

Ein stochastisches Modell zur Berechnung von Böeneinwirkungen auf Brückenbauwerke

Dr. Ing. Prosper SCHROEDER, LUXCONSULT consulting engineers, Luxembourg

1. Einführung

Zeitlich veränderliche externe Luftkräfte, welche ein großes Brückenbauwerk auch zu nicht linearen Schwingungen anregen können, resultieren aus atmosphärischen Turbulenzen oder aus Windböen. Letzere haben als Einzelböen impulsartigen Charakter, treten zeitlich regellos auf und sind einer konstanten Windströmung überlagert. Es liegt hier ein dynamisch aeroelastisches Antwortproblem vor, welches vom Flutterproblem als selbsterregte Schwingung unterschieden werden muß.

Böenbelastung auf Brückenbauwerke wurde lange Zeit über ein deterministisches Modell berechnet [1] [2]. Davenport führte dann wahrscheinlichkeitstheoretische Überlegungen ein und erhielt eine Formel für die Berechnung der Systemantwort im Spektralbereich [3]. Diese Lösung ist verschiedenen Einschränkungen unterworfen und führt über die Einführung eines "Böenfaktors" das Antwortproblem auf ein statisches Problem zurück. Die Antwort des Brückenträgers auf Böenbelastungen ist jedoch ein dynamisches Problem und es wird deshalb im Nachfolgenden ein stochastisches dynamisches Modell eingeführt, welches die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens von Windböen als einen Poisson'schen Rauschprozess beschreibt. Die Windböen selbst sind eine Folge von Dirac Impulsen welche den Brückenträger gleichmäßig treffen und im Schwerpunkt angreifen.

2. Analytische Formulierung der aeroelastischen Bewegungsdifferentialgleichungen

Das Brückentragwerk wird als Biege-Torsionsbalken mit unsymmetrischem I-förmigem Querschnitt abgebildet welcher unter der Windbelastung in y-Richtung sowohl Biegeschwingungen in gleicher Richtung wie auch Torsionsschwingungen ausführt. Die bei dieser Belastung ebenfalls auftretenden Biegeschwingungen in z-Richtung sowie die Längsschwingungen in x-Richtung werden, wegen ihrer Kleinheit vernachlässigt.

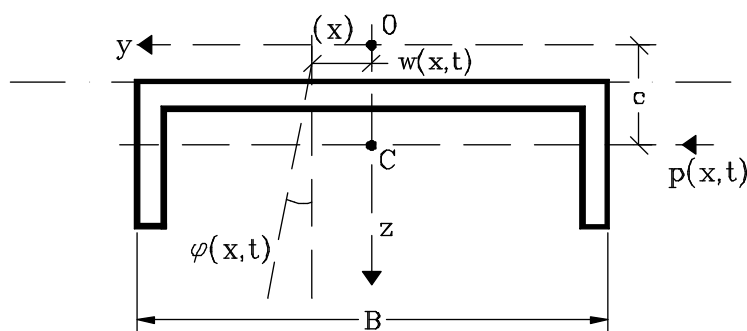


Figure 1

In Fig. 1 gelten die folgenden Bezeichnungen :

C : Schwerpunkt; O : Schubmittelpunkt

J_z : Trägheitsmoment des Querschnittes in Bezug auf die z-Achse

J_o : Torsionsträgheitsmoment; A : Querschnittsfläche

J_w : Wölbwiderstand des Querschnittes

l : Spannweite des betrachteten Balkens
c : Abstand Schubmittelpunkt - Schwerpunkt
B : Profilbreite

Der durch den Schubmittelpunkt verlaufende Belastungsvektor ruft keine Drillung des Querschnittes hervor. Aus diesem Grund wird die x-Achse in die Achse der Schubmittelpunkte gelegt. Unbekannte sind die Verschiebungen $w(x,t)$ und die Drehungen $\varphi(x,t)$ wobei die Verschiebungen als endliche Verformungen angesehen werden.

