

**Bauhaus-Universität Weimar**

Fakultät Bauingenieurwesen

Professur für angewandte Mathematik

Prof. Dr. rer. nat. habil. Klaus Gürlebeck

### Masterarbeit

Thema: Lösung von Randwertaufgaben der Bruchmechanik mit Hilfe einer approximations-basierten Kopplung zwischen der Finite-Elemente-Methode und Methoden der komplexen Analysis

eingereicht von: Abdulrazzak Hamzah

geb. am: 21.07.1989

in: Tartous, Syrien

Matrikelnummer: 117963

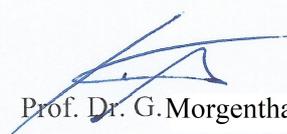
Reg.-Nr.: BIM/2019/11

Erstprüfer: Prof. Dr. rer. nat. habil. Klaus Gürlebeck

Zweitprüfer: Dr. rer. nat. Dmitrii Legatiuk

Ausgabedatum: 06.09.2019

Abgabedatum: 06.01.2020



Prof. Dr. G. Morgenthal

Vorsitzender des Prüfungsausschusses

**Lösung von Randwertaufgaben der  
Bruchmechanik mit Hilfe einer  
approximationsbasierten Kopplung  
zwischen der Finite-Elemente-Methode und  
Methoden der komplexen Analysis**

Abdulrazzak Hamzah

6. Januar 2020

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einleitung und Zielstellung der Masterarbeit</b> . . . . .	<b>1</b>
<b>2 Theoretische Grundlagen</b> . . . . .	<b>3</b>
2.1 Grundlagen der mathematischen Elastizitätstheorie . . . . .	3
2.1.1 Spannungen und äußere Kräfte . . . . .	3
2.1.2 Verformungen und Verzerrungen . . . . .	5
2.1.3 Konstitutive Beziehungen . . . . .	6
2.2 Die analytische Lösung für das Rissspitzennahfeld anhand Methoden der komplexen Analysis . . . . .	7
2.3 Grundlagen der Finite-Elemente-Methode . . . . .	9
2.4 Abtasttheorem (sampling theorem) . . . . .	15
<b>3 Interpolationsbasierte Kopplung zwischen der analytischen und numerischen Lösung</b>	<b>17</b>
3.1 Untersuchung von der Interpolationsmatrix . . . . .	19
3.1.1 Untersuchung der Interpolationsmatrix bezüglich Konditionszahl, Determinante und Interpolationsknoten . . . . .	20
3.1.2 Interpolieren von Funktionen anhand des Interpolations-Operators . . . . .	25
3.2 Zusammenfassung und Beurteilung der Ergebnisse . . . . .	26
<b>4 Approximationsbasierte Kopplung zwischen der analytischen und numerischen Lösung</b>	<b>28</b>
4.1 Untersuchung der Gramschen Matrix für die approximationsbasierte Kopplung auf den Intervallen $[-\pi, \pi]$ und $[-2\pi, 2\pi]$ ; Herstellung von Bezügen zu bekannten Er- gebnissen in der Frameanalysis . . . . .	29
4.2 Orthogonalisierung des eingeführten Basissystems . . . . .	32
4.3 Zusammenfassung und Beurteilung der Ergebnisse . . . . .	33
<b>5 Mathematische Formulierung und Realisierung der approximationsbasierten gekoppelten Methode</b>	<b>34</b>
5.1 Formfunktionen des analytischen Gebiets . . . . .	36
5.2 Formfunktionen der Kopplungselemente . . . . .	40
5.3 Algorithmus zur Lösung des approximationsbasierten Kopplungsproblems . . . . .	43
5.4 Nummerierung der Systemknoten . . . . .	43
<b>6 Numerische Simulationen mit der entwickelten Methode</b> . . . . .	<b>45</b>
6.0.1 Stetigkeit der Verformungen auf dem Interface $\Gamma_{AD}$ . . . . .	46
6.0.2 Vergleich der Verformungen zwischen der Methode der approximationsbasier- ten Kopplung und der Methode der interpolationsbasierten Kopplung auf $\Gamma_{AD}$ . . . . .	46

6.0.3 Spannungen auf dem analytischen Gebiet $\Omega_{AD}$ . . . . .	47
6.1 Spannungen bei den Kopplungselementen . . . . .	48
6.1.1 Spannungsverteilung in der untersuchten Scheibe . . . . .	48
<b>7 Auswertungen, Zusammenfassung und Ausblick . . . . .</b>	<b>50</b>
<b>Abbildungsverzeichnis . . . . .</b>	<b>52</b>
<b>Tabellenverzeichnis . . . . .</b>	<b>54</b>
<b>Literatur . . . . .</b>	<b>55</b>

# 1 Einleitung und Zielstellung der Masterarbeit

Bei Herstellung und Bearbeitungsprozessen von den Bauteilen und Konstruktionen, wie z.B. Brücken, Schiffen, Luft- oder Raumfahrzeugen, können häufig kleine Fehlstellen und Risse entstehen, die sich unter den Betriebsbelastungen weiter ausbreiten können. Wenn diese Risse eine kritische Größe erreichen, breiten sie sich instabil mit großer Geschwindigkeit aus, was zu Schäden bzw. Versagen des Bauteiles führen kann.

In diesem Fall kann sorgfältige Berechnung und Bemessung des Bauteiles allein nach der klassischen Festigkeitslehre und der technischen Mechanik unsicher sein. Zur Gewährleistung einer ausreichenden Sicherheit ist es hier notwendig, Bauteile unter Berücksichtigung bruchmechanischer Aspekte auszulegen.

Zur einfachen Beurteilung und Bewertung von Rissen kommen Tabellenwerken und Handbücher, die auf der Basis von analytischen [1], [2] und numerischen Lösungen verschiedener Randwertprobleme mit Rissen hergeleitet wurden, für verschiedene Rissgeometrien und Belastungsfälle zum Einsatz.

Zur Untersuchung von komplexen Bauteilgeometrien oder Risswachstum ist aber diese Vorgehensweise unanwendbar. Dafür bietet die Methode der finiten Elemente eine effiziente und flexible Möglichkeit [3], die aber bei Betrachtung von Problemen mit Singularitäten besondere Adaptionen erfordert, um Konvergenz und das bevorzugte Genauigkeitsniveau zu erfüllen. Bei mesh-basierten Methoden bedeutet das eine erhebliche FE-Netzverfeinerung im Bereich nahe der Singularität und größerer Zeitaufwand.

Im Gegensatz dazu ermöglichen die analytischen Methoden es, die exakte Lösung der Differentialgleichung mit Singularität zu bestimmen. Diese Methoden sind aber auf kanonische Geometrietypen, wie z.B. Kreise und Halbraum, beschränkt.

Eine andere Möglichkeit zur Lösung der Aufgaben der Bruchmechanik mit Rissen ist es, die approximiertere Lösung der Finite-Elemente-Methode und die analytische Lösung der Methoden der komplexen Analysis miteinander zu koppeln. In [6] wurde erste gekoppelte Methode vorgestellt und später in [5] weiterentwickelt. Es wurde ein spezielle Element, das einen Riss beinhaltet, konstruiert. Innerhalb des speziellen Elements gilt die analytische Lösung der Differentialgleichung. Dieses Element wurde dann mit normalen finiten Elementen durch Knoten auf dem Interface gekoppelt. Der Hauptnachteil dieser Methode war die Unstetigkeit zwischen den beiden Lösungen, weil die Lösung zwischen zwei Knoten auf dem Interface als stückweise lineare bzw. stückweise quadratische Funktionen angenommen wurde.

In [4] wurde eine neue gekoppelte Methode entwickelt, die die Vorteile von sowohl der Methode der finiten Elemente, als auch der Methode der komplexen Analysis in einem einzigen Verfahren miteinander kombiniert und eine globale Stetigkeit im gesamten Gebiet gewährleistet. In dieser Masterarbeit wird diese Methode weiterentwickelt. Für diesen Zweck wird eine approximationsbasierte Kopplung zwischen der analytischen und numerischen Lösung untersucht. Im Gegensatz zur interpolationsbasierten Kopplung zeigen die approximationsbasierten Methoden, wie z.B. die

Methoden der Frameanalysis sehr gute numerische Eigenschaften, Flexibilität und schnelle Konvergenz.

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in den folgenden Abschnitten. Im Abschnitt 2 werden die theoretischen Grundlagen und Annahmen, die für die weiteren Untersuchungen und Simulationen notwendigen Werkzeuge sind, vorgestellt.

Im Abschnitt 3 wird die numerische Stabilität der in [4] verwendeten Methode untersucht und beurteilt.

Im Abschnitt 4 wird eine alternative approximationsbasierte Kopplung vorgestellt und bezüglich ihrer numerischen Stabilität untersucht. Das für die Approximationsaufgabe nötige Basissystem wird mit Hilfe des Gram-Schmidt Orthogonalisierungsverfahren orthogonalisiert.

Im Abschnitt 5 wird die approximationsbasierte gekoppelte Methode mathematisch formuliert und die Formfunktionen für die FE-Approximation werden konstruiert und ein Algorithmus zur Lösung des approximationsbasierten Kopplungsproblem wird angegeben.

Im Abschnitt 6 werden numerische Simulationen mit der entwickelten Methode durchgeführt und die Ergebnisse werden anschließend mit den Ergebnissen von der interpolationsbasierten gekoppelten Methode verglichen.

Im Abschnitt 7 wird die vorliegende Arbeit zusammengefasst und die wichtigsten Ergebnisse werden erwähnt und Fragestellungen für die künftigen Untersuchungen werden vorgeschlagen.

## 2 Theoretische Grundlagen

Im diesem einführenden Abschnitt werden die theoretischen Grundlagen und Annahmen, die den Ausgangspunkt für die darauf folgenden Untersuchungen und Simulationen darstellen, bereitgestellt. Für die kontinuumsmechanische Betrachtung eines linear elastischen, homogenen (ortsunabhängige Materialeigenschaften), isotropen (richtungsunabhängige Materialeigenschaften) und Riss beinhaltenden Körpers sind vor allem die lineare Elastizitätstheorie [7] sowie die Methoden der komplexen Analysis von größter Bedeutung [4], [7].

### 2.1 Grundlagen der mathematischen Elastizitätstheorie

Ein elastischer Festkörper wird in der Kontinuumsmechanik als materielles Punktkontinuum (ein zusammenhängende Menge materieller Punkte) idealisiert. Ein elastisch deformierbares Kontinuum liegt vor, wenn die Beanspruchungen eine Gestaltsänderungen im Kontinuum aber unter Beibehaltung eines kontinuierlichen Zusammenhanges bewirken und die infolge mechanischer Beanspruchungen entstandenen Deformationen bei Wegnahme der Belastung voll reversibel sind.

Die in der Kontinuumsmechanik betrachteten Größen sind Skalare (Energie, Dichte,...), Vektoren (Verschiebungen, Geschwindigkeit,...) und Tensoren zweiter Ordnung (Verzerrungstensoren, Spannungstensoren,...) und der physikalische Zustand eines Kontinuums lässt sich dabei über folgende Größen beschreiben: Spannungen und äußere Lasten, sowie die Verzerrungen und Verschiebungen. Diese vier Variablen sind im allgemeinen Fall durch drei partielle Differentialgleichungen (Gleichgewichtsbeziehung, kinematische und konstitutive Gleichungen) verknüpft, die als Grundgesetze der linearen Elastizitätstheorie bezeichnet werden.

#### 2.1.1 Spannungen und äußere Kräfte

Auf einem Körper wirkende, äußere Kräfte können in Körper- oder Volumenkräfte und in Oberflächenlasten unterteilt werden. Als Folge der äußeren Krafteinwirkungen entstehen Spannungen im Inneren des sich im Gleichgewichtszustand befindenden Körpers, die mit Hilfe von Schnittbetrachtungen ermittelt werden (Abbildung 2.1)

$$\boldsymbol{\sigma} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}}{\Delta A},$$

wobei  $\Delta \mathbf{f}$  der resultierende Kraftvektor auf dem Flächenelement  $\Delta A$  ist, und  $\boldsymbol{\sigma}$  ist der Spannungsvektor, der von Lage und Orientierung des Flächenelements  $\mathbf{n}$  (Normaleinheitsvektor) abhängt.

Für die Berechnung der Spannungen dient hierbei ein aus dem betrachteten Körper herausgeschnittenes Quaderelement, dessen Seitenflächen parallel zu den Koordinatenebenen sind (Abbildung 2.2).

Der Spannungszustand in einem bestimmten Punkt der Materie wird durch die freigeschnittenen

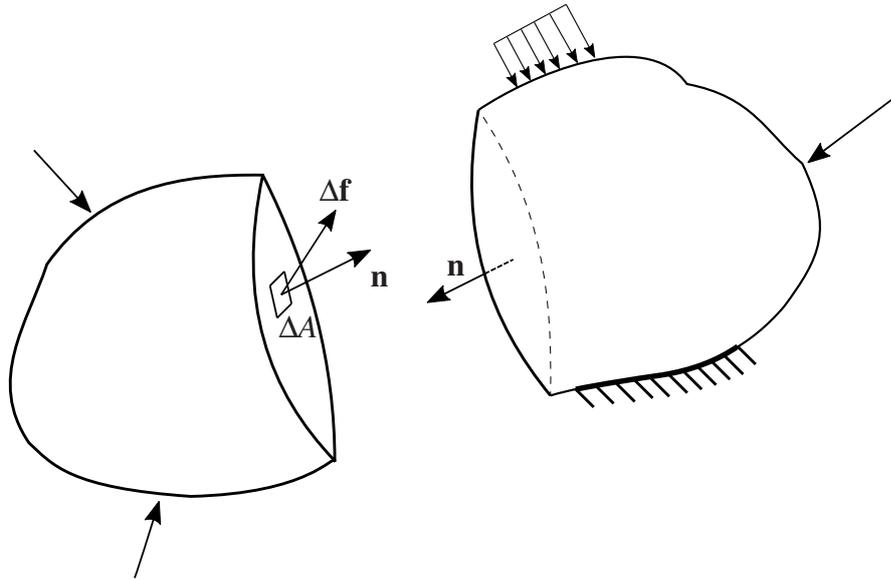


Abbildung 2.1: Beanspruchungen in Inneren eines Körpers und äußere Kräfte.

Spannungskomponenten beschrieben, die der Spannungstensor  $\tilde{\sigma}$  bilden

$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Die äußeren Volumenkräfte  $\rho K$  stehen mit den Spannungen (2.1) im Gleichgewicht stehen, da es vorausgesetzt wird, dass der betrachtete Körper sich im Gleichgewicht befindet. Daraus ergeben sich drei gekoppelte Differentialgleichungen:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + \rho K_1 = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + \rho K_2 = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \rho K_3 = 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

und daneben muss der Spannungstensor symmetrisch sein:

$$\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}^T,$$

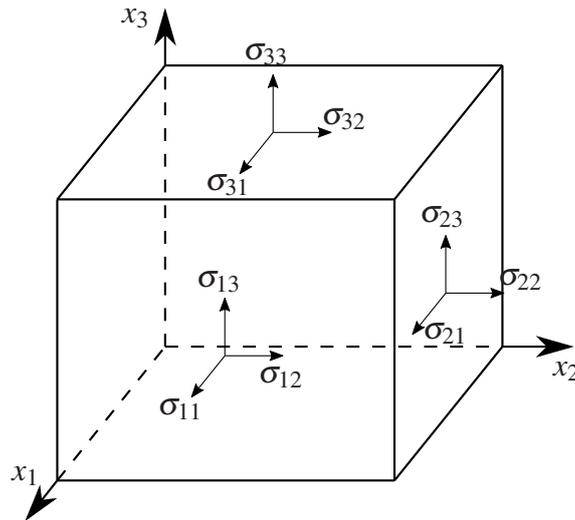


Abbildung 2.2: Spannungskomponenten am herausgeschnittenen Quaderelement.

oder:

$$\sigma_{12} = \sigma_{21}, \quad \sigma_{23} = \sigma_{32}, \quad \sigma_{13} = \sigma_{31}.$$

### 2.1.2 Verformungen und Verzerrungen

Verformung eines Körpers in der Kontinuumsmechanik wird als Änderungen seiner Form infolge äußerer Einwirkungen definiert. Die Verformungen an einem materiellen Punkt können mit Hilfe von Deformationsgradienten und Verzerrungstensoren, die das Verhältnis Momentankonfiguration zur Ausgangskonfiguration darstellen, beschrieben werden. Da bei vielen Anwendungen im technischen Bereich die Dehnungen im Verhältnis zu den Körperabmessungen betragsmäßig sehr klein sind, wird zur Beschreibung kleiner Verzerrungen der linearisierte Verzerrungstensor  $\tilde{\epsilon}$  verwendet [8].

$$\tilde{\epsilon} = \frac{1}{2} [(\nabla \mathbf{u})^T + \nabla \mathbf{u}]$$

wobei  $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ u_3]^T$  der Deformationsvektor ist und  $\nabla \mathbf{u}$  ist Deformationsgradient:

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Daraus folgt:

$$\tilde{\epsilon} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Die Verschiebungen  $u_1, u_2, u_3$  besitzen vorausgesetzt stetige Ableitungen bis zur dritten Ordnung. Daraus folgt, dass die Verzerrungen die Stetigkeits- und Eindeutigkeit erfüllen müssen sowie stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung haben. Aus (2.4) kann festgestellt werden, dass die Verzerrungen anhand bekannter Verformungen eindeutig bestimmt werden können. Um die Umkehrung (d.h. eindeutige Ermittlung der Verformungen anhand bekannter Verzerrungen) gewährleisten zu können, muss die Kompatibilitätsbedingung (Saint-Venantsche Verträglichkeitsbedingung)[7] erfüllt werden:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \gamma_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_1} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{23}}{\partial x_2 \partial x_3}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \gamma_{31}}{\partial x_2} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3 \partial x_1}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{13}}{\partial x_2 \partial x_3}, \quad \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial \gamma_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x_3} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2}. \end{array} \right. \quad (2.5)$$

### 2.1.3 Konstitutive Beziehungen

Da im Rahmen dieser Arbeit auf Betrachtung eines homogenen, linear elastischen und isotropen Körpers beschränkt wird, wird die Anwendbarkeit des verallgemeinerten Hookschen Gesetzes vorausgesetzt, das den linearen Zusammenhang zwischen den Spannungen und den daraus resultierenden Verzerrungen beschreibt. Das Hooksche Gesetz kann durch eine lineare Tensorgleichung ausgedrückt werden:

$$\tilde{\sigma} = \tilde{\tilde{C}} \tilde{\varepsilon}$$

mit dem Elastizitätstensor (Tensor 4. Stufe)  $\tilde{\tilde{C}}$ , der die elastischen Eigenschaften der deformierten Materie kennzeichnet. Im betrachteten Fall kann der Elastizitätstensor als 6x6 Matrix mit 21 unabhängigen elastischen Konstanten vereinfacht werden:

$$C = \frac{E}{1+\nu} \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{2} & 0 \\ \text{Sym.} & & & & & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \text{ bzw.}$$

$$C^{-1} = \frac{E}{1+\nu} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ & & & & 2(1+\nu) & 0 \\ \text{Sym.} & & & & & 2(1+\nu) \end{bmatrix},$$

wobei  $E$  der Elastizitätsmodul (Young's Modulus) ist und  $\nu$  Querdehnzahl ist und beide vom Werkstoff bestimmt sind.

## 2.2 Die analytische Lösung für das Risspitzennahfeld anhand Methoden der komplexen Analysis

Zur Lösung von ebenen Problemen der linearen Elastizitätstheorie sind verschiedene analytische und numerische Methoden verfügbar. Eine ältere und schon etablierte Methode ist die Methode der komplexen Spannungsfunktionen, die von G.W. Kolosov und seinem Schüler N.I. Muskhelishvili entwickelt wurde. Diese Methode stellt ein wertvolles Werkzeug sowohl zur Lösung von Randwertaufgaben der linearen Elastizitätstheorie als auch zur Lösung von Randwertaufgaben der Bruchmechanik dar. Der Ausgangspunkt bei der Konstruktion dieser analytischen Lösung im ebenen Fall sind die so genannten Kolosov-Muskhelishvili Formeln. Dabei lassen sich die Verschiebungen und Spannungen durch zwei holomorphe Funktionen  $\Phi(z)$  und  $\Psi(z)$  der komplexen Veränderlichen  $z = x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}$  ausdrücken.

Kolosov-Muskhelishvili Formeln sind wie folgend gegeben [7]:

$$\begin{aligned} 2\mu(u_1 + i u_2) &= \kappa \Phi(z) - z \overline{\Phi'(z)} - \overline{\Psi(z)}, \\ \sigma_{11} + \sigma_{22} &= 2 \left[ \Phi'(z) + \overline{\Phi'(z)} \right] = 4 \operatorname{Re} [\Phi'(z)], \\ \sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i \sigma_{12} &= 2 \left[ \bar{z} \Phi''(z) + \Psi'(z) \right], \end{aligned} \quad (2.6)$$

hierbei ist  $\kappa$  der Kolosov-Beiwert, der wie folgend definiert ist:

$$\kappa = \begin{cases} 3 - 4\nu & \text{für den ebenen Dehnungszustand,} \\ \frac{3 - \nu}{1 + \nu} & \text{für den ebenen Spannungszustand.} \end{cases}$$

Durch Betrachtung eines begrenzten und einfach zusammenhängenden und einen Riss enthaltenden Gebietes  $\Omega \subset \mathbb{C}$  und mit Hilfe der Kolosov-Muskhelishvili Formeln wurde die analytische Lösung für das Risspitzennahfeld in [4] hergeleitet. Für diesen Zweck wird ein Koordinatensystem, dessen Ursprung der Risspitze entspricht, eingesetzt. Der Riss wird in der negativen Richtung der  $x_1$ -Achse ausgerichtet und die  $x_2$ -Achse ist orthogonal zur Rissrichtung (Abbildung 2.3).

