h_{v,1}$  und  $h_{v,2}$  sind dann Normalverteilungen in den Samplingzentren  $Z_{z,1} = (4.2256, 0)$  und  $Z_{z,2} = (0, 4.2256)$  mit Einheitsstreuungen. Die Situation mit je 500 Realisierungen der Monte-Carlo-Methode und der MMIS-Methode sind in Abb.1 dargestellt. Abb.2 zeigt Ergebnisse von MMIS-Simulationen abhängig von der Simulationsanzahl N.



**Abb.1:** Grenzzustandsgleichung und 500 Realisierungen der Originaldichte  $f_z(\mathbf{z})$  sowie der bimodalen Sample-Dichte  $h_v(\mathbf{z})$

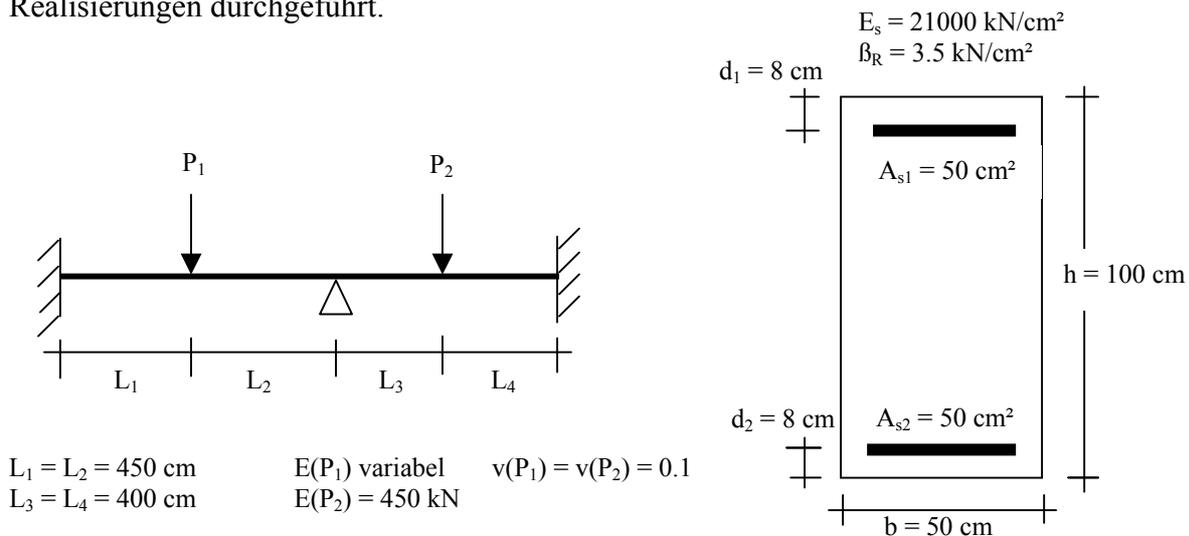


**Abb.2:** Versagenswahrscheinlichkeit  $P_f$  und 1- $\Phi$ -Grenzen von  $P_f$  für MMIS-Simulationen in Abhängigkeit von der Anzahl der Realisierungen

Es zeigt sich, daß schon ab etwa 100 Realisierungen relativ gute Ergebnisse erzielt werden. Allerdings muß eine zähe Konvergenz des Ergebnisses festgestellt werden. Mit den Ergebnissen des Adaptive Sampling in [1] verglichen ist etwa gleiche Güte festzustellen.