Mittels des Hamilton'schen Prinzips oder des Lagrangeformalismus werden dann folgende partielle Differentialgleichungen als Bewegungsgleichungen des Biegetorsionsbalkens erhalten [4] :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ_z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + EA \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 - \rho_0 A \ddot{w} + c \ddot{\varphi} \right] = p(x, t) \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ_\omega \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(GJ_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \rho_0 A c \ddot{w} + \rho_0 J_0 \ddot{\varphi} + \rho_0 A c^2 \ddot{\varphi} = m(x, t) \quad (2)$$

Zusätzlich zu den oben angegebenen Bezeichnungen bedeuten :

ρ_0 : die Materialdichte, E : der Elastizitätsmodul, G : der Schubmodul und l : die Spannweite
 $p(x,t)$: Belastung in y-Richtung, $m(x,t)$: Biegemoment um C

Die Randbedingungen lauten allgemein :

$$\begin{aligned} w(0) = w(l) = w_0 & \quad (3) & \varphi(0) = \varphi(l) = \varphi_0 & \quad (4) \\ w''(0) = w''(l) = w''_0 & & \varphi''(0) = \varphi''(l) = \varphi''_0 & \end{aligned}$$

Es wird im folgenden davon ausgegangen daß eine dynamische Analyse des Brückenträgers zur Bestimmung der Eigenfrequenzen, der Eigenschwingungsformen sowie der generalisierten Massen respektive Momente geführt hat.

Die partiellen Differentialgleichungen (1) und (2) werden dann mittels der Ansätze

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \Psi_i(t) W_i(x) \quad (5)$$

$$\varphi(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \Psi_i(t) \Phi_i(x) \quad (6)$$

in ein System totaler Differentialgleichungen überführt. In (5) und (6) bedeuten $W_i(x)$ die Biegeeigenschwingungsformen und $\Phi_i(x)$ die Torsionseigenschwingungsformen. $\Psi_i(t)$ ist das zu bestimmende Funktionssystem im Zeitbereich.

Nach längeren algebraischen Operationen entsteht ein totales Differentialgleichungssystem welches für den Fall der i-ten Eigenform, unter Mitnahme nur eines Gliedes im nichtlinearen Term und Einfügung einer proportionalen Dämpfung lautet :

$$\begin{aligned} & \left[\rho_0 A \Lambda_i + c M_i + \rho_0 A c M_i + \rho_0 (J_0 + A c^2) K_i \right] \ddot{\Psi}_i(t) \\ & + D_i \dot{\Psi}_i(t) + E \beta_i^4 (J_z \Lambda_i + J_\omega K_i - \frac{G J_0}{E \beta_i^4} P_{ii}) \Psi_i(t) \\ & - \sum_{j \neq i} G J_0 P_{ij} \Psi_j(t) + \frac{1}{2} E A N_i \Psi_i^3(t) = \bar{P}_i(x, t) + \bar{M}_i(x, t) \end{aligned} \quad (7)$$

Das so erhaltene Differentialgleichungssystem ist nur im Sonderfall $P_{ij} = 0$ für $i \neq j$ entkoppelt. Folgende Abkürzungen wurden in (7) eingeführt :

$$\Lambda_i = \frac{1}{\beta_i^4} \int_0^l W_i^{IV}(x) W_i(x) dx = \int_0^l W_i(x) W_i(x) dx$$

$$N_i = 3 \int_0^l W_i'^2(x) W_i''(x) W_i(x) dx \quad ; \quad M_i = \int_0^l \Phi_i(x) W_i(x) dx$$

$$K_i = \frac{1}{\beta_i^4} \int_0^l \Phi_i^{IV}(x) \Phi_i(x) dx = \int_0^l \Phi_i(x) \Phi_i(x) dx$$

$$P_{ij} = \int_0^l \Phi_i''(x) \Phi_j(x) dx \quad (8)$$

D_i : Dämpfungskoeffizient

Die äußeren Kräfte und Momente haben die Form :