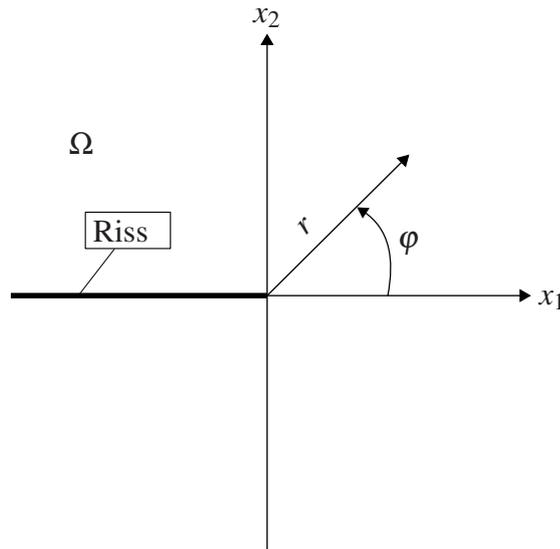


Abbildung 2.3: Rissspitzennahfeld

Die analytische Lösung für das Rissspitzennahfeld für das Polarkoordinatensystem ( $x_1 = r \cos(\varphi)$ ,  $x_2 = r \sin(\varphi)$ ,  $r \geq 0$ ,  $-\pi \leq \varphi < \pi$ ) ist wie folgend gegeben:

$$\begin{aligned}
 2\mu(u_r + i u_\varphi) &= \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} r^{\frac{n}{2}} \left[ a_n \left( \kappa e^{i\varphi(\frac{n}{2}-1)} - e^{-i\varphi(\frac{n}{2}+1)} \right) + \frac{n}{2} \bar{a}_n \left( e^{-i\varphi(\frac{n}{2}+1)} - e^{-i\varphi(\frac{n}{2}-1)} \right) \right] \\
 &\quad \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} r^{\frac{n}{2}} \left[ a_n \left( \kappa e^{i\varphi(\frac{n}{2}-1)} + e^{-i\varphi(\frac{n}{2}+1)} \right) + \frac{n}{2} \bar{a}_n \left( e^{-i\varphi(\frac{n}{2}+1)} - e^{-i\varphi(\frac{n}{2}-1)} \right) \right], \\
 \sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} &= \sum_{n=1}^{\infty} r^{\frac{n}{2}-1} \left( n a_n e^{i\varphi(\frac{n}{2}-1)} + n \bar{a}_n e^{-i\varphi(\frac{n}{2}-1)} \right), \\
 \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} + 2i \sigma_{r\varphi} &= \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} r^{\frac{n}{2}-1} \left[ a_n \left( n \left( \frac{n}{2} - 1 \right) e^{i\varphi(\frac{n}{2}-1)} - n \frac{n}{2} e^{i\varphi(\frac{n}{2}+1)} \right) + n \bar{a}_n e^{i\varphi(\frac{n}{2}+1)} \right] \\
 &\quad \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} r^{\frac{n}{2}-1} \left[ a_n \left( n \left( \frac{n}{2} - 1 \right) e^{i\varphi(\frac{n}{2}-1)} - n \frac{n}{2} e^{i\varphi(\frac{n}{2}+1)} \right) - n \bar{a}_n e^{i\varphi(\frac{n}{2}+1)} \right],
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

oder im kartesischen Koordinatensystem:

$$\begin{aligned}
 2\mu(u_1 + i u_2) &= \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} r^{\frac{n}{2}} \left[ a_n \left( \kappa e^{i\varphi\frac{n}{2}} - e^{-i\varphi\frac{n}{2}} \right) + \frac{n}{2} \bar{a}_n \left( e^{-i\varphi\frac{n}{2}} - e^{-i\varphi(\frac{n}{2}-2)} \right) \right] \\
 &\quad \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} r^{\frac{n}{2}} \left[ a_n \left( \kappa e^{i\varphi\frac{n}{2}} + e^{-i\varphi\frac{n}{2}} \right) + \frac{n}{2} \bar{a}_n \left( e^{-i\varphi\frac{n}{2}} - e^{-i\varphi(\frac{n}{2}-2)} \right) \right], \\
 \sigma_{11} + \sigma_{22} &= \sum_{n=1}^{\infty} r^{\frac{n}{2}-1} \left( n a_n e^{i\varphi(\frac{n}{2}-1)} + n \bar{a}_n e^{-i\varphi(\frac{n}{2}-1)} \right), \tag{2.8} \\
 \sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i \sigma_{12} &= \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} r^{\frac{n}{2}-1} \left[ a_n \left( n \left( \frac{n}{2} - 1 \right) e^{i\varphi(\frac{n}{2}-3)} - n \frac{n}{2} e^{i\varphi(\frac{n}{2}-1)} \right) + n \bar{a}_n e^{i\varphi(\frac{n}{2}-1)} \right] \\
 &\quad \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} r^{\frac{n}{2}-1} \left[ a_n \left( n \left( \frac{n}{2} - 1 \right) e^{i\varphi(\frac{n}{2}-3)} - n \frac{n}{2} e^{i\varphi(\frac{n}{2}-1)} \right) - n \bar{a}_n e^{i\varphi(\frac{n}{2}-1)} \right].
 \end{aligned}$$

### 2.3 Grundlagen der Finite-Elemente-Methode

Die FEM ist für den Berechnungsingenieur inzwischen zu einem unverzichtbaren Auslegungs- und Simulationswerkzeug in nahezu allen Bereichen des Ingenieurwesens geworden. Die Ursachen dafür liegen zum einen in den enormen Leistungssteigerungen auf dem Gebiet der Computertechnik und den Fortschritten, die vor allem in der computerorientierten Mechanik, der numerischen Mathematik sowie der Informatik und Softwareentwicklung erreicht wurden.

Mit der FEM können Probleme aus verschiedenen physikalischen Disziplinen berechnet werden, da es sich grundsätzlich um ein numerisches Verfahren zur Lösung von Differentialgleichungen handelt. Die analytische Lösung einer Differentialgleichung auf einem komplexen Gebiet, die ein Berechnungsproblem beschreibt, ist meist nur für Sonderfälle möglich. Der Grundgedanke der FEM besteht darin, das zu untersuchende Gebiet in eine bestimmte Anzahl einfacher Teilgebiete, die finiten Elemente, zu zerlegen, die sich mit einer endlichen Zahl von Parametern beschreiben lassen. Dieser Prozess wird in der FEM Diskretisierung oder auch Elementierung (vom Ganzen zum Teil) genannt. Die Bezeichnung „finit“ hebt den Unterschied zur analytischen Betrachtung auf infinitesimalen Elementen hervor. Die Ecken der finiten Elemente heißen Knoten. Diese Knoten bilden die diskrete Untermenge für das numerische Verfahren.

Da die Finite-Elemente-Methode ein spezielles Galerkin-Verfahren ist, wird zunächst die Grundidee der Anwendung von Galerkin-Methode auf einem abstrakten Minimierungsproblem, welches nach [] die folgende Form hat:

$$a(u, v) = f(v), \quad u \in U \quad \text{und} \quad \forall v \in U \subset V, \tag{2.9}$$

wobei  $V$  ein Hilbertraum und  $U$  ein Teilraum von  $V$  mit  $(\cdot, \cdot)_V$  den dazugehörigen Skalarprodukten sind.  $a(\cdot, \cdot)$  ist eine Bilinearform auf  $V \times V$  und  $f(\cdot)$  ist eine Linearform auf  $V$ .

Damit das abstrakte Minimierungsproblem genau eine Lösung hat, muss der Teilraum  $U$  konvex

und abgeschlossen sein und die Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  muss stetig, symmetrisch und  $V$ -elliptisch sein. Darüber hinaus muss die Linearform  $f(\cdot)$  stetig sein.

Bei der Galerkin-Methode wird das Problem (2.9) in endlich dimensionalen Teilräumen von  $V$  formuliert. Für jeden endlich dimensionalen Teilraum  $V_h \subset V$  wird eine Näherungslösung  $u_h$  bestimmt. Dann kann das diskrete Problem wie folgend geschrieben werden:

$$a(u_h, v_h) = f(v_h), \quad \forall v_h \in V_h \quad (2.10)$$

Nach [9] hat jedes diskrete Problem von (2.10) genau eine Lösung, welches als diskrete Lösung bezeichnet wird. Wenn die Funktionen  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  eine Menge von Basisfunktionen im Teilraum  $V_h$  sind, dann ist die Funktion

$$u_h^{(n)} = \sum_{k=1}^n a_k^{(n)} \varphi_k$$

eine Lösung des diskreten Problems (2.10) und die Koeffizienten werden durch Orthogonalitätsbedingung bestimmt. Das führt zum folgenden linearen Gleichungssystem:

$$\sum_{k=1}^n a(\varphi_k, \varphi_j) a_k = (f, \varphi_j), \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Die Matrix  $a(\varphi_k, \varphi_j)$  ist immer invertierbar und positiv definit, weil es vorausgesetzt wird, dass die Bilinearform  $V$ -elliptisch ist [10].

Zunächst wird das lineare Gleichungssystem für das Problem der linearen Elastizitätstheorie durch Anwendung von Galerkin-Methode formuliert. Die Grundgleichungen der linearen Elastizitätstheorie (Abschnitt 2.1) können wie folgend zusammengefasst werden:

- Gleichgewichtsgleichungen (Spannungen und äußere Kräfte):

$$-\sum_{j=1}^3 \frac{\sigma_{ij}}{\partial x_j} = f_i, \quad 1 \leq i \leq 3. \quad (2.11)$$

- Konstitutive Beziehungen:

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \left( \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{kk} \right) \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq 3. \quad (2.12)$$

- Verzerrungen-Verformungen Beziehungen:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad 1 \leq i, j \leq 3. \quad (2.13)$$

Mit den folgenden Randbedingungen:

$$\mathbf{u} = 0 \text{ auf } \Gamma_0, \quad \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} n_j = g_i \text{ auf } \Gamma_1, \quad 1 \leq i \leq 3. \quad (2.14)$$

Dabei ist  $\Gamma_0$  der Teil des Randes mit einer Dirichlet-Randbedingung und  $\Gamma_1$  ist der Teil des Randes mit einer Neumann-Randbedingung. Um die Galerkin-Methode anwenden zu können, werden nun diese Gleichungen bezogen auf den Verschiebungen umformuliert und das sich daraus resultierend System wird als Lamé-System benannt. Zuerst werden die Komponenten des Spannungstensors unter Berücksichtigung der Gleichungen (2.12) und (2.13) umformuliert:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= (2\mu + \lambda) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, & \sigma_{12} &= \mu \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), & \sigma_{13} &= \mu \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right), \\ \sigma_{21} &= \mu \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right), & \sigma_{22} &= \lambda \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + (2\mu + \lambda) \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, & \sigma_{23} &= \mu \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right), \\ \sigma_{31} &= \mu \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right), & \sigma_{32} &= \mu \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right), & \sigma_{33} &= \lambda \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + (2\mu + \lambda) \frac{\partial u_3}{\partial x_3}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Anhand dieser Formeln lassen sich die Gleichungen (2.11) wie folgt schreiben:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ (2\mu + \lambda) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \right] &= -f_1, \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \lambda \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + (2\mu + \lambda) \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right] + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \right] &= -f_2, \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[ \lambda \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + (2\mu + \lambda) \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right] &= -f_3. \end{aligned} \right. \quad (2.16)$$

Nun kann die Lamé-Gleichung in den kartesischen Koordinaten wie folgend geschrieben werden:

$$\left\{ \begin{aligned} (2\mu + \lambda) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \lambda \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \lambda \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_1} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} + \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3 \partial x_1} &= -f_1, \\ \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \lambda \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2 \partial x_1} + (2\mu + \lambda) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \lambda \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} + \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} + \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3 \partial x_2} &= -f_2, \\ \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} + \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3} + \lambda \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3 \partial x_1} + \lambda \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3 \partial x_2} + (2\mu + \lambda) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} &= -f_3. \end{aligned} \right. \quad (2.17)$$

Die Neumann-Randbedingung lautet ausführlich in Abhängigkeit von den Verschiebungen:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ (2\mu + \lambda) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right] n_1 + \left[ \mu \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \right] n_2 + \left[ \mu \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \right] n_3 = g_1, \\ \left[ \mu \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \right] n_1 + \left[ \lambda \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + (2\mu + \lambda) \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right] n_2 + \left[ \mu \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \right] n_3 = g_2, \\ \left[ \mu \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) \right] n_1 + \left[ \mu \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \right] n_2 + \left[ \lambda \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + (2\mu + \lambda) \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right] n_3 = g_3. \end{array} \right. \quad (2.18)$$

Nun können die Gleichungen (2.17) mit der Testfunktion multipliziert und über das Gebiet  $\Omega$  integriert werden:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \left[ (2\mu + \lambda) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \lambda \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \lambda \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_1} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} + \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3 \partial x_1} \right] v_1 d\Omega = - \int_{\Omega} f_1 v_1 d\Omega, \\ \int_{\Omega} \left[ \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \lambda \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2 \partial x_1} + (2\mu + \lambda) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \lambda \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} + \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} + \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3 \partial x_2} \right] v_2 d\Omega = - \int_{\Omega} f_2 v_2 d\Omega, \\ \int_{\Omega} \left[ \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} + \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3} + \lambda \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3 \partial x_1} + \lambda \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3 \partial x_2} + (2\mu + \lambda) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \right] v_3 d\Omega = - \int_{\Omega} f_3 v_3 d\Omega. \end{array} \right. \quad (2.19)$$

Mithilfe der Green'schen Formel:

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v d\Omega + \int_{\Gamma} u v n_i d\gamma, \quad (2.20)$$

oder

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v d\Omega = \int_{\Gamma} u v n_i d\gamma - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} v d\Omega, \quad (2.21)$$

können die Integrale (2.19) unter Berücksichtigung der Randbedingungen berechnet werden:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \left[ (2\mu + \lambda) \frac{\partial u_1 \partial v_1}{\partial x_1 \partial x_1} + \lambda \frac{\partial u_2 \partial v_1}{\partial x_2 \partial x_1} + \lambda \frac{\partial u_3 \partial v_1}{\partial x_3 \partial x_1} + \mu \frac{\partial u_1 \partial v_1}{\partial x_2 \partial x_2} + \mu \frac{\partial u_2 \partial v_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \mu \frac{\partial u_1 \partial v_1}{\partial x_3 \partial x_3} + \mu \frac{\partial u_3 \partial v_1}{\partial x_1 \partial x_3} \right] d\Omega = \\ \quad = \int_{\Omega} f_1 v_1 d\Omega + \int_{\Gamma} g_1 v_1 d\gamma, \\ \int_{\Omega} \left[ \mu \frac{\partial u_2 \partial v_2}{\partial x_1 \partial x_1} + \mu \frac{\partial u_1 \partial v_2}{\partial x_2 \partial x_1} + \lambda \frac{\partial u_1 \partial v_2}{\partial x_1 \partial x_2} + (2\mu + \lambda) \frac{\partial u_2 \partial v_2}{\partial x_2 \partial x_2} + \lambda \frac{\partial u_3 \partial v_2}{\partial x_3 \partial x_2} + \mu \frac{\partial u_2 \partial v_2}{\partial x_3 \partial x_3} + \mu \frac{\partial u_3 \partial v_2}{\partial x_2 \partial x_3} \right] d\Omega = \\ \quad = \int_{\Omega} f_2 v_2 d\Omega + \int_{\Gamma} g_2 v_2 d\gamma, \\ \int_{\Omega} \left[ \mu \frac{\partial u_3 \partial v_3}{\partial x_1 \partial x_1} + \mu \frac{\partial u_1 \partial v_3}{\partial x_3 \partial x_1} + \mu \frac{\partial u_3 \partial v_3}{\partial x_2 \partial x_2} + \mu \frac{\partial u_2 \partial v_3}{\partial x_3 \partial x_2} + \lambda \frac{\partial u_1 \partial v_3}{\partial x_1 \partial x_3} + \lambda \frac{\partial u_2 \partial v_3}{\partial x_2 \partial x_3} + (2\mu + \lambda) \frac{\partial u_3 \partial v_3}{\partial x_3 \partial x_3} \right] d\Omega = \\ \quad = \int_{\Omega} f_3 v_3 d\Omega + \int_{\Gamma} g_3 v_3 d\gamma. \end{array} \right.$$

Bei einer zweidimensionalen Betrachtung und ohne Berücksichtigung von den Volumenkräften

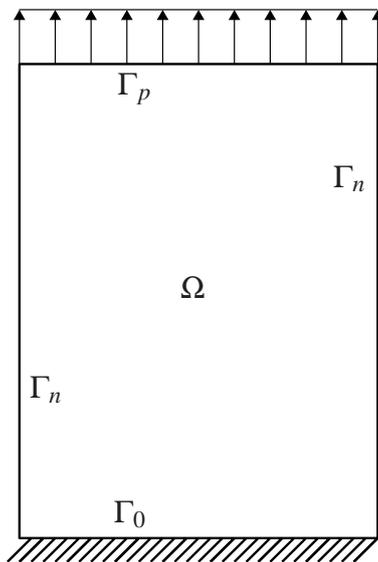
lässt sich das Gleichungssystem wie folgt schreiben:

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \left[ (2\mu + \lambda) \frac{\partial u_1 \partial v_1}{\partial x_1 \partial x_1} + \lambda \frac{\partial u_2 \partial v_1}{\partial x_2 \partial x_1} + \mu \frac{\partial u_1 \partial v_1}{\partial x_2 \partial x_2} + \mu \frac{\partial u_2 \partial v_1}{\partial x_1 \partial x_2} \right] d\Omega = \int_{\Gamma} g_1 v_1 d\gamma, \\ \int_{\Omega} \left[ \mu \frac{\partial u_2 \partial v_2}{\partial x_1 \partial x_1} + \mu \frac{\partial u_1 \partial v_2}{\partial x_2 \partial x_1} + \lambda \frac{\partial u_1 \partial v_2}{\partial x_1 \partial x_2} + (2\mu + \lambda) \frac{\partial u_2 \partial v_2}{\partial x_2 \partial x_2} \right] d\Omega = \int_{\Gamma} g_2 v_2 d\gamma. \end{cases} \quad (2.22)$$

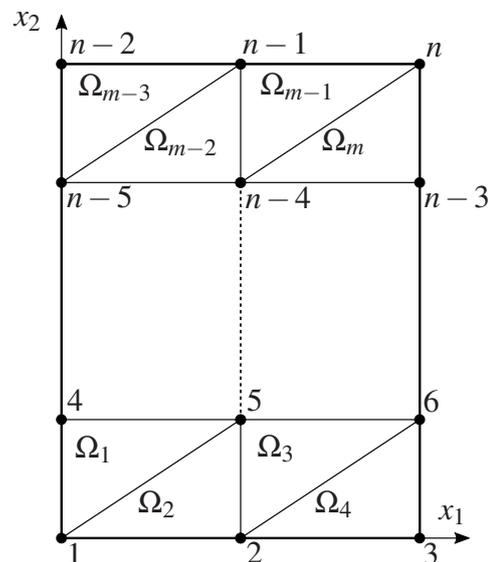
Das Gleichungssystem (2.22) stellt die allgemeine Form von der Galerkin-Methode dar. Dabei werden die Verschiebung  $(u_1, u_2)$  durch eine Reihenentwicklung approximiert:

$$\begin{aligned} u_1 &= \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k, \\ u_2 &= \sum_{k=1}^n b_k \varphi_k. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Die Basisfunktionen können im allgemeinen Fall sowohl für die Approximation von Verschiebungen als auch für die Testfunktionen frei ausgewählt werden. In der Regel werden dieselbe Basisfunktionen für die Testfunktionen angesetzt, d.h.  $v_1 = \varphi_j, v_2 = \varphi_j, j = 1, \dots, n, v_i \in W^{1,2}(\Omega)$  und  $v_i = 0$  auf  $\Gamma_0$ . Um das lineare Gleichungssystem nach der Galerkin-Methode aufzustellen, wird nun das Gesamtgebiet  $\Omega$  in Menge von sich nicht überschneidenden Teilgebieten, d.h.  $\Omega = \bigcup_{i=1}^m \Omega_i$  mit den Randbedingungen  $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_p \cup \Gamma_n$ .



(a) Das statische Modell



(b) FE-Triangulierung vom  $\Omega$

Abbildung 2.4: Unterteilung vom Gebiet  $\Omega$  in Teilgebiete.

Die Triangulierung vom Gesamtgebiet  $\Omega$  in Teilgebiete wird in Abbildung 2.4 dargestellt, wobei

jeder Knoten zwei Freiheitsgrade hat.