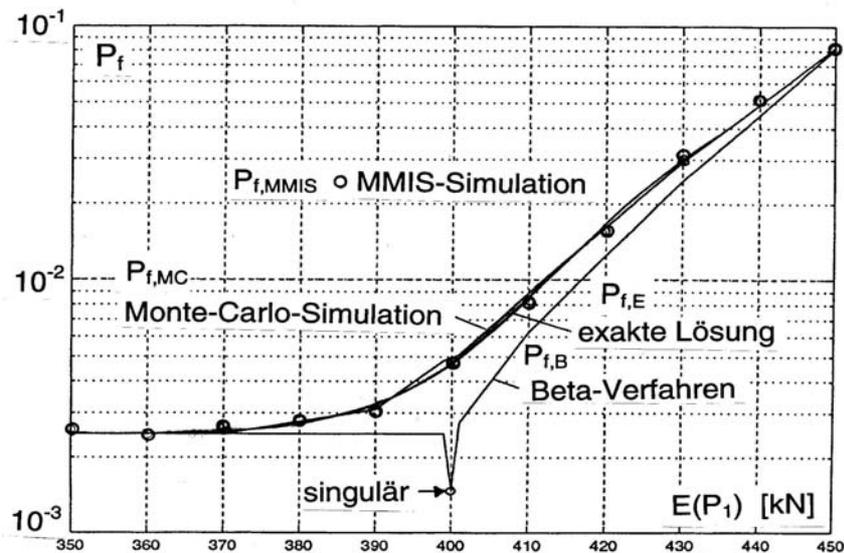
## 6.2 Durchlaufträger

Die Effektivität des Verfahrens wird anhand des Beispiels aus [5] gezeigt. Gegeben ist der Durchlaufträger aus Stahlbeton (Abb.3) mit unabhängig normalverteilten Lasten. Die Wahrscheinlichkeit  $P_f$  (Maß für die Systemsicherheit) ist  $P_f = P\{ p(\mathbf{d}, \mathbf{Z}) - p_0 < 0 \}$  mit der Lastintensität  $p_0$ . Es wurde für die Lastintensität  $p_0=3$  in Abhängigkeit vom Erwartungswert  $E(P_1)$  der ersten Last (zweite Last unverändert) jeweils eine MMIS-Simulation mit 500 Realisierungen durchgeführt.



**Abb. 3:** System, Lasten, Querschnitts- und Materialkennwerte des Durchlaufträgers

Der Vergleich der MMIS-Ergebnisse für 500 Realisierungen mit den exakten Werten und den in [7] erzielten Ergebnissen für eine Monte-Carlo-Simulation und das Betaverfahren (Abb. 4) zeigt, daß mit dieser geringen Versuchsanzahl sehr gute Ergebnisse erzielt wurden.



**Abb.4:** Versagenswahrscheinlichkeit  $P_f$  in Abhängigkeit von der mittleren Last  $E(P_1)$  – exakt und ermittelt durch Monte-Carlo- bzw. MMIS-Simulation bzw. Betaverfahren

## 7. Schlußfolgerungen

Das Verfahren ist eine Ergänzung der vielfältig angebotenen Vorgehensweisen nach der Importance-Sampling-Methode. Es liefert gute Ergebnisse mit vertretbarem Aufwand. Das Verfahren sucht und berücksichtigt die wesentlichen Versagensbereiche des Problems. Dies geschieht durch Koppelung bekannter Verfahren und geeignete Such- und Iterationsalgorithmen. Genau diese beiden Algorithmen sind wie auch die Wahl der einzelnen Sampling-Dichten noch zu verbessern und Gegenstand weiterer Untersuchungen.

## 8. Literatur

- [ 1] Bucher, C.G.: Adaptive Sampling – An iterative fast Monte-Carlo-Procedure. Structural Safety 5 (1988) 119-126
- [ 2] Hohenbichler, M.; Rackwitz, R.: First-Order Concepts in System Reliability. Structural Safety 1 (1983) 177-188
- [ 3] Melchers, R.E.: Importance Sampling in Structural Systems. Structural Safety 6 (1989) 3-10
- [ 4] Melchers, R.E.: Discussion to [ 1]. Structural Safety 6 (1989) 65-66
- [ 5] Müller, K.-H.: Probabilistische Analyse von Stahlbetontragwerken bei physikalisch nichtlinearem Verhalten. 37.DafStb-Forschungskolloquium, Oktober 1999, S.67-73
- [ 6] Raue, E.: Berechnung von Balkentragwerken unter Berücksichtigung von Schnittgrößenumlagerungen. Bauplanung-Bautechnik, 44.Jg., Heft 8, August 1990
- [ 7] Raue, E.; Vaidogas, E.R.; Müller, K.-H.: Bewertung der Grenzlast von elastisch-plastischen Tragwerken mit Hilfe stochastischer Methoden. IKM 1997, Bauhaus-Uni Weimar (auf CD)
- [ 8] Schueller, G.I.; Bucher, C.G.; Bourgund, U.; Ouyornprasert, W.: On efficient computational schemes to calculate structural failure probabilities. Probabilistic Engineering Mechanics, 1989, Vol.4/1, 10-18
- [ 9] Schueller, G.I.; Stix, R.: A critical appraisal of methods to determine failure probabilities. Structural Safety 4 (1987) 293-301
- [10] Zilch, K., Johannis, A.: Wirklichkeitsnahe Materialformulierungen im zuverlässigkeitstheoretischen Kontext. Festschrift G. Mehlhorn, Fachbereich Bauingenieurwesen, Gesamthochschule Kassel, 1997, S. 195-202

**Verfasser:** Dr.-Ing. Karl-Heinz Müller, Bauhaus-Universität Weimar, Fakultät Bauingenieurwesen  
 Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Bereich Industriebau- und Anlagensicherheit  
 D – 99421 Weimar