$$\bar{P}_i(x, t) = \int_0^l W_i(x) P_i(x, t) dt \quad (9)$$

$$\bar{M}_i(x, t) = \int \Phi_i(x) M_i(x, t) dt$$

3. Modellisierung der Windbelastung

Im folgenden werden nur systemunabhängige externe Luftkräfte betrachtet welche in mathematischer Hinsicht dadurch gekennzeichnet sind, daß die aeroelastischen Bewegungsdifferentialgleichungen inhomogener Natur sind und der Bewegungsablauf folglich den Charakter einer erzwungenen, beziehungsweise einer abklingenden Schwingung hat.

Die auf die Längeneinheit bezogenen Luftkräfte sind :

- die seitliche Belastung $p(x,t)$:

$$p(x, t) = \frac{1}{2} \rho U^2 B L(x, t) \quad (1)$$

- das aus dieser Belastung resultierende Torsionsmoment

$$m(x, t) = \frac{1}{2} \rho U^2 B^2 M(x, t) \quad (2)$$

mit ρ : Luftdichte ; U : mittlere Windgeschwindigkeit

L und M sind die dimensionslosen zeitvarianten stochastischen Formen dieser Luftkräfte und lauten bei Vernachlässigung der stationären Anteile für reine Böenwirkung :

$$L = 2C_L \frac{\bar{u}(x, t)}{U} \quad (3)$$

$$M = 2C_M \frac{\bar{u}(x, t)}{U} \quad (4)$$

mit $\bar{u}(x, t)$ als horizontaler Böengeschwindigkeit. Diese wird als gefilterter Poissonprozess oder Poissonscher Rauschprozess modelliert [5].

Der allgemeine Ausdruck für den gefilterten Poissonprozess lautet : [6]

$$x(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} w(t, \tau_n, Y_n) \quad (5)$$

wo $N(t)$ ein Poissonprozess mit mittlerer Intensität λ darstellt. τ_n ist die Ankunftszeit des n-ten Ereignisses; Y_n ist eine Sequenz von unabhängigen und gleichverteilten Zufallsvariablen welche ebenfalls unabhängig von $N(t)$ sind. Schließlich ist $w(\tau_n, Y_n)$ eine Einflußfunktion mit der Eigenschaft

$$w(t, \tau_n, Y_n) = 0 \quad \text{für } \tau_n > t \quad (6)$$

Im folgenden wird für (5) die Form verwendet :

$$\bar{u}(x, t) \equiv \bar{u}(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} Y_n \delta(t - t_n) \quad (7)$$

Die durch (7) dargestellte Funktion ist eine Folge von Dirac-Impulsen welche zu Poisson verteilten Zeitpunkten eintreffen und den Balken gleichmäßig anblasen. Sie stellt einen delta-korrelierten nicht gauss'schen stationären Prozess dar welcher mittels der Kumulanten in der Form :

$$K_m \left[\bar{u}(t_1), \bar{u}(t_2), \dots, \bar{u}(t_m) \right] = \lambda E[Y^m] \delta(t_2 - t_1) * \delta(t_3 - t_1) \dots \delta(t_m - t_1) \quad (8)$$

$$m = 1 \dots m$$

$$K_{m+p} = 0 \quad p = 1, 2, \dots$$

beschrieben werden kann.