Das Gleichungssystem (2.22) kann dann umgeschrieben werden:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^n \int_{\Omega} \left[ a_k (2\mu + \lambda) \frac{\partial \varphi_k \partial \varphi_j}{\partial x_1 \partial x_1} + b_k \lambda \frac{\partial \varphi_k \partial \varphi_j}{\partial x_2 \partial x_1} + a_k \mu \frac{\partial \varphi_k \partial \varphi_j}{\partial x_2 \partial x_2} + b_k \mu \frac{\partial \varphi_k \partial \varphi_j}{\partial x_1 \partial x_2} \right] d\Omega = \int_{\Gamma} g_1 \varphi_j d\gamma, \quad j = 1, \dots, n \\ \sum_{k=1}^n \int_{\Omega} \left[ b_k \mu \frac{\partial \varphi_k \partial \varphi_j}{\partial x_1 \partial x_1} + a_k \mu \frac{\partial \varphi_k \partial \varphi_j}{\partial x_2 \partial x_1} + a_k \lambda \frac{\partial \varphi_k \partial \varphi_j}{\partial x_1 \partial x_2} + b_k (2\mu + \lambda) \frac{\partial \varphi_k \partial \varphi_j}{\partial x_2 \partial x_2} \right] d\Omega = \int_{\Gamma} g_2 \varphi_j d\gamma. \quad j = 1, \dots, n \end{array} \right.$$

Die Integrale über dem Gesamtgebiet  $\Omega$  können als Summe von den Integralen über den Teilgebieten umgeschrieben werden:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \int_{\Omega_i} \left[ a_k (2\mu + \lambda) \frac{\partial \varphi_k \partial \varphi_j}{\partial x_1 \partial x_1} + b_k \lambda \frac{\partial \varphi_k \partial \varphi_j}{\partial x_2 \partial x_1} + a_k \mu \frac{\partial \varphi_k \partial \varphi_j}{\partial x_2 \partial x_2} + b_k \mu \frac{\partial \varphi_k \partial \varphi_j}{\partial x_1 \partial x_2} \right] d\Omega_i = \\ \quad = \sum_{i=1}^m \int_{\Gamma_i} g_1 \varphi_j d\gamma, \quad j = 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \int_{\Omega_i} \left[ b_k \mu \frac{\partial \varphi_k \partial \varphi_j}{\partial x_1 \partial x_1} + a_k \mu \frac{\partial \varphi_k \partial \varphi_j}{\partial x_2 \partial x_1} + a_k \lambda \frac{\partial \varphi_k \partial \varphi_j}{\partial x_1 \partial x_2} + b_k (2\mu + \lambda) \frac{\partial \varphi_k \partial \varphi_j}{\partial x_2 \partial x_2} \right] d\Omega_i = \\ \quad = \sum_{i=1}^m \int_{\Gamma_i} g_2 \varphi_j d\gamma, \quad j = 1, \dots, n, \end{array} \right.$$

wobei  $\Gamma_i$  Teilränder für jedes Teilgebiet sind. Wenn das Teilgebiet nicht zum Rand gehört, ist das Integral über  $\Gamma_i$  gleich Null. Die Formfunktionen für ein Dreieckselement kann mit einem linearen

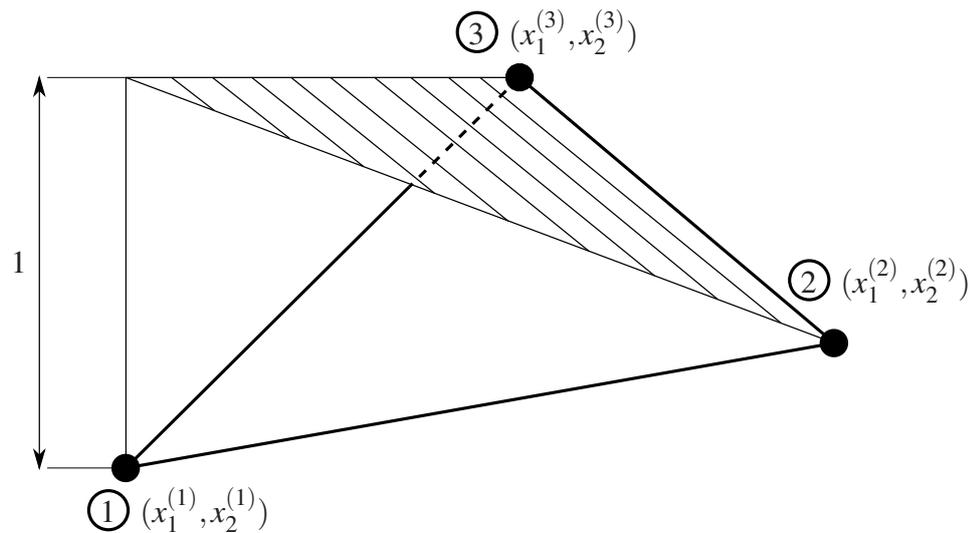


Abbildung 2.5: Formfunktion  $N_1$  für ein Dreieckselement

Ansatz verwendet werden [11]:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{2A_e} \left[ (x_2^{(2)} - x_2^{(3)})(x_1 - x_1^{(2)}) + (x_1^{(3)} - x_1^{(2)})(x_2 - x_2^{(2)}) \right], \\
 N_2 &= \frac{1}{2A_e} \left[ (x_2^{(3)} - x_2^{(1)})(x_1 - x_1^{(3)}) + (x_1^{(1)} - x_1^{(3)})(x_2 - x_2^{(3)}) \right] \\
 N_3 &= \frac{1}{2A_e} \left[ (x_2^{(1)} - x_2^{(2)})(x_1 - x_1^{(1)}) + (x_1^{(2)} - x_1^{(1)})(x_2 - x_2^{(1)}) \right] \\
 A_e &= \frac{1}{2} \left[ (x_1^{(2)}x_2^{(3)} - x_1^{(3)}x_2^{(2)}) + (x_2^{(2)} - x_2^{(3)})x_1^{(1)} + (x_1^{(3)} - x_1^{(2)})x_2^{(1)} \right]
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

Längs der Dreieckseiten sind die Verschiebungen  $u_1(x_1, x_2)$  und  $u_2(x_1, x_2)$  lineare Funktionen. Damit stimmen aufgrund der Verschiebungscompatibilitäten an den Knoten auch die Verschiebungen längs gemeinsamer Elementkanten überein, womit die geforderte  $C^0$ -Stetigkeit auch längs der Elementkanten gewährleistet ist.

## 2.4 Abtasttheorem (sampling theorem)

Eine wesentliche und mathematische Aufgabe in der Signal- bzw. Bildverarbeitung und Nachrichtentechnik ist es, ein Signal bzw. ein Bild auf der Basis einer Menge von seinen Samples (bzw. Messwerten) wiederherzustellen [12].

Dieses Problem lässt sich in einem Hilbertraum modellieren. Anhand vorhandener Samples bzw. Messwerte:

$$(f, s_j), \quad j \in \mathbb{N},$$

wird die Funktion  $f$  wiederhergestellt, wobei  $\{s_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  ein Sampling-Basissystem ist. Da man in den praktischen Anwendungen nur Zugriff zu endlichen Messwerten hat, werden die Samples wie folgend geschrieben:

$$\{(f, s_j)\}_{j=1}^m, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Unter der Annahme, dass die Funktion  $f$  in einem anderen Basissystem  $\{w_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  „gut“ entwickelt und approximiert werden kann, existieren Koeffizienten  $\alpha_j \in \mathbb{C}$ :

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j w_j \longrightarrow f, \quad \text{wenn } n \longrightarrow \infty.$$

Die Wiederherstellungsaufgabe von  $f$  ist dann die Ermittlung von  $\{\alpha_j\}_{j=1}^n$  die Wiederherstellungssamples unter Ausnutzung der Messwerten  $\{(f, s_j)\}_{j=1}^m$ . Mit der Voraussetzung, dass beide Basissysteme  $\{w_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  und  $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  orthonormal sind und  $m = n$  ist, können die Koeffizienten  $\{\alpha_j\}_{j=1}^m$  durch Lösung des linearen Gleichungssystems bestimmt werden:

$$U_m x = y_m, \quad y_m = \{(f, s_1), \dots, (f, s_m)\},$$

wobei:

$$U_m = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{m1} & \cdots & u_{mm} \end{pmatrix}, \quad u_{ij} = (w_j, s_i).$$

Die wiederhergestellte Funktion  $\tilde{f}$  ist dann  $\tilde{f} = \sum_{k=1}^m x_k w_k$ . Werden die numerischen Ungenauigkeiten bei der Lösung dieses linearen Gleichungssystems vernachlässigt, entspricht die Lösung  $x$  der Koeffizienten  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ . Der Ansatz wird als konsistente Wiederherstellungstechnik benannt, da die wiederhergestellte Funktion  $\tilde{f}$  die folgende Konsistenzbedingung erfüllen [13] muss:

$$(\tilde{f}, s_k) = (f, s_k).$$

Mit diesem Ansatz können endlich dimensionale Probleme mit der Voraussetzung  $m = n$  behandelt werden.

### 3 Interpolationsbasierte Kopplung zwischen der analytischen und numerischen Lösung

Eine neue Methode zur Kopplung zwischen der FEM und Methoden der komplexen Analysis wurde in den vorherigen Untersuchungen [4], [14] und [15] vorgestellt.

Das Hauptziel dieser Untersuchungen war es, eine globale Stetigkeit entlang des Interfaces zwischen den beiden Lösungen zu erhalten. Für diesen Zweck wird  $\Omega$  das beschränkte und einfach zusammenhängende und einen Riss enthaltende Gebiet in  $T$  dreieckige finite Elemente und  $\Omega_{SE}$  das spezielle Element zerlegt (Abbildung 3.1).

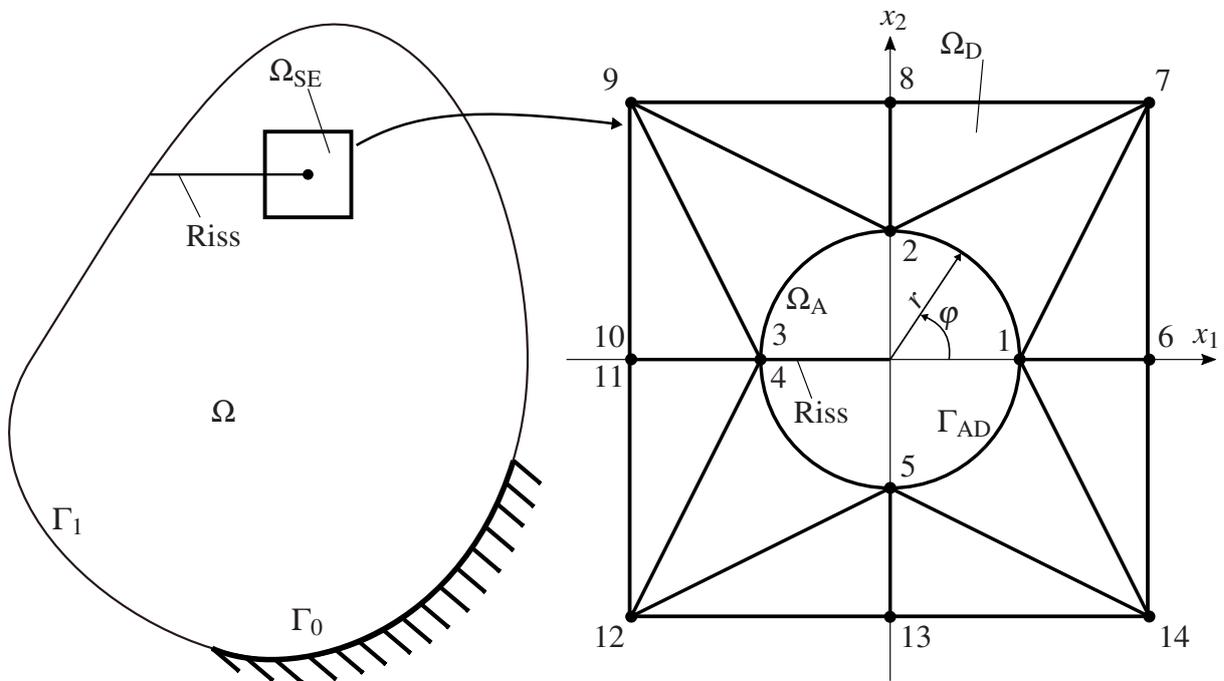


Abbildung 3.1: Gebietszerlegung und das spezielle Element

Das Gebiet  $\Omega_{SE}$  besteht aus zwei Unterbereichen  $\Omega_A$  und  $\Omega_D$ , die durch ein Interface mit fiktiven Knoten getrennt werden  $\Gamma_{AD} = \overline{\Omega_A} \cap \overline{\Omega_D}$ .

Das Teilgebiet  $\Omega_A$  wird als analytisch bezeichnet, da die Lösung in  $\Omega_A$  der exakten Lösung der Differentialgleichung entspricht. Die Lösung in  $\Omega_D$  basiert hingegen auf der Finite-Elemente-Approximation.

Durch die Kopplung zwischen der starken Lösung in  $\Omega_A$  und der schwachen Lösung in  $\Omega_D$  wird  $C^0$  Stetigkeit der Lösung über das Interface  $\Gamma_{AD}$  mithilfe eines geeigneten Interpolationsoperators

gewährleistet. In anderen Wörtern muss das Interpolationsproblem immer eindeutig lösbar sein und der Interpolationsoperator muss die analytische Lösung auf  $\Gamma_{AD}$  ergeben.

Um diese Anforderungen zu erfüllen, kommt eine Interpolationsfunktion, die aus partiellen Summanden der analytischen Lösung besteht und von der Knotenanzahl  $n$  auf dem Interface abhängt, zum Einsatz [4]:

$$f_n(\varphi) = \sum_{k=0,2,\dots}^{N_1} r_A^{\frac{k}{2}} \left[ a_k \left( \kappa e^{i\varphi \frac{k}{2}} + e^{-i\varphi \frac{k}{2}} \right) + \frac{k}{2} \bar{a}_k \left( e^{-i\varphi \frac{k}{2}} - e^{-i\varphi(\frac{k}{2}-2)} \right) \right] + \sum_{k=1,3,\dots}^{N_2} r_A^{\frac{k}{2}} \left[ a_k \left( \kappa e^{i\varphi \frac{k}{2}} - e^{-i\varphi \frac{k}{2}} \right) + \frac{k}{2} \bar{a}_k \left( e^{-i\varphi \frac{k}{2}} - e^{-i\varphi(\frac{k}{2}-2)} \right) \right], \quad (3.1)$$

wobei  $N_1$  und  $N_2$  die Anzahl der Basisfunktionen sind und wie folgt ermittelt werden:

$$N_1 = n - m, \quad \text{mit} \quad \begin{cases} m = 2 & \text{für gerade } n, \\ m = 1 & \text{für ungerade } n, \end{cases}$$

$$N_2 = n - m, \quad \text{mit} \quad \begin{cases} m = 1 & \text{für gerade } n, \\ m = 2 & \text{für ungerade } n. \end{cases}$$

Die eindeutige Lösbarkeit des Interpolationsproblems wurde in [4] für beliebige Knotenanzahl und Knotenverteilung auf dem Interface bewiesen.

### 3.1 Untersuchung von der Interpolationsmatrix

Um das Interpolationsproblem (3.2), das später für das Aufstellen der Formfunktionen nötig ist, lösen zu können

$$f_n(\varphi_k) = U_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (3.2)$$

müssen zunächst die Koeffizienten  $a_k$  und  $\bar{a}_k$ , die miteinander gekoppelt sind, in reelle und imaginäre Komponenten zerlegt werden.

$$a_k = a_k^{(1)} + ia_k^{(2)}, \quad \bar{a}_k = a_k^{(1)} - ia_k^{(2)}. \quad (3.3)$$

Durch Anwendung der Euler-Formel kann die Interpolationsfunktion (3.1) unter Berücksichtigung von (3.3) wie folgt umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} f_n(\varphi) = & \sum_{k=0,2,\dots}^{N_1} r_A^{\frac{k}{2}} \left[ a_k^{(1)} \left( \cos \varphi \frac{k}{2} \left( \kappa + \frac{1}{2}(k+2) \right) - \frac{k}{2} \cos \left\{ \varphi \left( \frac{k}{2} - 2 \right) \right\} \right) \right. \\ & - a_k^{(2)} \left( \sin \varphi \frac{k}{2} \left( \kappa + \frac{1}{2}(k-2) \right) - \frac{k}{2} \sin \left\{ \varphi \left( \frac{k}{2} - 2 \right) \right\} \right) \\ & + ia_k^{(1)} \left( \sin \varphi \frac{k}{2} \left( \kappa - \frac{1}{2}(k+2) \right) + \frac{k}{2} \sin \left\{ \varphi \left( \frac{k}{2} - 2 \right) \right\} \right) \\ & \left. + ia_k^{(2)} \left( \cos \varphi \frac{k}{2} \left( \kappa - \frac{1}{2}(k-2) \right) + \frac{k}{2} \cos \left\{ \varphi \left( \frac{k}{2} - 2 \right) \right\} \right) \right] \\ & \sum_{k=1,3,\dots}^{N_2} r_A^{\frac{k}{2}} \left[ a_k^{(1)} \left( \cos \varphi \frac{k}{2} \left( \kappa + \frac{1}{2}(k-2) \right) - \frac{k}{2} \cos \left\{ \varphi \left( \frac{k}{2} - 2 \right) \right\} \right) \right. \\ & - a_k^{(2)} \left( \sin \varphi \frac{k}{2} \left( \kappa + \frac{1}{2}(k+2) \right) - \frac{k}{2} \sin \left\{ \varphi \left( \frac{k}{2} - 2 \right) \right\} \right) \\ & + ia_k^{(1)} \left( \sin \varphi \frac{k}{2} \left( \kappa - \frac{1}{2}(k-2) \right) + \frac{k}{2} \sin \left\{ \varphi \left( \frac{k}{2} - 2 \right) \right\} \right) \\ & \left. + ia_k^{(2)} \left( \cos \varphi \frac{k}{2} \left( \kappa - \frac{1}{2}(k+2) \right) + \frac{k}{2} \cos \left\{ \varphi \left( \frac{k}{2} - 2 \right) \right\} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.4)$$

Somit kann das Interpolationsproblem wie folgt umformuliert werden:

$$f_n^{(1)}(\varphi_k) + if_n^{(2)}(\varphi_k) = U_k^{(1)} + iU_k^{(2)},$$

oder als Gleichungssystem:

$$\mathbf{FA} = \mathbf{U},$$

wobei F die Interpolationsmatrix ist, A ist der Vektor der unbekannt Koeffizienten und U ist der Vektor der unbekannt Verformungen.

### 3.1.1 Untersuchung der Interpolationsmatrix bezüglich Konditionszahl, Determinante und Interpolationsknoten

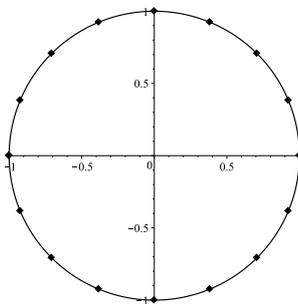
In diesem Abschnitt wird die numerische Stabilität der interpolations-basierten Kopplung, die eine große Rolle im Bezug auf eine praxisorientierte Umsetzung des Verfahrens spielt, anhand der Konditionszahl evaluiert.

Die Konditionszahl einer invertierbaren Matrix  $A$  lässt sich wie folgt definieren:

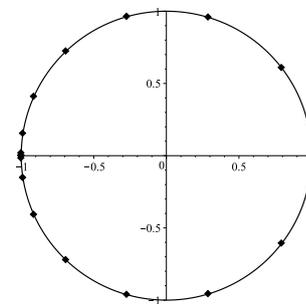
$$\kappa_2(A) = \|A^{-1}\|_2 \cdot \|A\|_2 .$$

Sie beschreibt die Empfindlichkeit der Lösung gegen die Störungen in den Eingangsdaten. Bei einer gut konditionierten Matrix ist die Konditionszahl klein, und kleine Änderungen in den Daten bewirken nur kleine Änderungen in der Lösung des Problems. Dabei kann der Ausdruck „klein“ nur problemabhängig quantifiziert werden. Für die praktischen Anwendungen wird eine symmetrische und äquidistante Knotenverteilung untersucht (Abbildung 3.2a). Es kann aber bei hohem Grad des Polynoms vorkommen, dass die Polynomfunktion insbesondere in der Nähe der Intervallgrenzen kaum noch der zu interpolierenden Funktion ähnelt (was auch als Runge's Phänomen bekannt ist). Deswegen werden Tschebyschow-Stützstellen, die an den Intervallgrenzen dichter liegen, parallel dazu untersucht (Abbildung 3.2b). Die Knotenverteilung nach Tschebyschow kann den Gesamtfehler der Interpolation verkleinern.

Die Tschebyschow-Knoten sind Nullstellen vom Tschebyschow-Polynom erster Art und sind für



(a) Äquidistante Knotenverteilung



(b) Knotenverteilung nach Tschebyschow

Abbildung 3.2: Vergleich der Knotenverteilung.

das Intervall  $[-1, 1]$  in (3.5) gegeben [16]:

$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (3.5)$$

wobei  $n$  der Grad des Tschebyschow-Polynoms ist.