4. Berechnung der Momente des stochastischen Differentialgleichungssystems

Das Differentialgleichungssystem (2.7) kann in folgende Form gebracht werden :

$$\dot{\underline{X}} = \underline{m}(\underline{X}) + [G] d\underline{C}(t) \quad (1)$$

Hier bedeuten:

\underline{X} : ein R-wertiger nicht gauss'scher stochastischer Prozess

$\underline{m}(\underline{X}) \in \mathfrak{R}^n$

$[G]$: eine konstante n x n Matrix

$d\underline{C}(t)$: deltakorrelierter nicht gauss'scher stationärer Prozess welcher durch seine ersten m

Momente bestimmt ist

Die Einführung eines delta-korrelierten Prozesses anstelle des weißen Rauschens als stochastischer Prozess macht eine Verallgemeinerung der Itô'schen Differentialformel notwendig. [7][8]

Für delta korrelierte Prozesse lautet sie

$$dg = \left[\frac{\delta g}{\delta t} + \sum_{i=1}^n m_i \frac{\delta g}{\delta t} \right] dt + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n G_{ik} \frac{\delta g}{\delta X_i} dC$$

$$+ \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n H_{ij} \frac{\delta^2 g}{\delta X_i \delta X_j} dC^2 + \frac{1}{3!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n H_{ijk} \frac{\delta^3 g}{\delta X_i \delta X_j \delta X_k} dC^3$$

$$+ \dots + \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^n H_{i \dots n} \frac{\delta^n g}{\delta X_i \dots \delta X_n} dC^n \quad (2)$$

mit $H_{ij} = [G][G]^T$

$$H_{ijk} = [H_{ij}][G]^T \quad \text{etc} \quad (3)$$

Die Gleichungen zur Berechnung der statistischen Momente werden durch Partikularisierung von (2) mittels :

$$g(\underline{x}, t) = X_1^{s_1}(t) * X_2^{s_2}(t) \dots * X_n^{s_n}(t) \quad s_i \geq 0 ; \quad i = 1 \dots n \quad (4)$$

gewonnen mit anschließender Bildung des Erwartungswertes sowie durch Einsetzen von :

$$E[dC^{(n)}] = q^{(n)} \quad (5)$$

Ihre allgemeine Form lautet :

$$\alpha(s_1, s_2, \dots, s_n) = \sum_{i=1}^n m_i * s_i * \alpha(s_1, \dots, s_{i-1}, \dots, s_n)$$

$$+ \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n H_{ij} * s_i * s_j * \alpha(s_1, \dots, s_{i-1}, \dots, s_{j-1}, \dots, s_n) q^{(2)}$$

$$+ \frac{1}{3!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n H_{ijk} * s_i * s_j * s_k * \alpha(s_1 \dots s_{i-1}, \dots, s_{j-1}, \dots, s_{k-1} - 1, \dots, s_n) q^{(3)} + \dots$$

$$+ \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^n (n) \sum_m^n H_{i...m} * s_i * s_j \dots * s_n * \alpha(s_1 \dots s_i - 1, \dots, s_m - 1, \dots, s_n) q^{(n)} \quad (6)$$

mit

$$\alpha(s_1 \dots s_n) = E \{ X_1^{s_1}(t) \dots X_n^{s_n}(t) \} \quad (7)$$

Im hier betrachteten Fall eines nicht linearen Gleichungssystem (1) führen die Differentialgleichungen (6) auf ein unendliches System. Um dieses lösen zu können, muß es zuerst abgeschlossen werden. Dies kann z.B. mittels einer Abschließung n-ter Ordnung der Kumulanten erfolgen (cumulant neglect closure technique) [9].

Nach dieser Theorie wird das Momentendifferentialgleichungssystem (6) abgeschlossen mittels der Hypothese daß Kumulanten größerer als n-ter Ordnung vernachlässigt werden können [10].

Kumulanten werden mittels der charakteristischen Funktion erzeugt :

$$\begin{aligned} \Phi(\underline{X}) = \exp \left\{ j \sum_{s_1=1}^n u_{s_1} k(X_{s_1}) + \frac{j^2}{2!} \sum_{s_1=1}^n \sum_{s_2=1}^n u_{s_1} u_{s_2} k(X_{s_1} X_{s_2}) \right. \\ \left. + \dots + \frac{j^p}{p!} \sum_{s_1=1}^n \dots \sum_{s_p=1}^n u_{s_1} u_{s_2} \dots u_{s_p} k(X_{s_1} X_{s_2} \dots X_{s_p}) \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