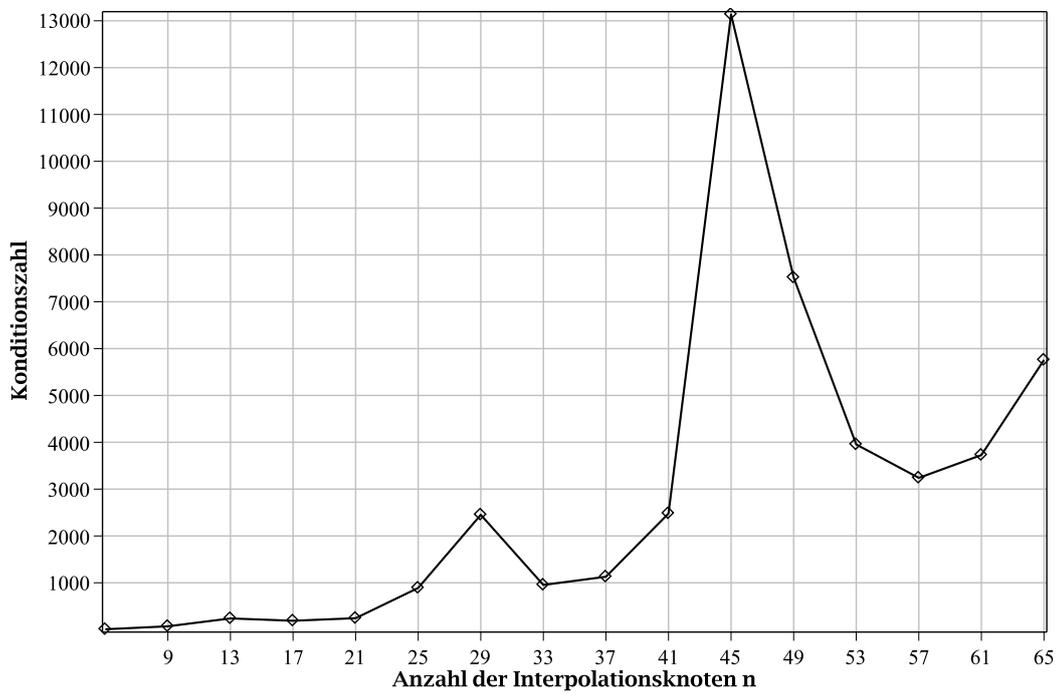
Für ein beliebiges Intervall  $[a, b]$  können die Tschebyschow-Knoten mithilfe der affinen Abbildung wie folgt transformiert werden:

$$x_k = \frac{b+a}{2} - \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (3.6)$$

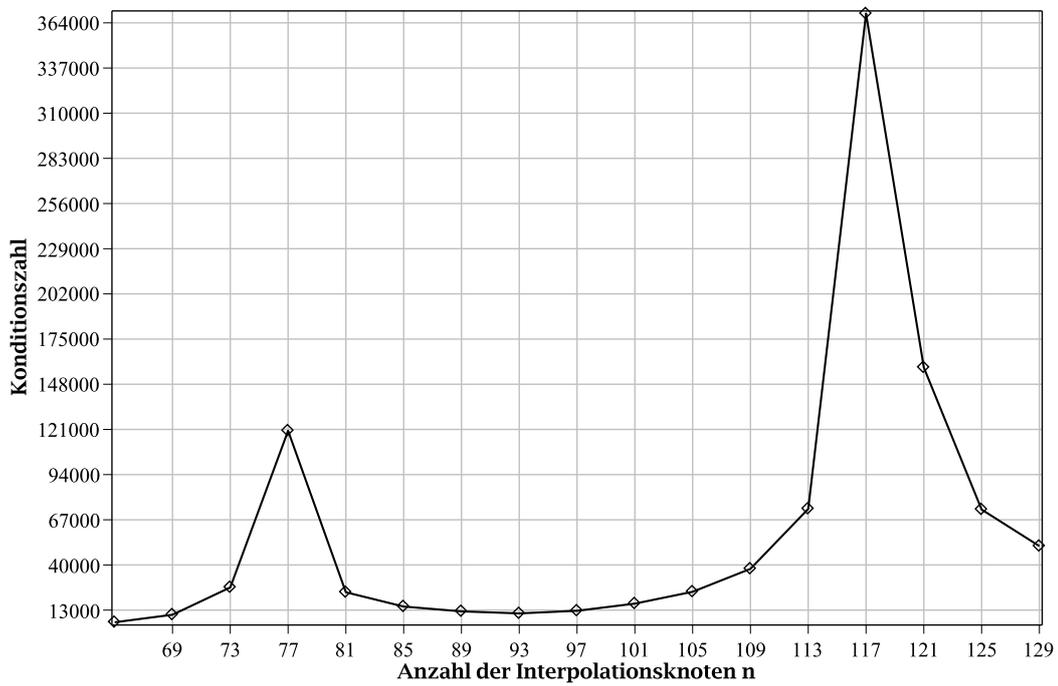
Die erste und letzte mit der Formel 3.6 berechneten Stützstellen entsprechen aber nicht die Unter- und Oberkante des Risses. Damit die Knotenverteilung nach Tschebyschow für die untersuchte Kopplungsmethode geeignet wird, werden diese Knoten durch  $-\pi$  und  $\pi$  ersetzt. Anhand Abbildungen 3.3 und 3.5 ist es offensichtlich, dass der Verlauf der Konditionszahl in Abhängigkeit von der Knotenanzahl unregelmäßig ist und Peaks aufweist, was als numerische Instabilität der Kopplung interpretiert werden kann. Die Interpolationsmatrix basierend auf sowohl der äquidistanten Knotenverteilung als auch den Tschebyschow-Knoten ist erkennbar schlecht konditioniert und die Konditionszahl im Fall der Tschebyschow-Knoten ist erheblich größer (ohne Ersatz ist der ungünstigste Fall). Man kann feststellen, dass die Tschebyschow-Stützstellen für das betrachtete Polynom ungeeignet ist. Aus diesem Grund wird diese Variante bei den weiteren Untersuchungen ausgeschlossen.

$n$	5	9	13	17	21
$\det(A)$	$2.1E+7$	$-3.4E+14$	$-1.6E+23$	$8.5E+32$	$6.6E+42$
$n$	25	29	33	37	41
$\det(A)$	$3.8E+52$	$-4.1E+62$	$-4.6E+73$	$-3E+84$	$-1.9E+95$
$n$	45	49	53	57	61
$\det(A)$	$-5.9E+105$	$2.2E+117$	$1.2E+129$	$4.9E+140$	$2.1E+152$
$n$	65	69	73	77	81
$\det(A)$	$9.6E+163$	$4.5E+175$	$1.7E+187$	$-4.4E+198$	$-3.1E+211$
$n$	85	89	93	97	101
$\det(A)$	$-7.8E+223$	$-1.8E+236$	$-4.2E+248$	$-1.1E+261$	$-2.8E+273$
$n$	105	109	113	117	121
$\det(A)$	$-8.1E+285$	$-2.3E+298$	$-\infty$	$-\infty$	$\infty$

Tabelle 3.1: Determinante der Interpolationsmatrix in Abhängigkeit von der Knotenanzahl

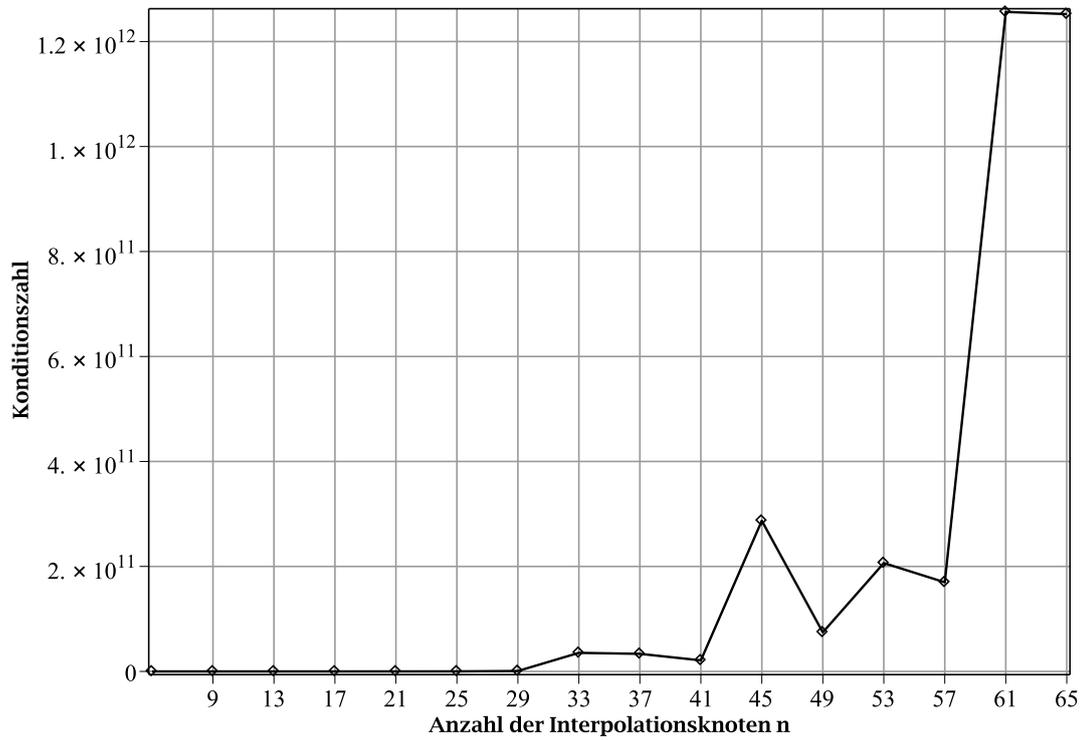


(a)  $n= 5..65$

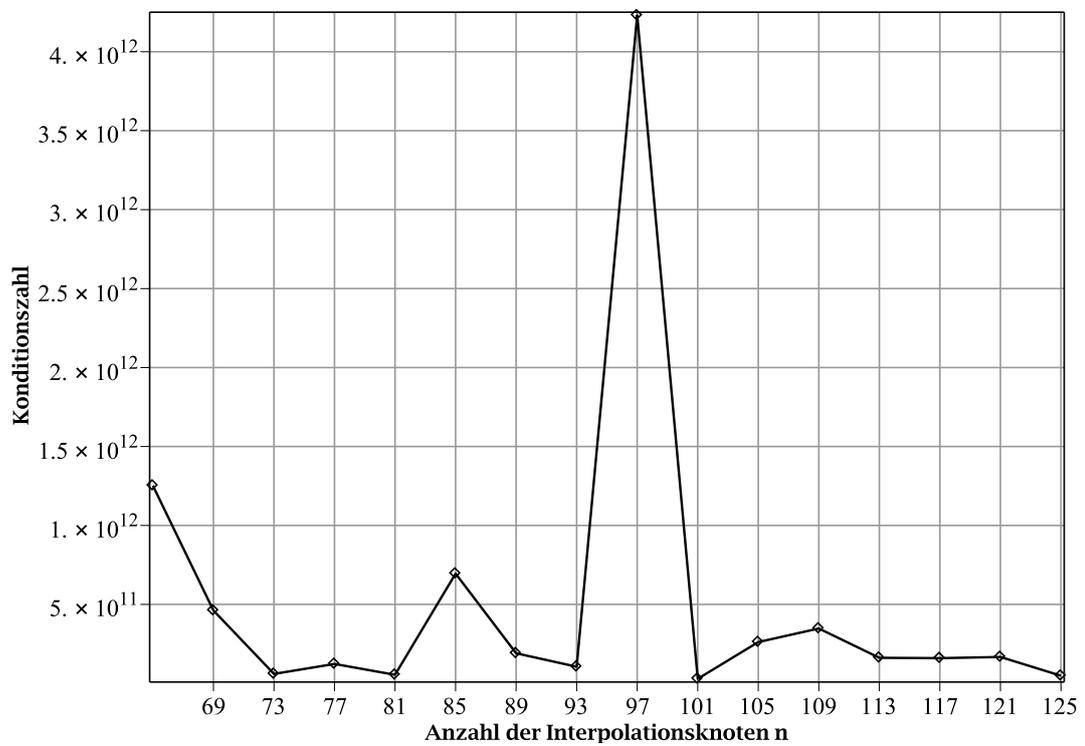


(b)  $n= 65..125$

Abbildung 3.3: Konditionszahl bei einer äquidistanten Knotenverteilung

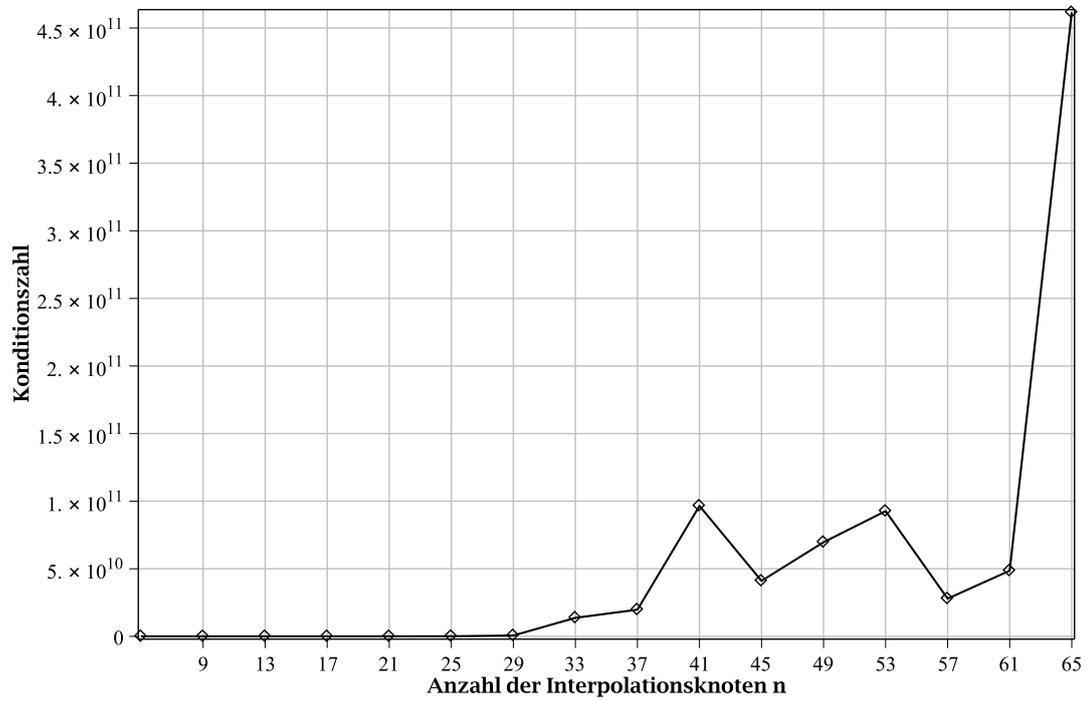


(a) n= 5..65

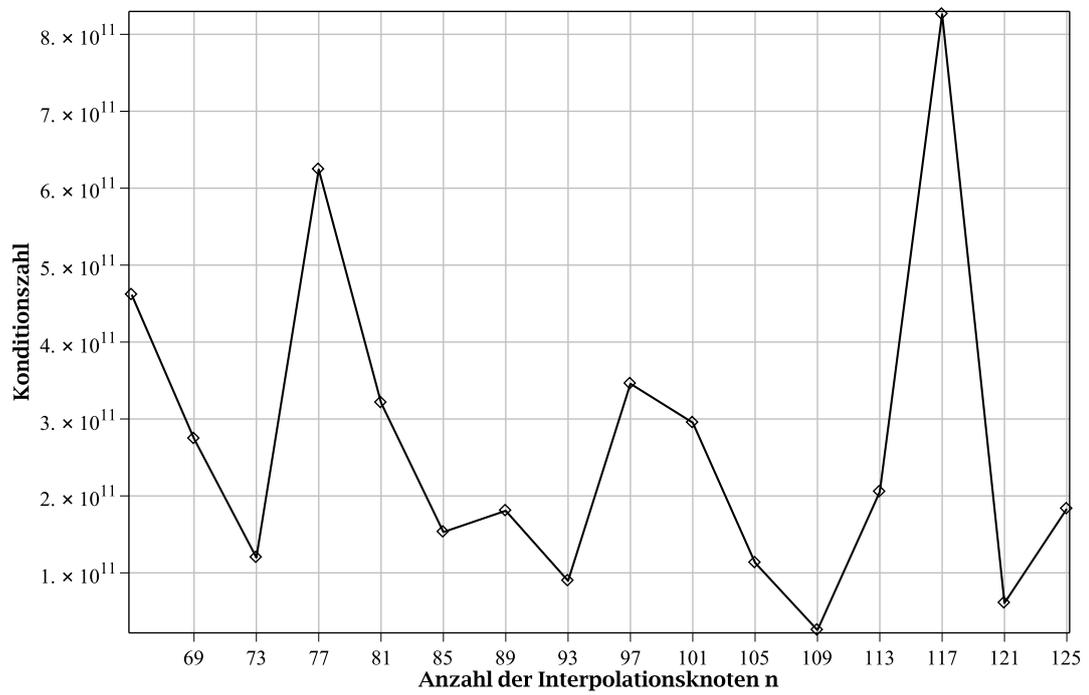


(b) n= 65..125

Abbildung 3.4: Konditionszahl für Tschebyschow-Knoten ohne Ersatz



(a) n= 5..65



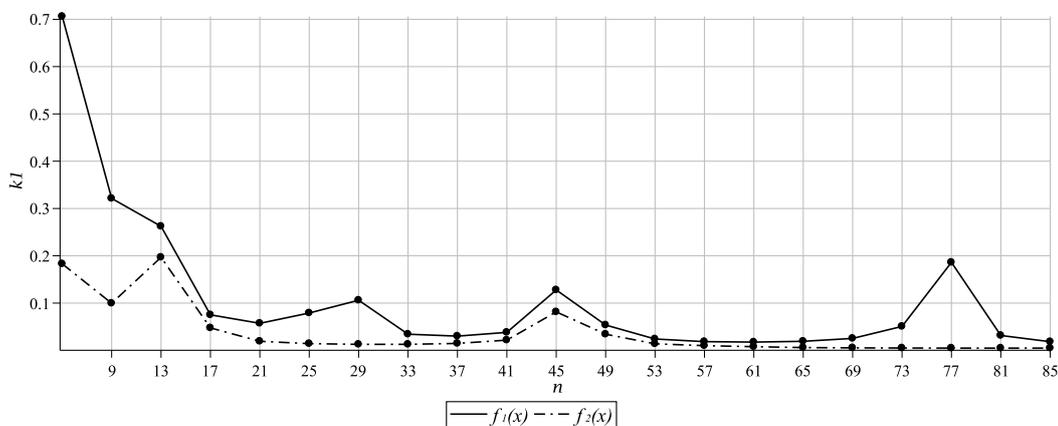
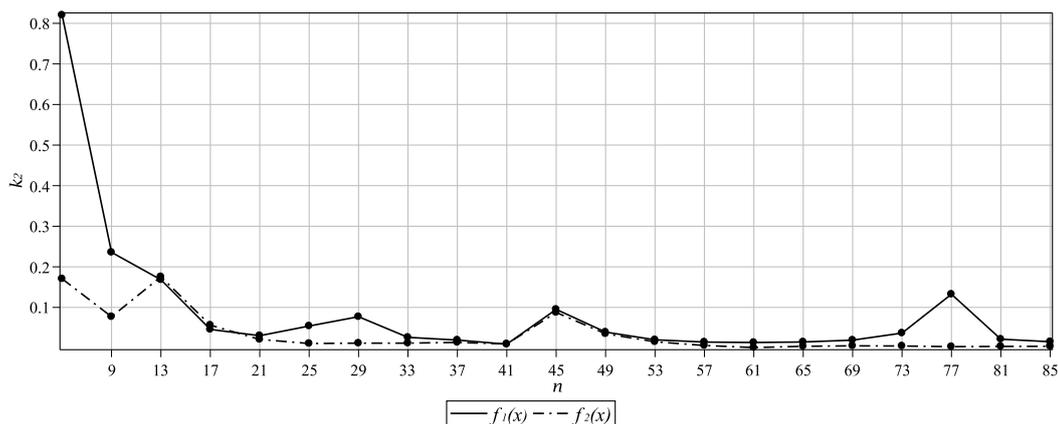
(b) n= 65..125

Abbildung 3.5: Konditionszahl für Tschebyschow-Knoten mit Ersatz

### 3.1.2 Interpolieren von Funktionen anhand des Interpolations-Operators

Um die Genauigkeit der interpolations-basierten Kopplung in Abhängigkeit von der Knotenanzahl  $n$  (Anzahl der Basisfunktionen) numerisch beurteilen zu können, werden nun ein paar Funktionen anhand des Interpolations-Operators interpoliert. Eine stetige und unendlich differenzierbare Funktion  $f_1(x) = e^x \sin(x)$ , und eine Betragsfunktion  $f_2(x) = |x|$ , die stetig aber an der Stelle  $x = 0$  nicht differenzierbar ist, werden betrachtet.

Das erste Beurteilungskriterium ist  $k_1 = \frac{\|f(x) - f_n(x)\|_2}{\|f(x)\|_2}$ , das den  $L_2$ -Fehler der Interpolation über das gesamte Intervall widerspiegelt, wobei  $f(x)$  die exakte Funktion und  $f_n(x)$  die Interpolationsfunktion sind und  $x \in [-\pi, \pi]$ . Das zweite Kriterium  $k_2$  gibt die maximale Abweichung über das gesamte Intervall zwischen der exakten und der Interpolationsfunktion an,  $k_2 = \frac{\max|f(x) - f_n(x)|}{\max|f(x)|}$ .

Abbildung 3.6: Beurteilungskriterium  $k_1$ Abbildung 3.7: Beurteilungskriterium  $k_2$ 

Anhand der Abbildungen 3.6 und 3.7 kann beobachtet werden, dass bei dem betrachteten und schlecht konditionierten Interpolationsproblem die Erhöhung der Anzahl der Basisfunktionen zu Ungenauigkeiten führen kann. Die Verläufe der beiden Kriterien (gesamte und maximale Abweichung) verhalten sich für eine Funktion qualitativ identisch und die Stelle der maximalen Unge-

naugigkeiten hängt von der Konditionszahl ab. Dasselbe Ergebnis kann grafisch (Abbildung 3.8 ) festgestellt werden.

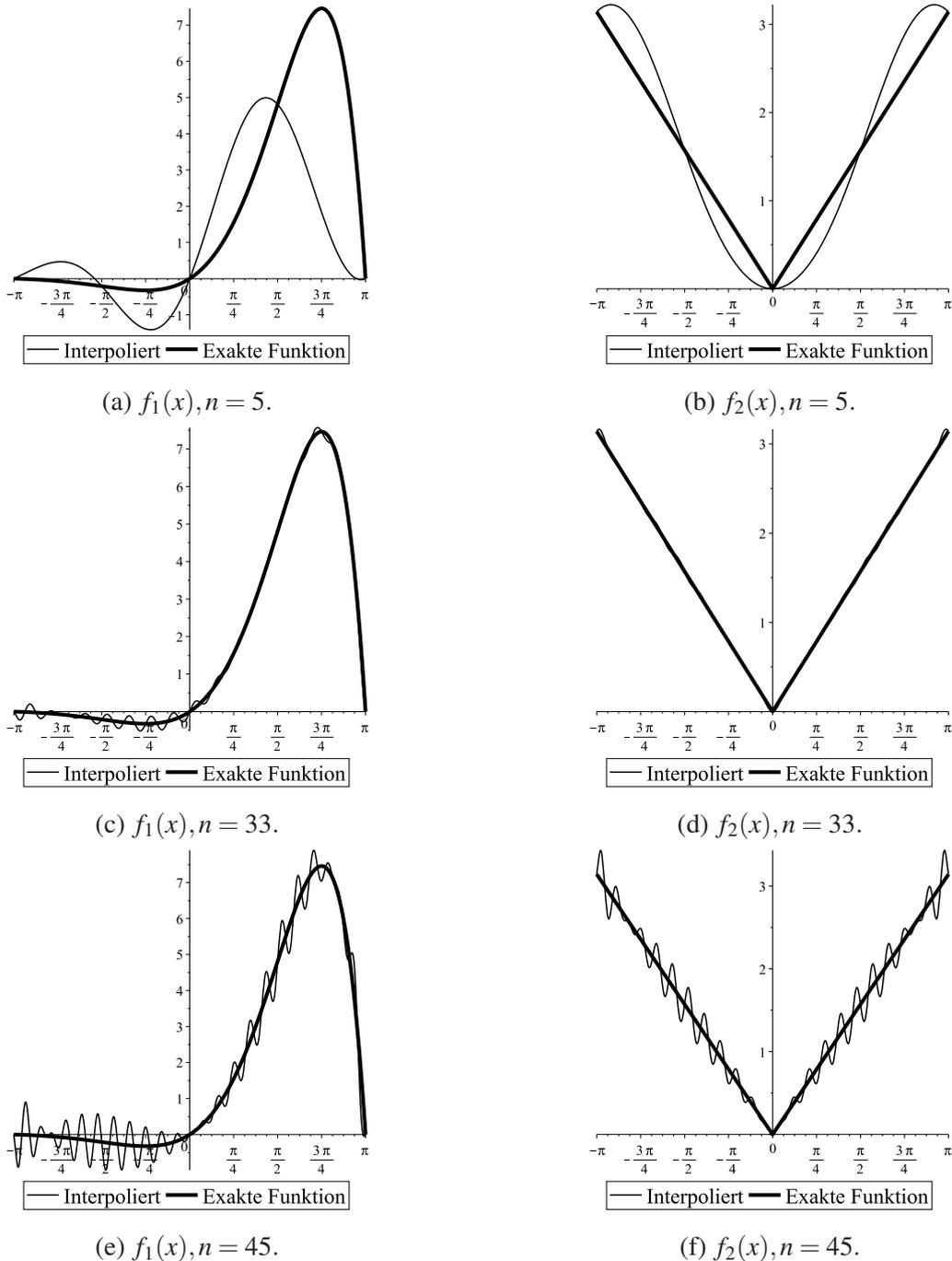


Abbildung 3.8: Interpolationsgenauigkeit in Abhängigkeit von der Anzahl der Basisfunktionen.

### 3.2 Zusammenfassung und Beurteilung der Ergebnisse

Eine interpolationsbasierte Kopplungsmethode zwischen der Finite-Elemente-Methode und Methoden der komplexen Analysis zur Lösung von Randwertaufgaben der Bruchmechanik wird in [4] vorgestellt. Diese Methode bietet zwar eine eindeutige Lösbarkeit des Interpolationsproblems und

die analytische Lösung wird auf dem Interface  $\Gamma_{AD}$  erhalten, aber durch Untersuchung der Konditionszahl der Interpolationsmatrix wird herausgefunden, dass sie schlecht konditioniert ist, was zu Ungenauigkeiten und numerischen Instabilitäten des gesamten Lösungsverfahrens, die weder vom Algorithmus zur Problemlösung noch von der Implementierung in einem Computerprogramm abhängig sind, führen kann. Aus diesem Grund stellt sich die Notwendigkeit nach einer stabilen Kopplungsmethode auf dem Interface  $\Gamma_{AD}$  zwischen der numerischen und der analytischen Lösung des betrachteten Problems heraus.

## 4 Approximationsbasierte Kopplung zwischen der analytischen und numerischen Lösung

Als eine Alternative zur interpolationsbasierten Kopplungsmethode, die, wie im Abschnitt 3 gezeigt wurde, zur numerischen Instabilitäten führen kann, wird eine approximationsbasierte Kopplungsmethode in diesem Abschnitt untersucht. Die approximationsbasierte Kopplung wird anhand einer approximierenden Funktion realisiert:

$$f_n(\varphi) = \sum_{j=1}^{2n} c_j \Phi_j(\varphi)$$

wobei  $c_j$  Koeffizienten des Approximationsproblems sind und analog zur interpolationsbasierten Kopplungsmethode ein Basissystem  $\Phi(\varphi)$  verwendet wird, das aus partiellen Summanden der analytischen Lösung besteht. Das gewählte Basissystem:

$$\begin{aligned} \Phi(\varphi) = & \left\{ r_A^{\frac{k}{2}} \left( \kappa e^{i\varphi \frac{k}{2}} + e^{-i\varphi \frac{k}{2}} \right) \right\}_{k=0,2,\dots,N_1} \cup \left\{ r_A^{\frac{k}{2}} \frac{k}{2} \left( e^{-i\varphi \frac{k}{2}} + e^{-i\varphi(\frac{k}{2}-2)} \right) \right\}_{k=2,4,\dots,N_1+2}, \\ & \cup \left\{ r_A^{\frac{k}{2}} \left( \kappa e^{i\varphi \frac{k}{2}} + e^{-i\varphi \frac{k}{2}} \right) \right\}_{k=1,3,\dots,N_2} \cup \left\{ r_A^{\frac{k}{2}} \frac{k}{2} \left( \kappa e^{-i\varphi \frac{k}{2}} + e^{-i\varphi(\frac{k}{2}-2)} \right) \right\}_{k=1,3,\dots,N_2} \end{aligned} \quad (4.1)$$

wobei  $N_1$  und  $N_2$  sind:

$$N_1 = n - m, \quad \text{mit} \quad \begin{cases} m = 2 & \text{für gerade } n, \\ m = 1 & \text{für ungerade } n, \end{cases}$$

$$N_2 = n - m, \quad \text{mit} \quad \begin{cases} m = 1 & \text{für gerade } n, \\ m = 2 & \text{für ungerade } n. \end{cases}$$

In der weiteren Untersuchungen wird für die praktische Rechnung auf ungerade  $n$  mit einer äquidistanten und symmetrischen Verteilung beschränkt. Die Anzahl der Basisfunktionen ist dabei  $t = 2n$  und diese können in Bereichen definiert werden:

- $1 \leq t \leq \frac{n+1}{2} : \Phi_t(\varphi) = r_A^{\frac{k}{2}} \left( \kappa e^{i\varphi \frac{k}{2}} + e^{-i\varphi \frac{k}{2}} \right); k = 2(t-1),$
- $\frac{n+1}{2} < t \leq n+1 : \Phi_t(\varphi) = r_A^{\frac{k}{2}} \frac{k}{2} \left( e^{-i\varphi \frac{k}{2}} + e^{-i\varphi(\frac{k}{2}-2)} \right); k = 2\left(t - \frac{n+3}{2}\right) + 2,$

- $n + 1 < t \leq \frac{3n+1}{2} : \Phi_t(\varphi) = r_A^{\frac{k}{2}} \left( \kappa e^{i\varphi^{\frac{k}{2}}} + e^{-i\varphi^{\frac{k}{2}}} \right); k = 2(t - n - 2) + 1,$
- $\frac{3n+1}{2} < t \leq 2n : \Phi_t(\varphi) = r_A^{\frac{k}{2}} \frac{k}{2} \left( e^{-i\varphi^{\frac{k}{2}}} + e^{-i\varphi^{\frac{k}{2}-2}} \right); k = 2\left(t - \frac{3n+3}{2}\right) + 1.$

Diese Schreibweise dient zur Herleitung vom orthogonalen Basissystem später im Abschnitt 4.2. Der Ausgangspunkt der Approximation ist die Minimierung der Norm des Fehlers  $\|f(\varphi) - f_n(\varphi)\|$  [17], wobei  $f(\varphi)$  die zu approximierende Funktion. Da für ingenieurmäßige Anwendungen der  $L^2$ -Raum eine besondere Rolle spielt, kommt die 2-Norm für die Approximationsaufgabe zum Einsatz. Das Approximationsproblem kann dann durch Aufstellung des Normalgleichungssystems gelöst werden:

$$\langle f(\varphi) - \sum_{i=1}^{2n} c_i \Phi_i(\varphi), \Phi_j(\varphi) \rangle = 0$$

Daraus folgt:

$$\sum_{i=1}^{2n} c_i \langle \Phi_i(\varphi), \Phi_j(\varphi) \rangle = \langle f(\varphi), \Phi_j(\varphi) \rangle \quad (4.2)$$

Die Skalarprodukte  $\langle \Phi_i(\varphi), \Phi_j(\varphi) \rangle; i, j = 1 \dots 2n$  definieren eine Matrix  $G$ , die Gramsche Matrix genannt wird. Sie ist symmetrische Matrix und positiv definit [18].

$$G = \begin{pmatrix} \langle \Phi_0(\varphi), \Phi_0(\varphi) \rangle & \cdots & \langle \Phi_{2n}(\varphi), \Phi_0(\varphi) \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \Phi_0(\varphi), \Phi_{2n}(\varphi) \rangle & \cdots & \langle \Phi_{2n}(\varphi), \Phi_{2n}(\varphi) \rangle \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

#### 4.1 Untersuchung der Gramschen Matrix für die approximationsbasierte Kopplung auf den Intervallen $[-\pi, \pi]$ und $[-2\pi, 2\pi]$ ; Herstellung von Bezügen zu bekannten Ergebnissen in der Frameanalysis

Um die approximationsbasierte Kopplung analog zur interpolationsbasierten Kopplung zu beurteilen, wird in diesem Abschnitt die Gramsche Matrix (4.3) bezüglich ihrer Konditionszahl untersucht. Es ist an dieser Stelle bemerkenswert, dass das Basissystem  $\{e^{i\frac{k}{2}\varphi}\}_{k \in \mathbb{N}}$  sowie das Basissystem  $\{e^{-i\frac{k}{2}\varphi}\}_{k \in \mathbb{N}}$  im Intervall  $[-2\pi, 2\pi]$  orthogonal sind und jede Basisfunktion in (4.1) aus einer Linearkombination von zwei Funktionen aus diesen Basissystemen besteht. Diese Orthogonalität kann wie folgend bewiesen werden:

$$\begin{aligned} \langle e^{+i\frac{j}{2}\varphi}, e^{+i\frac{k}{2}\varphi} \rangle &= \int_{-2\pi}^{2\pi} e^{i\frac{j}{2}\varphi} e^{-i\frac{k}{2}\varphi} d\varphi = \int_{-2\pi}^{2\pi} e^{i\frac{(j-k)}{2}\varphi} d\varphi = \int_{-2\pi}^{2\pi} e^{i\frac{m}{2}\varphi} d\varphi \\ &= \int_{-2\pi}^{2\pi} \left( \cos \frac{m}{2}\varphi + i \sin \frac{m}{2}\varphi \right) d\varphi = \left[ \frac{2}{m} \sin \frac{m}{2}\varphi - i \frac{2}{m} \cos \frac{m}{2}\varphi \right]_{-2\pi}^{2\pi} \end{aligned}$$

- Fall 1,  $j \neq k$  und  $m$  ist gerade Zahl:

$$\begin{aligned}\langle e^{+i\frac{j}{2}\varphi}, e^{+i\frac{k}{2}\varphi} \rangle &= \left( \frac{2}{m} \sin m - i \frac{2}{m} \cos m \right) - \left( \frac{2}{m} \sin(-m) - i \frac{2}{m} \cos(-m) \right) \\ &= (0 - i) - (0 - i) = 0\end{aligned}$$

- Fall 2,  $j \neq k$  und  $m$  ist ungerade Zahl:

$$\begin{aligned}\langle e^{+i\frac{j}{2}\varphi}, e^{+i\frac{k}{2}\varphi} \rangle &= \left( \frac{2}{m} \sin m - i \frac{2}{m} \cos m \right) - \left( \frac{2}{m} \sin(-m) - i \frac{2}{m} \cos(-m) \right) \\ &= (0 + i) - (0 + i) = 0\end{aligned}$$

- Fall 3,  $j = k$  und dann ist  $m = 0$ :

$$\langle e^{+i\frac{j}{2}\varphi}, e^{+i\frac{k}{2}\varphi} \rangle = \int_{-2\pi}^{2\pi} d\varphi = 4\pi$$

Mit derselben Vorgehensweise kann bewiesen werden, dass das Basissystem  $\{e^{-i\frac{k}{2}\varphi}\}_{k \in \mathbb{N}}$  auf  $[-2\pi, 2\pi]$  orthogonal ist. Es ist sinnvoll, die Approximationsaufgabe und die Gramsche Matrix auch auf dem Intervall  $[-2\pi, 2\pi]$  zu betrachten, da in diesem Fall nur Skalarprodukte  $\langle \Phi_j(\varphi), \Phi_k(\varphi) \rangle$  ungleich Null sein können, wenn die beiden Basisfunktionen mindestens eine Potenz mit gleichem Exponent besitzen, was den Zeitaufwand der Berechnung reduzieren kann und günstig auf die Konditionszahl der Gramsche Matrix einwirken kann. Darüber hinaus lässt sich die Gramsche Matrix durch eine explizite Formel beschreiben und kann in zwei Teilmatrizen unterteilt werden, wobei die obere Matrix mit den Basisfunktionen mit den ganzzahligen Exponenten ( $\Phi_t(\varphi) : 1 \leq t \leq n+1$ ) und die untere Matrix mit den Basisfunktionen mit den halbzahligen Exponenten ( $\Phi_t(\varphi) : n+1 \leq t \leq 2n$ ) verbunden sind.

$$G = \left( \begin{array}{c|c} \text{Obere Teilmatrix} & 0 \\ \hline 0 & \text{Untere Teilmatrix} \end{array} \right)$$

Nachdem das Approximationsproblem auf dem Intervall  $[-2\pi, 2\pi]$  gelöst wird, kann zur Lösung des Kopplungsproblems und der bruchmechanischen Aufgabe wieder auf dem Intervall  $[-\pi, \pi]$  beschränkt werden. Zunächst wird der Verlauf die Konditionszahl der Gramschen Matrix für beide Intervalle in Abhängigkeit von der Anzahl der Kopplungsknoten  $n$  untersucht, wobei die Anzahl der Basisfunktionen  $t = 2n$  ist.

Da die Konditionszahl der Gramschen Matrix im Intervall  $[-\pi, \pi]$  schnell und erheblich anwächst, ist es unübersichtlich, den Verlauf als Diagramm darzustellen und wird als Tabelle angegeben und mit der anderen Variante verglichen:

$n$	5	9	13	17	21
$\kappa_2(G), [-\pi, \pi]$	5.8E+7	3E+14	9.7E+20	2.5E+27	5.4E+33
$\kappa_2(G), [-2\pi, 2\pi]$	2.1E+0	1.23E+3	3.8E+3	8.8E+3	1.7E+4
$n$	25	29	33	37	41
$\kappa_2(G), [-\pi, \pi]$	1E+40	2E+46	2.8E+52	6.2E+58	1E+65
$\kappa_2(G), [-2\pi, 2\pi]$	3E+4	4.7E+4	7.1E+4	1E+5	1.4E+5
$n$	45	49	53	57	-
$\kappa_2(G), [-\pi, \pi]$	1.7E+71	2.7E+77	4.3E+83	6.6E+89	-
$\kappa_2(G), [-2\pi, 2\pi]$	1.85E+5	2.4E+5	3.1E+5	3.9E+5	-

Tabelle 4.1: Konditionszahl der Gramschen Matrix in Abhängigkeit von der Anzahl der Kopplungsknoten

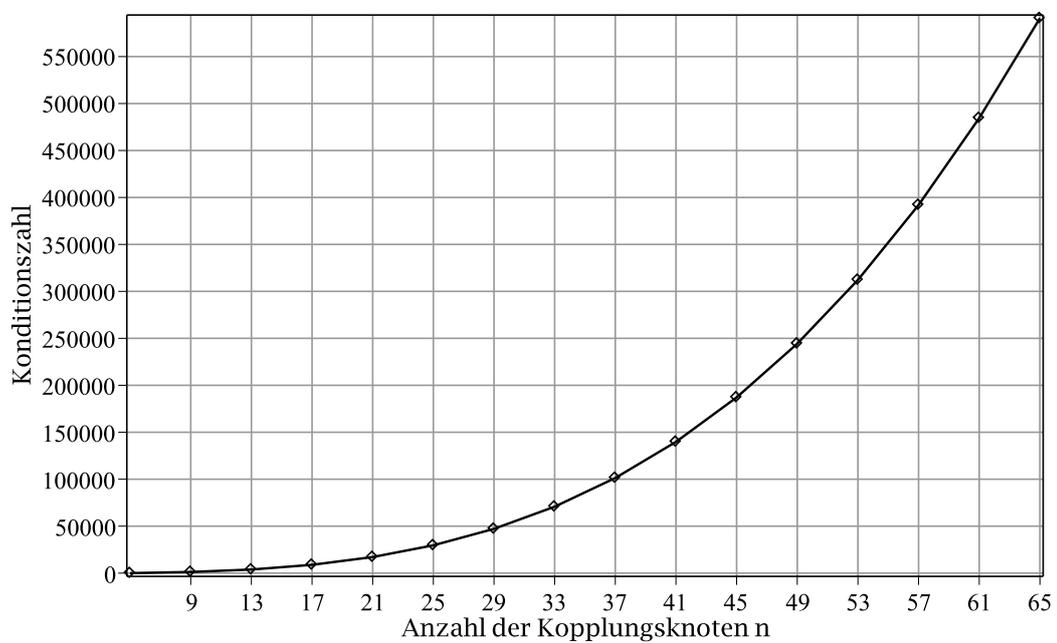


Abbildung 4.1: Konditionszahl der Gramschen Matrix im Intervall  $[-2\pi, 2\pi]$

## 4.2 Orthogonalisierung des eingeführten Basissystems

Aus einer linear unabhängigen Menge von Funktionen (einer Basis)  $\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  kann man mit Hilfe des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren eine orthogonale Basis  $\{p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  erzeugen [19]:

$$p_1(x) = f_1(x),$$

$$p_j(x) = f_j(x) - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{(p_i(x), f_j(x))}{(p_i(x), p_i(x))} p_i(x), \quad j = 2, 3, \dots, n.$$

Mit Hilfe vom Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren lässt sich das Basissystem in (4.1) auf den Intervallen  $[-\pi, \pi]$  und  $[-2\pi, 2\pi]$  orthogonalisieren. Das Basissystem kann durch explizite Formeln auf dem Intervall  $[-2\pi, 2\pi]$  orthogonalisiert werden. Das orthogonale Basissystem für  $n = 5$  ist:

- $1 \leq t \leq 3 : P_t(\varphi) = \Phi_t(\varphi) = r_A^{\frac{k}{2}} \left( \kappa e^{i\varphi \frac{k}{2}} + e^{-i\varphi \frac{k}{2}} \right); k = 2(t-1),$
- $t = 4 : P_t(\varphi) = \frac{r_A}{\kappa^2 + 1} \left( (\kappa^2 + \kappa) e^{-i\varphi} - (\kappa + 1) e^{i\varphi} \right),$
- $t = 5 : P_t(\varphi) = \frac{2r_A^2}{\kappa^2 + 1} \left( \kappa^2 e^{-2i\varphi} - \kappa e^{2i\varphi} \right),$
- $t = 6 : P_t(\varphi) = 3r_A^3 e^{-3i\varphi},$
- $7 \leq t \leq 8 : P_t(\varphi) = \Phi_t(\varphi) = r_A^{\frac{k}{2}} \left( \kappa e^{i\varphi \frac{k}{2}} - e^{-i\varphi \frac{k}{2}} \right); k = 2(t-n-2) + 1,$
- $t = 9 : P_t(\varphi) = \frac{r_A^{\frac{1}{2}}}{2(\kappa^2 + 1)} \left( \kappa^2 e^{-i\varphi \frac{1}{2}} - e^{i\varphi \frac{3}{2}} + \kappa e^{i\varphi \frac{1}{2}} - \kappa e^{-i\varphi \frac{3}{2}} \right),$
- $t = 10 : P_t(\varphi) = \frac{3}{2} \frac{r_A^{\frac{3}{2}}}{(\kappa^2 + 1)^2} \left( (\kappa^3 - \kappa) e^{-i\varphi \frac{1}{2}} + (\kappa^3 - \kappa) e^{i\varphi \frac{3}{2}} + (\kappa^2 - 1) e^{i\varphi \frac{1}{2}} + (\kappa^4 - \kappa^2) e^{-i\varphi \frac{3}{2}} \right).$

Das orthogonale Basissystem für  $9 \leq n$  auf dem Intervall  $[-2\pi, 2\pi]$  ist:

- $1 \leq t \leq \frac{n+1}{2} : P_t(\varphi) = \Phi_t(\varphi) = r_A^{\frac{k}{2}} \left( \kappa e^{i\varphi \frac{k}{2}} + e^{-i\varphi \frac{k}{2}} \right); k = 2(t-1),$
- $t = \frac{n+3}{2} : P_t(\varphi) = \frac{r_A}{\kappa^2 + 1} \left( (\kappa^2 + \kappa) e^{-i\varphi} - (\kappa + 1) e^{i\varphi} \right),$
- $\frac{n+5}{2} \leq t \leq n : P_t(\varphi) = r_A^{\frac{k}{2}} \frac{\frac{k}{2}}{\kappa^2 + 1} \left( \kappa^2 e^{-i\varphi \frac{k}{2}} - \kappa e^{i\varphi \frac{k}{2}} \right); k = 2\left(t - \frac{n+1}{2}\right),$
- $t = n+1 : P_t(\varphi) = r_A^{\frac{k}{2}} \frac{k}{2} e^{-i\varphi \frac{k}{2}}; k = n+1,$
- $n+2 \leq t \leq \frac{3n+1}{2} : P_t(\varphi) = \Phi_t(\varphi) = r_A^{\frac{k}{2}} \left( \kappa e^{i\varphi \frac{k}{2}} - e^{-i\varphi \frac{k}{2}} \right); k = 2(t-n-2) + 1,$
- $t = \frac{3n+3}{2} : P_t(\varphi) = \frac{r_A^{\frac{1}{2}}}{2(\kappa^2 + 1)} \left( \kappa^2 e^{-i\varphi \frac{1}{2}} - e^{i\varphi \frac{3}{2}} + \kappa e^{i\varphi \frac{1}{2}} - \kappa e^{-i\varphi \frac{3}{2}} \right),$
- $t = \frac{3n+5}{2} : P_t(\varphi) = \frac{3}{2} \frac{r_A^{\frac{3}{2}}}{(\kappa^2 + 1)^2} \left( (\kappa^3 - \kappa) e^{-i\varphi \frac{1}{2}} + (\kappa^3 - \kappa) e^{i\varphi \frac{3}{2}} + (\kappa^2 - 1) e^{i\varphi \frac{1}{2}} + (\kappa^4 - \kappa^2) e^{-i\varphi \frac{3}{2}} \right),$
- $\frac{3n+7}{2} \leq t \leq 2n : P_t(\varphi) = \frac{k}{2} \frac{r_A^{\frac{k}{2}}}{(\kappa^2 + 1)} \left( \kappa^2 e^{i\varphi \frac{k}{2}} + \kappa e^{-i\varphi \frac{k}{2}} \right); k = 2\left(t - \frac{3n+3}{2}\right) + 1.$

### 4.3 Zusammenfassung und Beurteilung der Ergebnisse

Für die approximationsbasierte Kopplung wurde in diesem Abschnitt ein Basissystem vorgestellt. Um die Stabilität der Approximation zu untersuchen, wurde anschließend die Gramsche Matrix des Basissystem (4.1) bezüglich ihrer Konditionszahl betrachtet. Die Gramsche Matrix hat auf dem Intervall  $[-2\pi, 2\pi]$  einen günstigeren Konditionszahlverlauf in der Abhängigkeit von der Anzahl der Kopplungsknoten als auf dem Intervall  $[-\pi, \pi]$  aufgewiesen. Die Konditionszahl war aber für die zwei Fälle „groß“. Da die Stabilität der Approximation sowohl für die Approximationsaufgabe als auch für die Anwendung von der Konsistenzbedingung eine große Rolle spielt, wurde das Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren verwendet, um das Basissystem zu orthogonalisieren und somit die dazu gehörigen numerischen Instabilitäten ausschließen zu können.