mit $j = \sqrt{-1}$ und n als Anzahl der Freiheitsgrade des Differentialgleichungssystem (1). k ist der Kumulantenoperator n-ter Ordnung. Die Verbindung zwischen statistischen Momenten und der charakteristischen Funktion (8) lautet

$$\alpha(s_1, s_2 \dots s_n) = \frac{1}{j^{\sum}} \left[\frac{\partial^{\sum}}{\partial u_1^{s_1} * \partial u_2^{s_2} \dots \partial u_n^{s_n}} \Phi(\underline{X}) \right] \Bigg|_{u=0} \quad (9)$$

mit $\sum = s_1 + s_2 + \dots + s_n$

Wird die Entwicklung von (8) in s-ter Ordnung abgeschlossen, so können Momente höherer Ordnung als s in Funktion von Momenten niedrigerer Ordnung geschrieben werden und in (6) eingeführt werden und damit ist das Differentialgleichungssystem begrenzt und somit lösbar.

Da eingangs die Luftkräfte als stationär eingeführt wurden, interessiert nur der stationäre Anteil von (6) welcher durch ein nichtlineares Gleichungssystem der Form

$$h_1 \begin{bmatrix} \alpha_1 * \alpha_2 * \dots * \alpha_s \\ \sim \quad \sim \quad \dots \quad \sim \\ M \quad M \quad M \end{bmatrix} = 0 \quad (10)$$

$$h_l \begin{bmatrix} \alpha_1 * \alpha_2 * \dots * \alpha_s \\ \sim \quad \sim \quad \dots \quad \sim \end{bmatrix} = 0$$

dargestellt wird.

5. Aufstellung der Momentengleichungen für den Biegetorsionsbalken

Das System der Differentialgleichungen (2.7) kann als Differentialgleichungssystem 2-nter Ordnung abgekürzt für den i-ten Freiheitsgrad in folgender Form geschrieben werden.

$$\begin{Bmatrix} \dot{\Psi}_i \\ \Phi_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{D_i}{A_i} & \frac{C_i}{A_i} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Psi_i \\ \Phi_i \end{Bmatrix} - \frac{\sum_{j=0}^n F_{ij}}{A_i} \begin{Bmatrix} 0 \\ M \\ \Psi_1 \\ M \\ \Psi_n \end{Bmatrix} - \frac{G_i}{A_i} \begin{Bmatrix} 0 \\ \Psi_i^3 \end{Bmatrix} + \frac{1}{A_i} \begin{Bmatrix} 0 \\ P_i + M_i \end{Bmatrix} dC \quad (1)$$

Die Bedeutung der Abkürzungen geht durch Vergleich mit (2.7) eindeutig hervor.

Die allgemeine Form der Momentengleichung lautet nach (4.7) und unter Vernachlässigung, zwecks besserer Übersicht, der Koppelglieder für $i \neq j$ für den stationären Anteil mit $\alpha(p, q) = E\{\psi^p \phi^q\}$

$$\begin{aligned}
 m\alpha(m-1, n+1) + \frac{D_i - F_{ii}}{A_i} * n\alpha(m+1, n-1) + \frac{C_i}{A_i} n\alpha(m, n) - \frac{G_i}{A_i} n\alpha(m+3, n-1) + \\
 \frac{1}{2!} q^{(2)} * \frac{1}{A_i} n(n-1)\alpha(m, n-2) + \frac{1}{3!} q^{(3)} * \frac{1}{A_i} n(n-1)(n-2)\alpha(m, n-3) \\
 + \dots \frac{1}{n!} q^{(n)} * \frac{1}{A_i} n(n-1)(n-2)(n-s+1)\alpha(m, n-s+1) = 0 \quad (2)
 \end{aligned}$$

Der 4^{te} Term dieses Gleichungssystems enthält ein Moment höherer als $m+n$ ^{ter} Ordnung und muß mittels der Kumulantenabschlußtechnik auf Moment ρ gleicher oder kleinerer Ordnung als $m+n$ zurückgeführt werden. Die Momente beliebiger Ordnung für das Differentialgleichungssystem (1) können anstandslos aus (2) abgeleitet werden. Das soll jedoch aus Platzgründen hier nicht geschehen. Es bleibt noch die Zurückführung der statistischen Momente höherer Ordnung auf solche niedrigerer Ordnung auszuführen.