## 5 Mathematische Formulierung und Realisierung der approximationsbasierten gekoppelten Methode

Das in Abschnitt 2.4 vorgestellte Verfahren (konsistentes Sampling) wird zur Lösung des approximationsbasierten Kopplungsproblems herangezogen. Anhand der bekannten Verformungswerte (Es wird an dieser Stelle angenommen, dass FE-Lösung schon vorhanden ist, damit man das Sampling-Verfahren anwenden kann) an den Kopplungsknoten auf dem Interface  $\Gamma_{AD}$  wird die analytische Lösung wiederhergestellt. Hier ist es zwischen dem Sampling-Basissystem  $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  und dem Wiederherstellungsbasissystem  $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  zu unterscheiden. Das Sampling-Basissystem stellt die Basisfunktionen der FE-Approximation und das Wiederherstellungsbasissystem sind die Basisfunktionen der Approximationsaufgabe von der analytischen Lösung.

In diesem Verfahren wird vorausgesetzt, dass die Samples:

$$\xi_j(f) = (f, \psi_j), \quad j \in \mathbb{N} \quad (5.1)$$

auf dem Interface  $\Gamma_{AD}$  bekannt sind. Die Aufgabe ist dann, die Funktion  $f$  (Verformungen auf  $\Gamma_{AD}$ ) in der Basis  $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  wiederherzustellen:

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \varphi_j, \quad \alpha_j = (f, \varphi_j). \quad (5.2)$$

Mit anderen Worten werden die Koeffizienten  $\alpha_j$  mit der Ausnutzung von Samples in (5.1) ermittelt. Die Samples  $\xi_j(f)$  sind aber nicht explizit gegeben, da es sich um eine gekoppelte numerische Methode handelt.

Um die Stetigkeit zwischen der analytischen und der FE Lösung gewährleisten zu können, muss die wiederhergestellte Funktion  $\tilde{f}$  die Konsistenzbedingung erfüllen:

$$(\tilde{f}, \psi_j) = (f, \psi_j), \quad j = 1, 2, \dots$$

Diese Bedingung führt zum folgenden linearen System:

$$A d = s,$$

wobei  $A = \begin{pmatrix} (\varphi_1, \psi_1) & \cdots & (\varphi_1, \psi_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi_m, \psi_1) & \cdots & (\varphi_m, \psi_m) \end{pmatrix},$

und  $d^\top = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m),$

und  $s^\top = (\xi_1(f), \xi_2(f), \dots, \xi_m(f)).$

Die Matrix  $A$  ist nicht anderes als eine Basis-Änderungsmatrix zwischen zwei orthogonalen Basissystemen. Diese Matrix kann schlecht konditioniert und sogar nicht invertierbar sein und sie ist nur unitär genau dann, wenn

$$\text{span}\{\varphi_k\}_{k=1}^m = \text{span}\{\psi_k\}_{k=1}^m. \quad (5.3)$$

Wenn das Verfahren für das Kopplungsproblem verwendet wird, muss durch die Bedingung (5.3) die Anzahl der Basisfunktionen der Approximationsaufgabe der Anzahl der Messwerte  $n$  auf dem Interface entsprechen. Auf der anderen Seite ist aber die erforderliche Anzahl von Basisfunktionen des in Abschnitt 4 eingeführten Systems für die Approximationsaufgabe  $2n$ . Zur Lösung dieses Problems man kann entweder eine andere fortgeschrittene Sampling-Methode (beispielsweise Generalised sampling) verwenden, die es erlaubt, ein beliebiges Wiederherstellungsbasissystem unabhängig von der Anzahl der Messwerte zu benutzen, oder man kann das Basissystem im Abschnitt 4 so umformulieren, dass es für die Bestapproximation und für das Kopplungsproblem besser geeignet wird. In [4] wurde eine Umformulierung der analytischen Lösung gegeben.

Die analytische Lösung aus (3.1) auf dem Interface ist:

$$u(r_A, \varphi) = \sum_{k=0,2,\dots}^{N_1} r_A^{\frac{k}{2}} \left[ a_k \left( \kappa e^{i\varphi^{\frac{k}{2}}} + e^{-i\varphi^{\frac{k}{2}}} \right) + \frac{k}{2} \bar{a}_k \left( e^{-i\varphi^{\frac{k}{2}}} - e^{-i\varphi^{\left(\frac{k}{2}-2\right)}} \right) \right] + \\ + \sum_{k=1,3,\dots}^{N_2} r_A^{\frac{k}{2}} \left[ a_k \left( \kappa e^{i\varphi^{\frac{k}{2}}} - e^{-i\varphi^{\frac{k}{2}}} \right) + \frac{k}{2} \bar{a}_k \left( e^{-i\varphi^{\frac{k}{2}}} - e^{-i\varphi^{\left(\frac{k}{2}-2\right)}} \right) \right].$$

Die alternative Darstellungsweise ist:

$$u(r_A, \varphi) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k e^{i\varphi^{\frac{k}{2}}}. \quad (5.4)$$

Das Basissystem  $\{e^{i\varphi^{\frac{k}{2}}}\}$  ist orthogonal auf  $[-2\pi, 2\pi]$  und kann einfach durch Division durch  $2\sqrt{\pi}$  normalisiert werden.

Ein linearer Operator  $\mathcal{M} : L_2(\Gamma_{AD}) \rightarrow L_2(\Gamma_{AD})$  verbindet die beiden Darstellungsweisen wie folgt:

$$\mathcal{M} : \mathbf{a} \mapsto \mathbf{c} = M \cdot \mathbf{a},$$

wobei  $\mathbf{a}$  der Vektor der unbekanntten Koeffizienten in (3.1) ist und  $\mathbf{c}$  der Vektor der unbekanntten Koeffizienten in (5.4) ist.  $M$  ist die Transformationsmatrix und hat eine Größe von  $\dim(M)=2n \times 2n$ . In [4] wurde bewiesen, dass die Determinante  $\det(M)$  kann nicht gleich Null sein und deswegen ist die Transformationsmatrix invertierbar für beliebige Anzahl von Kopplungsknoten auf dem Interface ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ). Die Transformationsmatrix ist wie folgt gegeben:

$$M = \begin{pmatrix} \kappa+1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa+1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa r_A^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} r_A^{\frac{1}{2}} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa r_A^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} r_A^{\frac{1}{2}} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_A(\kappa-1) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_A(\kappa+1) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} r_A^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & 0 & \kappa r_A^{\frac{3}{2}} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} r_A^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & 0 & \kappa r_A^{\frac{3}{2}} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \kappa r_A^{\frac{N_2}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \kappa r_A^{\frac{N_2}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \kappa r_A^{\frac{N_1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \kappa r_A^{\frac{N_1}{2}} \end{pmatrix}.$$

Die Formfunktionen von der alternativen Basis  $\{e^{i\varphi \frac{k}{2}}\}_{k=0}^{n-1}$  (Variante 2) werden im nächsten Abschnitt grafisch gezeigt. Für die weiteren Untersuchungen wird das Basissystem aus dem Abschnitt 4 aber mit  $n$  Basisfunktionen (Variante 1) betrachtet. Die Approximationsaufgabe und das Kopplungsproblem werden auf dem Intervall  $[-2\pi, 2\pi]$  untersucht, wobei das Orthonormalisierungsverfahren der Basisfunktionen mit expliziten Formeln gegeben werden kann. Die Transformationsmatrix für das orthonormale Basissystem auf  $[-2\pi, 2\pi]$  muss mit  $2\sqrt{\pi}$  multipliziert werden.

## 5.1 Formfunktionen des analytischen Gebiets

Die Formfunktionen des analytischen Gebiets können wie folgt hergeleitet werden:

$$\begin{aligned} N_1^A &= \mathbf{u}(r, \varphi, 1, 0, \dots, 0), \\ N_2^A &= \mathbf{u}(r, \varphi, 0, 1, \dots, 0), \\ &\vdots \\ N_n^A &= \mathbf{u}(r, \varphi, 0, 0, \dots, 1). \end{aligned}$$

Die Verformungen im analytischen Gebiet kann dann auf der Basis dieser Formfunktionen dargestellt werden:

$$\mathbf{u}(r, \varphi, U_1, \dots, U_n) = \sum_{k=1}^n N_k^A(r, \varphi) U_k$$

In den Abbildungen 5.1 und 5.2 werden die Formfunktionen vom analytischen Element auf dem Interface für  $n = 5$  (für Variante 1 und 2) gezeigt:

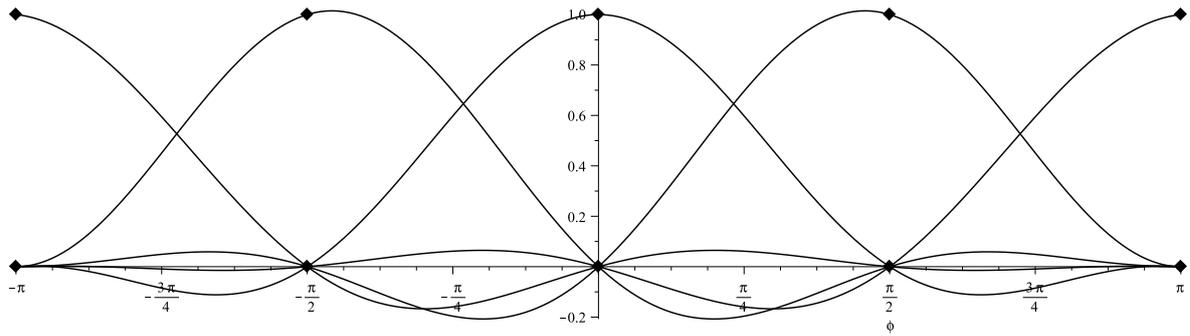


Abbildung 5.1: Formfunktionen des analytischen Elements auf dem Interface  $\Gamma_{AD}$  für  $n = 5$ , Variante 1

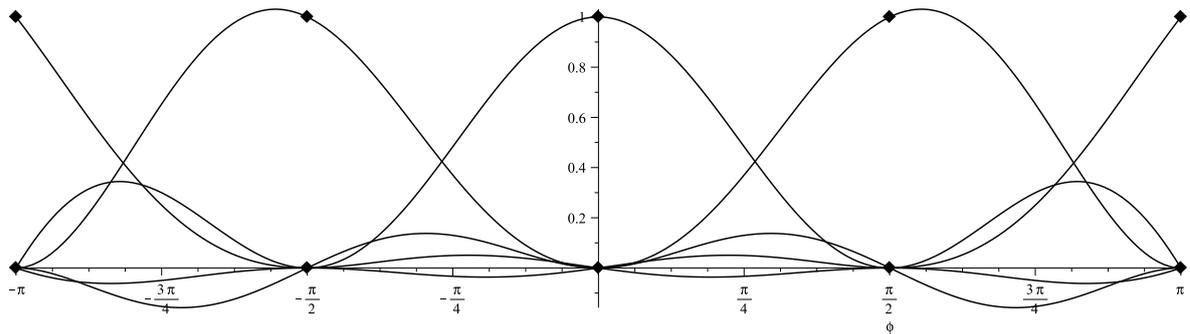


Abbildung 5.2: Formfunktionen des analytischen Elements auf dem Interface  $\Gamma_{AD}$  für  $n = 5$ , Variante 2

Die Formfunktionen des analytischen Element werden in den Abbildungen 5.3 und 5.4 für  $n = 5$  dargestellt. Es kann festgestellt werden, dass jede Formfunktion den Wert 1 an dem entsprechenden Knoten und den Wert 0 an den übrigen Knoten hat und die Formfunktionen unstetig beim Durchqueren der Risskanten und stetig an der Rissspitze sind. Diese Eigenschaft stimmt mit dem mechanischen Modell der analytischen Lösung für das Rissspitzennahfeld im Abschnitt 2.2 überein, wobei die Verschiebungen auf dem gesamten Gebiet stetig sein müssen und beim Durchqueren der Risskanten einen Sprung aufweisen. Darüber hinaus konstruieren die Formfunktionen eine Zerlegung der Eins auf dem gesamten Gebiet  $\Omega_A$  (Abbildungen 5.3f und 5.6g). Aus diesen Gründen können die Formfunktionen für die FE-Approximation verwendet werden.

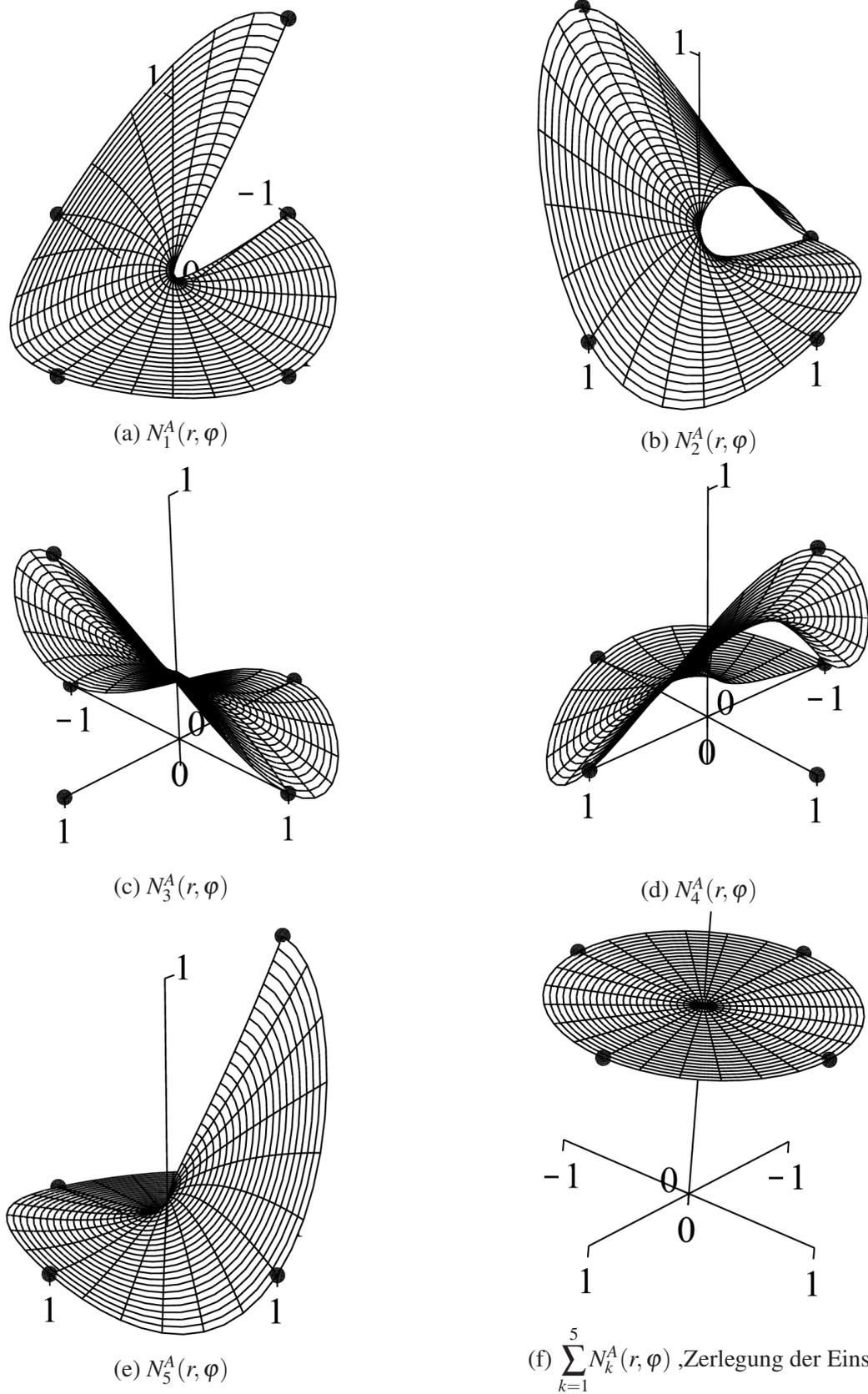


Abbildung 5.3: Formfunktionen des analytischen Elements auf dem gesamten Gebiet für  $n = 5$ , Variante 1

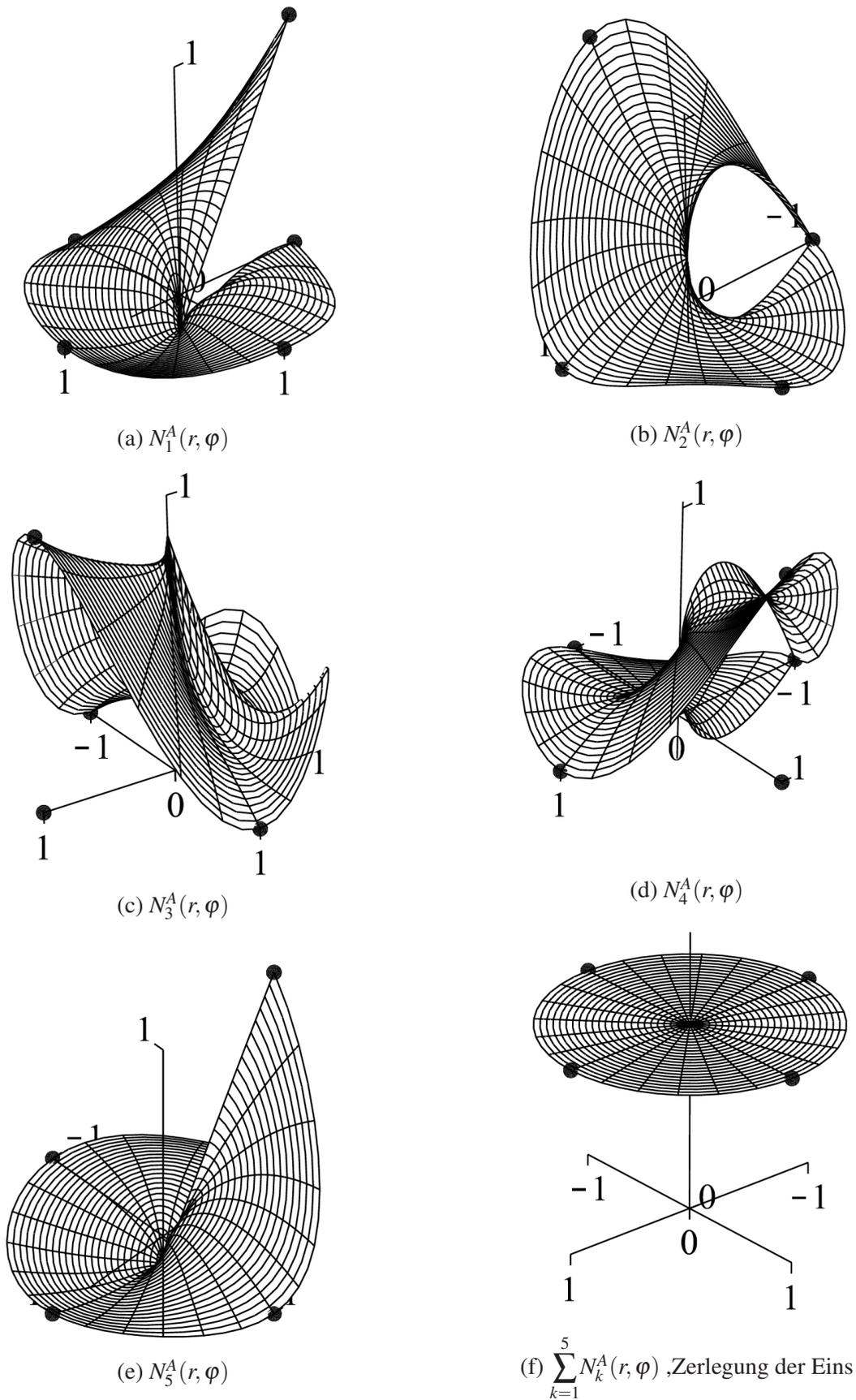


Abbildung 5.4: Formfunktionen des analytischen Elements auf dem gesamten Gebiet für  $n = 5$ , Variante 2

## 5.2 Formfunktionen der Kopplungselemente

Um die Formfunktionen der Kopplungselemente herleiten zu können, wird zunächst ein lokales Koordinatensystem  $(\xi, \eta)$  definiert [4]. Die Kopplungselemente  $\mathbb{T}$  werden mithilfe dieser lokalen Koordinaten beschrieben. Die Winkelkoordinate  $\xi$  dient zur stetigen Kopplung auf dem Interface  $\Gamma_{AD}$ . Die zweite Koordinate  $\eta$  wird als linearer Interpolator zur Verbindung zwischen den Kopplungselementen und den CST-Elementen verwendet.

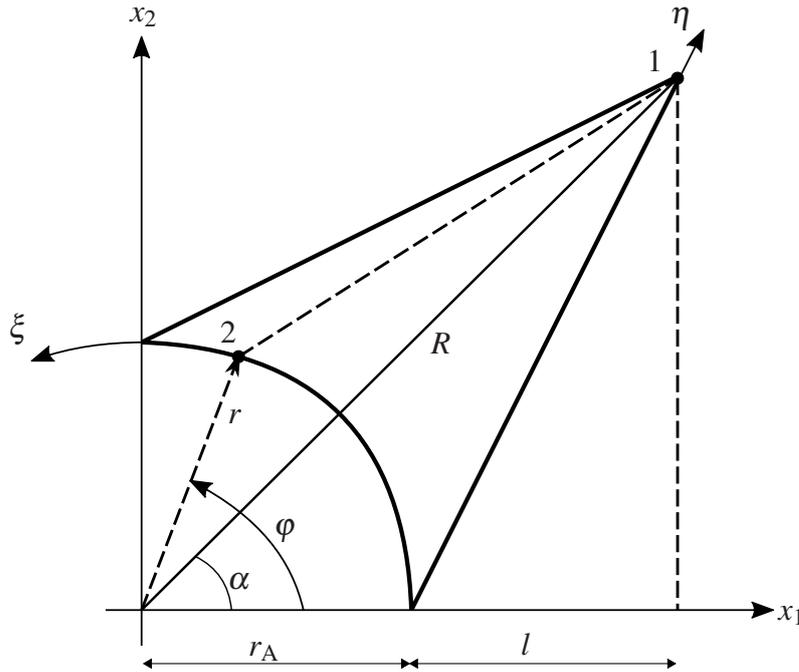


Abbildung 5.5: Lokales Koordinatensystem  $(\xi, \eta)$  für ein Kopplungselement  $\mathbb{T}$

Durch die folgenden Formeln kann das Mapping zwischen dem kartesischen Koordinatensystem und dem lokalen Koordinatensystem eines Kopplungselements realisiert werden [4]:

$$\begin{cases} x_1 = r_A \cos \xi + (R \cos(k\alpha) - r_A \cos \xi) \eta, & \eta \in [0, 1], \\ x_2 = \frac{x_1 - R \cos(k\alpha)}{r_A \cos \xi - R \cos(k\alpha)} (r_A \sin \xi - R \sin(k\alpha)) + R \sin(k\alpha), & \xi \in [-\pi, \pi], \end{cases} \quad (5.5)$$

wobei  $R$  wie folgt gegeben ist:

$$R = \frac{r_A + l}{\cos \alpha},$$

$k = 1, 3, \dots, 2N - 1$ , wobei  $N$  die Anzahl der Kopplungselemente ist,

$\alpha = \frac{\pi}{4(n+1)}$ , wobei  $n$  die Anzahl der der Kopplungsknoten auf dem Intervall  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  ist.

Nun können die Formfunktionen der Kopplungselemente im Bezug auf dem lokalen Koordinatensystem hergeleitet werden. Die Herleitung erfolgt in zwei Schritten. Im ersten Schritt werden

die Formfunktionen auf dem Interface  $\Gamma_{AD}$  bestimmt. Aufgrund der Konsistenzbedingung (5.3) stimmen die Formfunktionen der Kopplungselemente mit der Formfunktionen des analytischen Elements auf  $\Gamma_{AD}$  überein. Für die Kopplungselemente wird aber die Koordinate  $\varphi$  durch die Koordinate  $\xi$  ersetzt:

$$\begin{aligned}\hat{N}_1^{\mathbb{T}} &:= N_1^A(r_A, \xi), \\ \hat{N}_2^{\mathbb{T}} &:= N_2^A(r_A, \xi), \\ &\vdots \\ \hat{N}_n^{\mathbb{T}} &:= N_n^A(r_A, \xi).\end{aligned}\tag{5.6}$$

Im zweiten Schritt wird jede Formfunktion in (5.6) mit einem linearen Interpolator  $\eta \in [0, 1]$  multipliziert. Zusätzlich dazu wird ein lineare Funktion hinzugefügt:

$$\begin{aligned}N_1^{\mathbb{T}} &:= N_1^A(r_A, \xi)(1 - \eta), \\ N_2^{\mathbb{T}} &:= N_2^A(r_A, \xi)(1 - \eta), \\ &\vdots \\ N_n^{\mathbb{T}} &:= N_n^A(r_A, \xi)(1 - \eta), \\ N_{n+1}^{\mathbb{T}} &:= \eta.\end{aligned}\tag{5.7}$$

Die vorgeschlagenen Formfunktionen in (5.7) sind stetig auf dem Interface  $\Gamma_{AD}$  zwischen der analytischen Lösung und der FE-Lösung. Durch die konstruierten Formfunktionen von dem analytischen Element, den Kopplungselementen und den CST-Elementen ist eine globale  $C^0$  Stetigkeit gewährleistet.

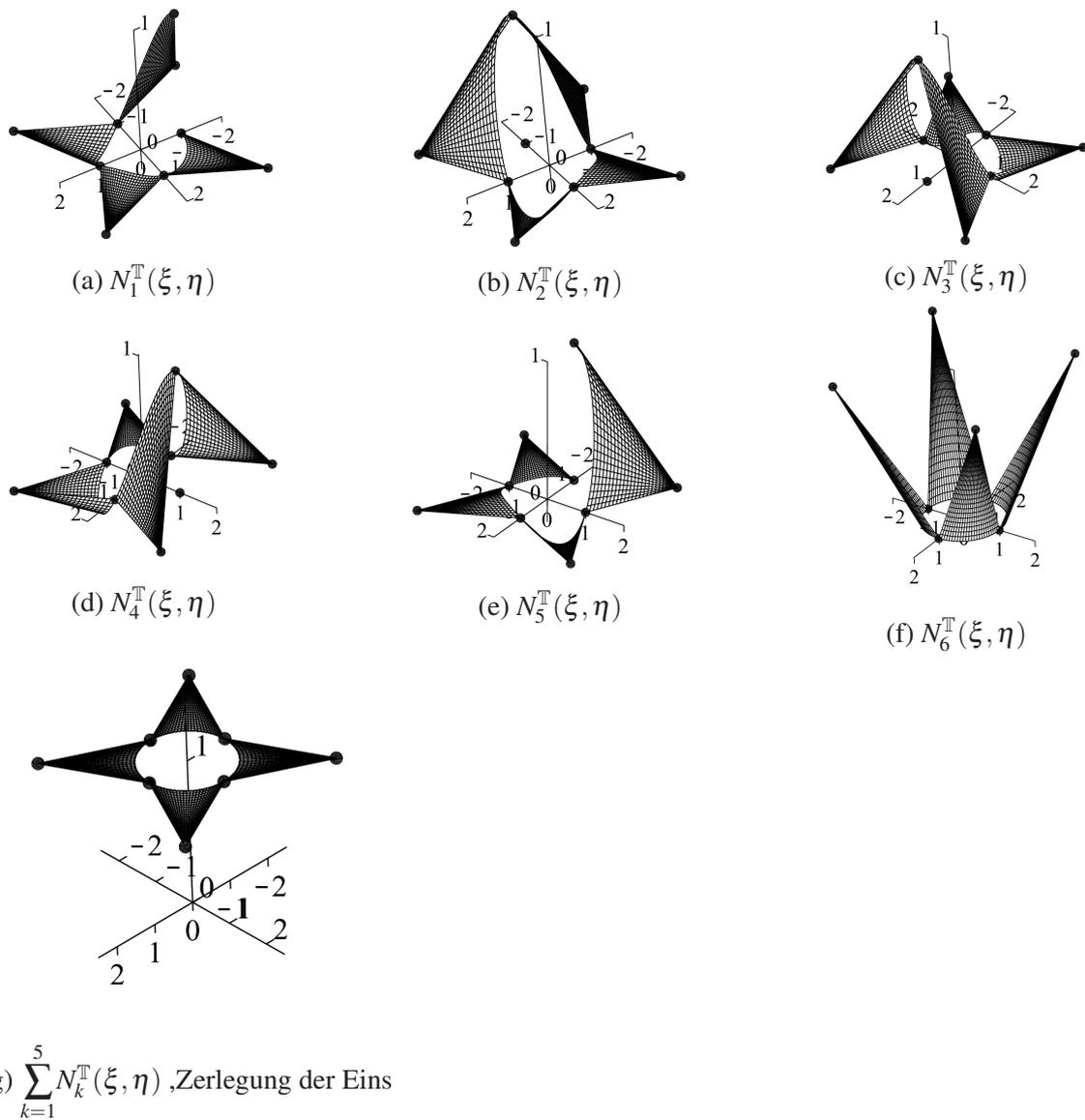


Abbildung 5.6: Formfunktionen der Kopplungselemente für  $n = 5$ ,

### 5.3 Algorithmus zur Lösung des approximationsbasierten Kopplungsproblems

Die Bearbeitungsschritte zur Realisierung der approximationsbasierten Kopplung kann folgendermaßen zusammengefasst werden:

1. Radius des analytischen Gebiets  $r_A$  festlegen;
2. Anzahl der Kopplungselemente bestimmen;
3. Wahl eines Basissystems für die Approximationsaufgabe (mit  $n$  Basisfunktionen);
4. Das gewählte Basissystem orthonormalisieren;
5. Konsistenzbedingung (konsistentes Sampling) anwenden;
6. Formfunktionen des analytischen Elements und der Kopplungselemente herleiten.

### 5.4 Nummerierung der Systemknoten

Ein anderes maßgebliches Problem bei der Methode der finiten Elemente ist die Knotennummerierung. Die globale Knotennummerierung hat einen wesentlichen Einfluss auf die Anzahl der Rechenoperationen zur Lösung des linearen Gleichungssystems. Aus diesem Grund ist es bei großen Systemen wichtig, die Knotennummerierung im Sinne einer geringen Bandbreite möglichst optimal zu wählen. Daneben ist die Konditionszahl der globalen Steifigkeitsmatrix von der gewählten Nummerierung abhängig, was eine maßgebende Rolle für die Stabilität des Lösungsverfahrens spielt.

Die in [4] vorgestellte Strategie zur Knotennummerierung wird für diese Arbeit übernommen. Bei dieser Strategie wird mit dem Spezialelement (analytisches Element mit den Kopplungselementen) gegen den Uhrzeigersinn angefangen, ohne die Knotennummerierung zu optimieren, da die Minimierung der Rechenzeit kein Schwerpunkt für diese Arbeit ist. Ein Beispiel für die verwendete Nummerierung wird in Abbildung gezeigt. Sobald die Formfunktionen von den verwendeten Elementen bekannt sind und die Knoten nummeriert werden, kann mit dem Aufstellen der globalen Steifigkeitsmatrix und linearen Gleichungssystems angefangen werden. Für diesen Zweck wird ein Programm, welches im Rahmen der Promotion [4] entwickelt wurde, als eine Vorlage verwendet.

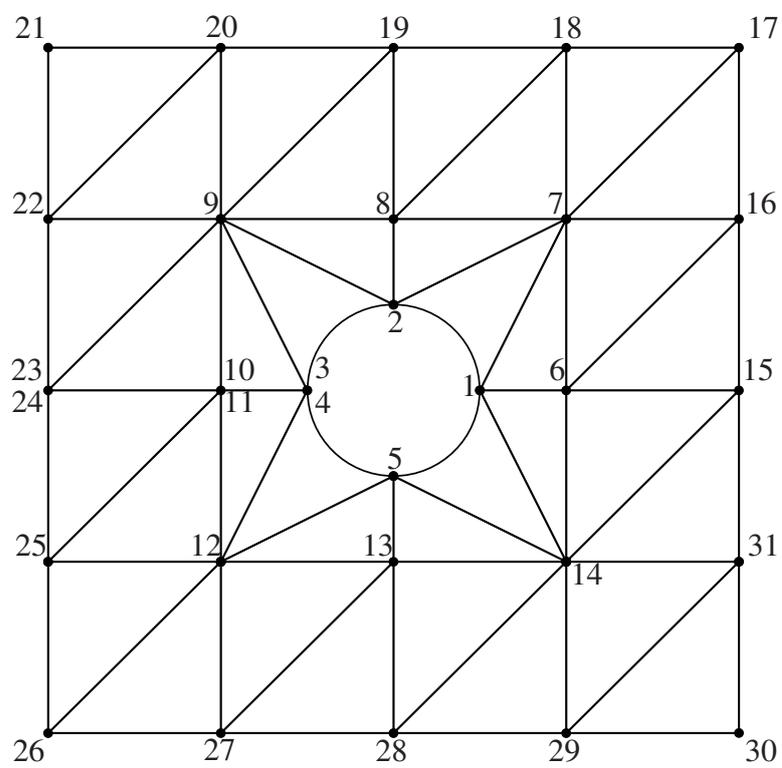


Abbildung 5.7: Ein Beispiel für Knotennummerierung

## 6 Numerische Simulationen mit der entwickelten Methode

Nachdem in den vorherigen Abschnitten die theoretischen Grundlagen und die für die approximationsbasierte Kopplung verwendeten mathematischen Werkzeuge vorgestellt wurden, werden in diesem Abschnitt numerische Simulationen durchgeführt. Es wird Plausibilität der Ergebnisse der Simulationen überprüft. Bei dem gewählten Randwertproblem wird die Simulationen mit vier Kopplungselementen und für den Fall  $N_1 = 3$ ,  $N_2 = 4$  durchgeführt und grundlegender Fragen wie beispielsweise die Stetigkeit der Verformungen auf dem Interface  $\Gamma_{AD}$  und Spannungsverteilung betrachtet.

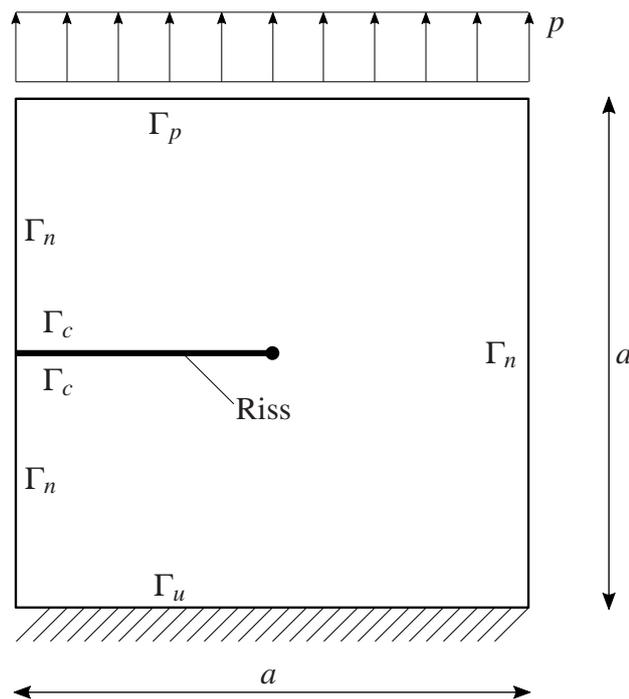


Abbildung 6.1: Randwertaufgabe des ersten Beispiels

Die Randbedingungen sind wie folgt definiert:

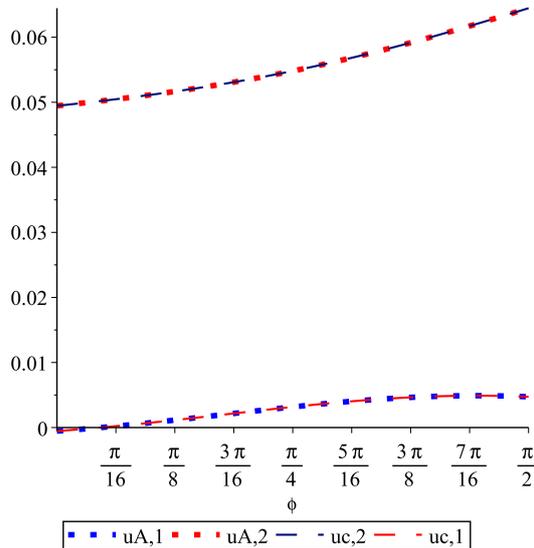
$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u} = 0, \quad \text{auf } \Gamma_u, \\ \sigma_n = 0, \quad \text{auf } \Gamma_n, \\ \sigma_n = 0, \quad \text{auf } \Gamma_c, \\ \sigma_n = p, \quad \text{auf } \Gamma_p, \end{array} \right. \quad (6.1)$$

Für die numerischen Simulationen kommt Beton C60/75 mit den folgenden Materialparametern zum Einsatz:  $E_{cm} = 39 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2$ ,  $\nu = 0.2$ .

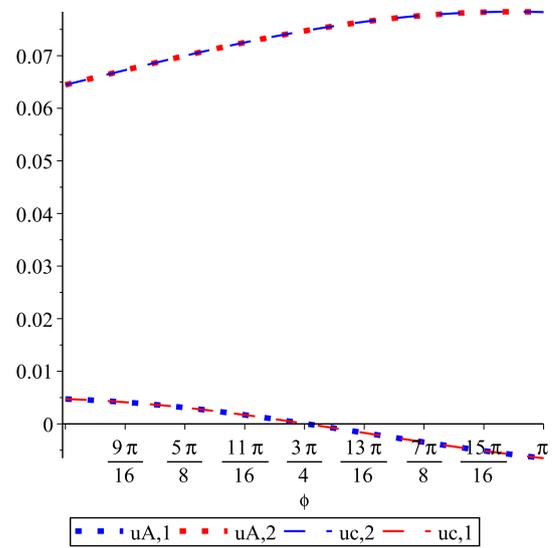
Die Betonscheibe hat Abmessungen von  $(a \times a = 20\text{mm} \times 20\text{mm})$  und wird mit einer konstanten Zugspannung  $p = 80 \text{ N/mm}^2$  belastet. Dabei wird der ebene Dehnungszustand betrachtet.

### 6.0.1 Stetigkeit der Verformungen auf dem Interface $\Gamma_{AD}$

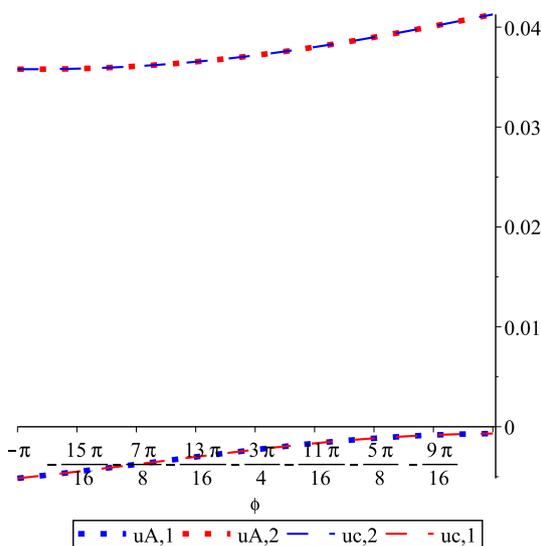
Aufgrund der angesetzten Konsistenzbedingung sind die Verformungen des analytischen Elements und der Kopplungselemente auf dem Interface stetig. Die Abbildung 6.2 zeigt diese Stetigkeit, wobei  $u_A$  die Verformungen des analytischen Elements und  $u_c$  die Verformungen der Kopplungselemente sind.



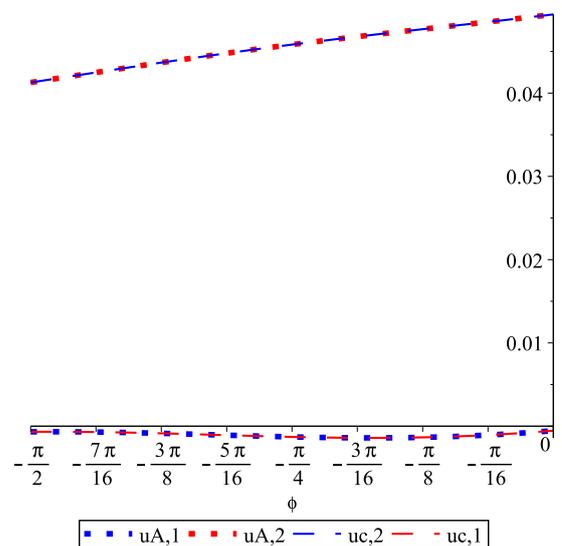
(a) Verformungsstetigkeit auf Intervall  $[0, \frac{\pi}{2}]$



(b) Verformungsstetigkeit auf Intervall  $[\frac{\pi}{2}, \pi]$



(c) Verformungsstetigkeit auf Intervall  $[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$



(d) Verformungsstetigkeit auf Intervall  $[-\frac{\pi}{2}, 0]$

Abbildung 6.2: Stetigkeit der Verformungen auf dem Interface  $\Gamma_{AD}$

### 6.0.2 Vergleich der Verformungen zwischen der Methode der approximationsbasierten Kopplung und der Methode der interpolationsbasierten Kopplung auf $\Gamma_{AD}$

Es wird zunächst beiden Methoden grafisch gegenübergestellt. Beide Methoden weisen gute Über-

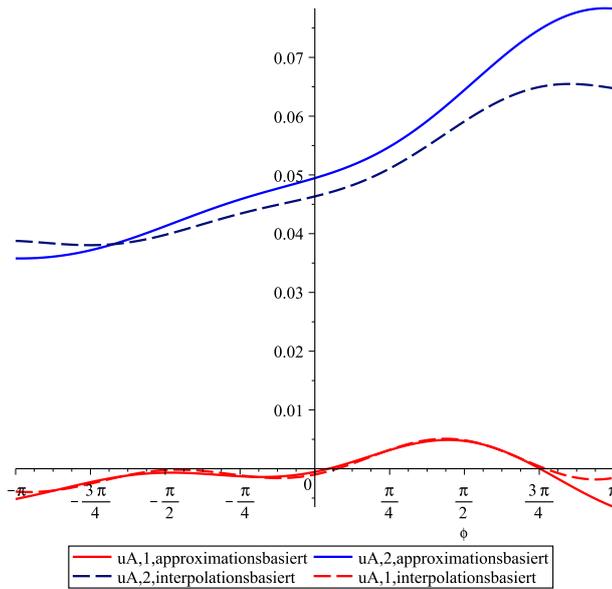


Abbildung 6.3: Vergleich der Verformungen auf dem Interface  $\Gamma_{AD}$  zwischen der Methode der approximationsbasierten Kopplung und der Methode der interpolationsbasierten Kopplung

einstimmung bezüglich der Verformungen in Achse-1 auf. In der anderen Richtung zeigt die Methode der approximationsbasierten Kopplung größere Verformung.