Aus den Formeln (4.8) und (4.9) lassen sich folgende Zusammenhänge zwischen Momenten und Kumulanten ableiten

$$\begin{aligned}
 K_1(X_i) &= E\{X_i\} \quad K_2(X_i, X_j) = E\{X_i, X_j - E\{X_i\}E\{X_j\}\} \\
 K_3(X_i, X_j, X_k) &= E\{X_i X_j X_k\} - \{E\{X_i\}E\{X_j X_k\}\}_s + 2E\{X_i\}E\{X_j\}E\{X_k\} \quad (3)
 \end{aligned}$$

Die allgemeine Formel für den Zusammenhang zwischen den Kumulanten n-ter Ordnung und den Momenten lautet:

$$\begin{aligned}
 K_n(X_i, X_j, \dots, X_n) &= E\{X_i, X_j, \dots, X_n\} - \{K(X_i)K(X_j, \dots, X_n)\}_s \\
 &- \{K(X_i, X_j)K(X_k, \dots, X_n)\}_s - \dots - K_n(X_1)K(X_2) \dots K(X_N) \quad (4)
 \end{aligned}$$

Diese, von Stratonovich angegebene Formel kann mittels Computer Algebra so umgeformt werden daß auf der rechten Seite nur Momente stehen.

In der obigen Darstellung bezeichnet $\{ \}_s$ die symmetrische Operation über alle Argumente.

Die Abschließung erfolgt nun über die Nullsetzung eines Kumulanten beliebiger Ordnung in (3) mit nachfolgender Berechnung des Zusammenhanges der Momente dieser Ordnung mit solchen niedrigerer Ordnung. Das Einsetzen dieser Beziehung in (2) führt dann zum Abschluß der Momentengleichungen und damit zur Bestimmung der stationären Antwort des Differentialgleichungssystems (1).

Literaturverzeichnisse

- [1] Rausch E., Maschinenfundamente und andere dynamische Bauaufgaben, Berlin VDI Verlag 1973.
- [2] Schlaich J., Beitrag zur Frage der Wirkung von Windstößen auf Bauwerke., Der Bauingenieur 41 (1966) pp 102-106.
- [3] Davenport A.G., The application of statistical concepts to the wind loading of structures., Proc. of the Inst. of Civil Engineers (19) 1961, pp 449-472.
- [4] Schroeder P., Stability of a bending-torsional beam subjected to gust-loading modelled by a non-gaussian stochastic process, in J. Rondal, D. Dubina, V. Gioncu (ed) Coupled Instabilities in Metal Structures CIMS1996 Imperial College Press 1996
- [5] Grigoriu M., Applied Nongaussian Process, Prentice Hall PTR 1995.
- [6] Nigam N.C; Narayanan S: Applications of Random Vibrations., Spinger 1994.
- [7] Di Paolo M.; Falson G., Stochastic Dynamics of Non linear Systems driven by Non-normal delta correlated processes, Journal of Appl. Mech. Vol 60 (1993) pp 242-248.
- [8] Di Paolo M., Stochastic Differential Calculus, in Casciati F (ed) Dynamic motion: chaotic and stochastic behaviour. Springer 1993.
- [9] Soong TT, Grigoriu M.; Random Vibration of mechanical and structural systems, Prentice Hall PTR 1993.
- [10] Liu Y.K., Cai G.Q., Probabilistic Structural Dynamics Mc Graw-Hill Inc 1995.