### 6.0.3 Spannungen auf dem analytischen Gebiet $\Omega_{AD}$

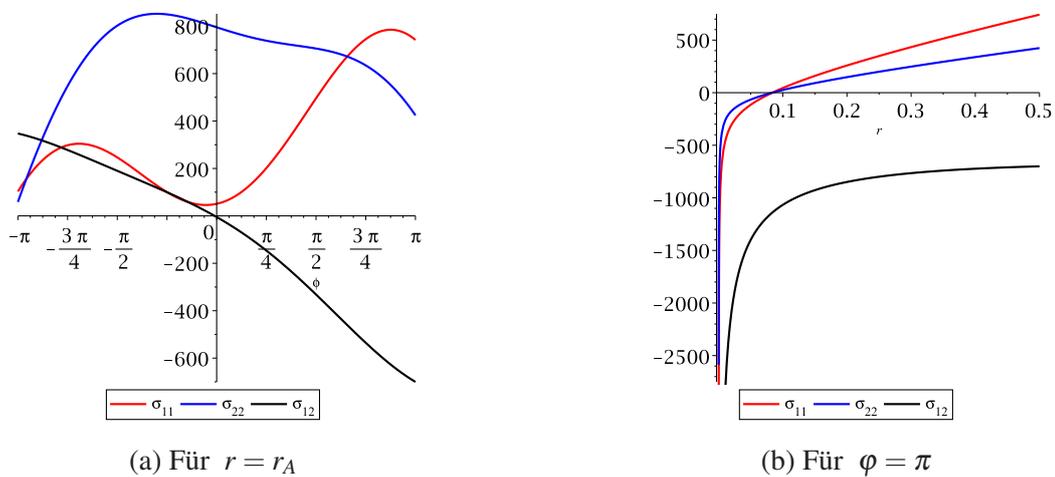
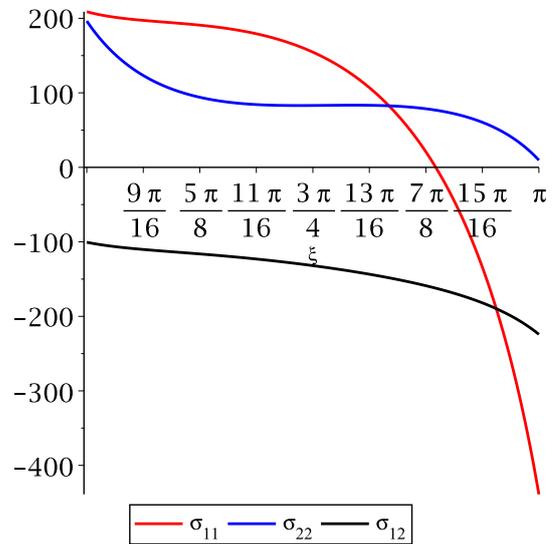
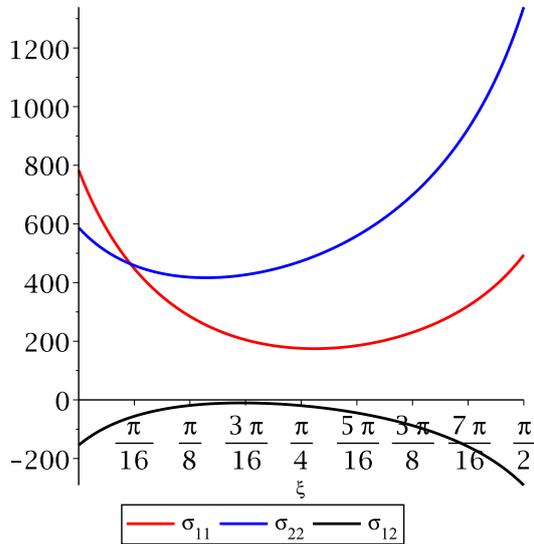


Abbildung 6.4: Spannungen im analytischen Gebiet

An der Risspitze ist es nach dem mechanischen Modell zu erwarten, dass die Spannungen  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  und  $\sigma_{12}$  gegen unendlich gehen. In der Abbildung 6.4b ist es offensichtlich, dass die Simulationsergebnisse diese Voraussetzung erfüllen.

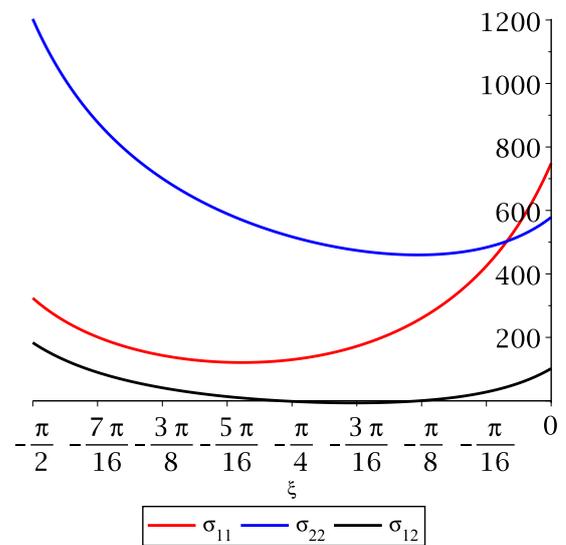
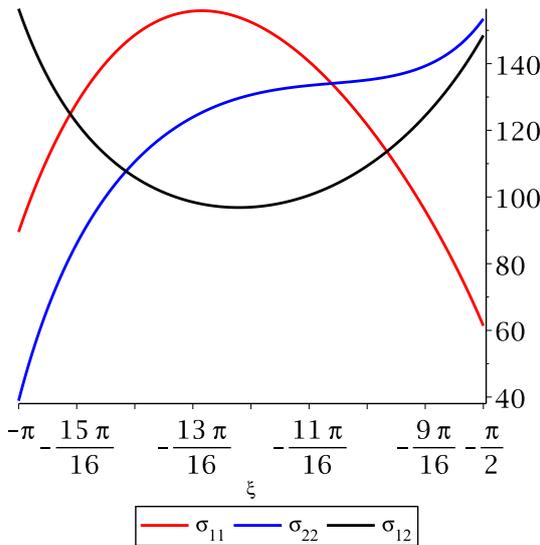
### 6.1 Spannungen bei den Kopplungselementen

In der Abbildung 6.5 wird die Spannungsverteilung bei den Kopplungselementen auf dem Intervall  $\Gamma_{AD}$  ( $\eta = 0$ ) dargestellt:



(a) Spannungen bei dem ersten Kopplungselement auf Intervall  $[0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\eta = 0$

(b) Spannungen bei dem ersten Kopplungselement auf Intervall  $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ ,  $\eta = 0$



(c) Spannungen bei dem ersten Kopplungselement auf Intervall  $[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$   $\eta = 0$

(d) Spannungen bei dem ersten Kopplungselement auf Intervall  $[-\frac{\pi}{2}, 0]$   $\eta = 0$

Abbildung 6.5: Spannungsverteilung bei den Kopplungselementen auf dem Interface  $\Gamma_{AD}$

#### 6.1.1 Spannungsverteilung in der untersuchten Scheibe

Der Gegenstand dieser Arbeit ist es, die entwickelte Methode bezüglich der resultierenden Verformungen (mit einer globalen  $C^0$  Stetigkeit) zu untersuchen. Für die praktischen Anwendungen ist aber auch die Qualität der Berechnung und der Darstellung von den Spannungen von entscheidender

der Bedeutung, was eine wichtige Frage für künftige Untersuchungen sein sollte. An dieser Stelle wird die Spannungsverteilung von dem rein akademischen Beispiel grafisch dargestellt. Die Span-

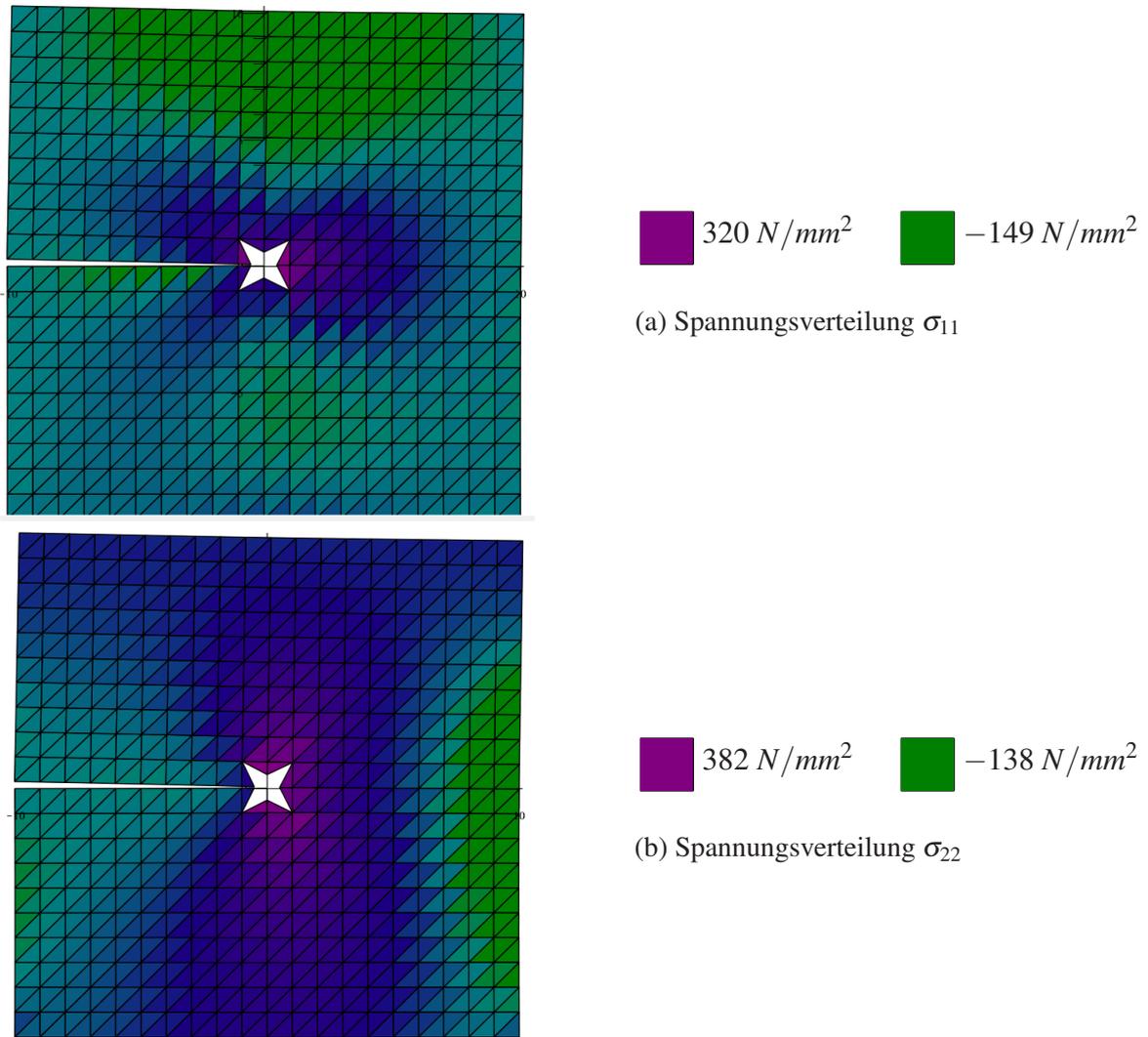


Abbildung 6.6: Spannungsverteilung in der untersuchten Scheibe

nungswerte überschreiten deutlich die Druck- und Zugfestigkeit des Betons ( $f_{ck} = 60 \text{ N/mm}^2$  und  $f_{ctm} = 4.4 \text{ N/mm}^2$ ), da das Stoffgesetz linear elastisch ist und die angesetzte Belastung hoch ist. Die maximalen Spannungen ( $\sigma_{11}$  und  $\sigma_{22}$ ) sind im Bereich der Singularität, wie in der Abbildung 6.6 gezeigt wird, und der mittlere Bereich des vertikalen rechten Rands wird unter Druckspannung  $\sigma_{22}$  belastet (Abbildung 6.6b) und im Bereich der Rissrändern treten minimale Spannungen auf, was als plausible Beobachtungen für die Spannungsverteilung beurteilt werden kann.

## 7 Auswertungen, Zusammenfassung und Ausblick

Das Hauptziel der vorliegenden Arbeit war es, eine stetige Kopplung zwischen der analytischen und numerischen Lösung von Randwertaufgaben mit Singularitäten zu realisieren. Durch die interpolationsbasierte gekoppelte Methode kann eine globale  $C^0$  Stetigkeit erzielt werden. Für diesen Zweck wird ein spezielle finite Element (Kopplungselement) verwendet, das die Stetigkeit der Lösung sowohl mit dem analytischen Element als auch mit den normalen CST Elementen gewährleistet.

Die interpolationsbasierte gekoppelte Methode ist zwar für beliebige Knotenanzahl auf dem Interface  $\Gamma_{AD}$  anwendbar, aber es konnte durch die Untersuchung von der Interpolationsmatrix und numerische Simulationen festgestellt werden, dass sie schlecht konditioniert ist.

Um das Problem mit den numerischen Instabilitäten zu bewältigen, wurde eine approximationsbasierte Kopplungsmethode entwickelt und untersucht. Die Stabilität dieser Methode wurde anschließend anhand der Untersuchung von der Gramschen Matrix des verwendeten Basissystems auf zwei Intervallen  $[-\pi, \pi]$  und  $[-2\pi, 2\pi]$  beurteilt. Die Gramsche Matrix auf dem Intervall  $[-2\pi, 2\pi]$  hat einen günstigeren Konditionszahl in der Abhängigkeit von der Anzahl der Kopplungsknoten auf dem Interface aufgewiesen. Um die dazu gehörigen numerischen Instabilitäten ausschließen zu können wird das Basissystem mit Hilfe vom Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren auf beiden Intervallen orthogonalisiert. Das orthogonale Basissystem lässt sich auf dem Intervall  $[-2\pi, 2\pi]$  mit expliziten Formeln schreiben.

Die Methode des konsistentes Sampling, die häufig in der Nachrichtentechnik verwendet wird, wurde zur Realisierung von der approximationsbasierten Kopplung herangezogen. Eine Beschränkung dieser Methode ist es, dass die Anzahl der Sampling-Basisfunktionen muss gleich der Anzahl der Wiederherstellungsbasisfunktionen sein. Das hat dazu geführt, dass das eingeführt Basissystem (mit  $2n$  Basisfunktionen) nur mit  $n$  Basisfunktion verwendet werden kann.

Zur Lösung diese Problems wurde ein alternatives Basissystems (Variante 2) vorgestellt. Für die Verwendung dieses Basissystems ist aber eine Transformationsmatrix  $M$  nötig und bei der Orthogonalisierung des Basissystems auf dem Intervall  $[-\pi, \pi]$  kann die Herleitung von dieser Matrix kompliziert und aufwendig sein.

Die Formfunktionen wurden anschließend für die beiden Varianten hergeleitet und grafisch (für  $n = 5$ ) dargestellt und wurde gezeigt, dass diese Funktionen die Anforderungen an den Formfunktionen erfüllen und können somit für die FE-Approximation verwendet werden.

Anhand numerischer Simulationen, die mit der Variante 1 (mit Orthogonalisierung auf dem Intervall  $[-2\pi, 2\pi]$ ) durchgeführt wurden, wurden die grundlegenden Fragen (Beispielsweise: Stetigkeit der Verformungen auf dem Interface  $\Gamma_{AD}$ , Spannungen auf dem analytischen Gebiet) überprüft.

In dieser Arbeit wurde eine alternative gekoppelte Methode entwickelt. Es ist notwendig, die Konvergenz dieser Methode sowohl theoretisch als auch numerisch zu untersuchen und dann mit der interpolationsbasierten gekoppelten Methode zu vergleichen. Die Untersuchung von der numeri-

schen Konvergenz der Methode kann anhand eines Beispiel mit einer schon bekannten analytischen Lösung durchgeführt werden. Es ist auch sinnvoll, die approximationsbasierte Kopplungsmethode mit verschiedenen Basissystemen (Beispielsweise: Variante 1 mit Orthogonalisierung auf  $[-\pi, \pi]$  und auf  $[-2\pi, 2\pi]$  und Variante 2 mit Orthogonalisierung auf  $[-\pi, \pi]$  und auf  $[-2\pi, 2\pi]$ ) zu untersuchen, um das optimale Basissystem für diese Methode zu bestimmen.

Eine wichtige Fragestellung für die künftigen Untersuchungen ist es, eine fortgeschrittene Sampling-Methode zu verwenden. Mit dieser Sampling-Methode kann man die Anzahl Wiederherstellungsbasisfunktionen unabhängig von der Anzahl der Sampling-Basisfunktionen wählen.

Weitere Frage wäre es eine andere numerische Methode wie zum Beispiel X-FEM oder GFEM zu verwenden.

## Abbildungsverzeichnis

2.1 Beanspruchungen in Inneren eines Körpers und äußere Kräfte. . . . .	4
2.2 Spannungskomponenten am herausgeschnittenen Quaderelement. . . . .	5
2.3 Rissspitzennahfeld . . . . .	8
2.4 Unterteilung vom Gebiet $\Omega$ in Teilgebiete. . . . .	13
2.5 Formfunktion $N_1$ für ein Dreieckselement . . . . .	14
3.1 Gebietszerlegung und das spezielle Element . . . . .	17
3.2 Vergleich der Knotenverteilung. . . . .	20
3.3 Konditionszahl bei einer äquidistanten Knotenverteilung . . . . .	22
3.4 Konditionszahl für Tschebyschow-Knoten ohne Ersatz . . . . .	23
3.5 Konditionszahl für Tschebyschow-Knoten mit Ersatz . . . . .	24
3.6 Beurteilungskriterium $k_1$ . . . . .	25
3.7 Beurteilungskriterium $k_2$ . . . . .	25
3.8 Interpolationsgenauigkeit in Abhängigkeit von der Anzahl der Basisfunktionen. . . . .	26
4.1 Konditionszahl der Gramschen Matrix im Intervall $[-2\pi, 2\pi]$ . . . . .	31
5.1 Formfunktionen des analytischen Elements auf dem Interface $\Gamma_{AD}$ für $n = 5$ , Variante 1 . . . . .	37
5.2 Formfunktionen des analytischen Elements auf dem Interface $\Gamma_{AD}$ für $n = 5$ , Variante 2 . . . . .	37
5.3 Formfunktionen des analytischen Elements auf dem gesamten Gebiet für $n = 5$ , Variante 1 . . . . .	38
5.4 Formfunktionen des analytischen Elements auf dem gesamten Gebiet für $n = 5$ , Variante 2 . . . . .	39
5.5 Lokales Koordinatensystem $(\xi, \eta)$ für ein Kopplungselement $\mathbb{T}$ . . . . .	40

---

5.6	Formfunktionen der Kopplungselemente für $n = 5$ , . . . . .	42
5.7	Ein Beispiel für Knotennummerierung . . . . .	44
6.1	Randwertaufgabe des ersten Beispiels . . . . .	45
6.2	Stetigkeit der Verformungen auf dem Interface $\Gamma_{AD}$ . . . . .	46
6.3	Vergleich der Verformungen auf dem Interface $\Gamma_{AD}$ zwischen der Methode der approximationsbasierten Kopplung und der Methode der interpolationsbasierten Kopplung . . . . .	47
6.4	Spannungen im analytischen Gebiet . . . . .	47
6.5	Spannungsverteilung bei den Kopplungselementen auf dem Interface $\Gamma_{AD}$ . . . . .	48
6.6	Spannungsverteilung in der untersuchten Scheibe . . . . .	49

## Tabellenverzeichnis

3.1	Determinante der Interpolationsmatrix in Abhängigkeit von der Knotenanzahl . . . .	21
4.1	Konditionszahl der Gramschen Matrix in Abhängigkeit von der Anzahl der Kopp- lungsknoten . . . . .	31

---

## Literatur

- [1] Harold Liebowitz. *Fracture, an advanced treatise*. Volume II: Matematical fundamentals, Academic Press, 1968.
- [2] Ted Anderson. *Fracture mechanics. Fundamentals and application*. Taylor & Francis Group, 2005.
- [3] K. Meinhard. *Finite Elements in Fracture Mechanics*. Solid Mechanics and Its Applications, Springer, 2014.
- [4] D. Legatiuk. *Evaluation of the coupling between an analytical and a numerical solution for boundary value problems*. PhD thesis, Bauhaus-Universität Weimar, 2015.
- [5] Reinhard Piltner. *Some remarks on finite elements with an elliptic hole*. Finite elements in analysis and design, Volume 44, Issues 12-13, 2008.
- [6] Reinhard Piltner. *Spezielle finite Element mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen*. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, 1982.
- [7] N.I.Mußchelischwili. *Einige Grundaufgaben der mathematischen Elastizitätstheorie*. VEB Fachbuchverlag, Leipzig, 1971.
- [8] Reinhold Kienzler and Roland Schröder. *Einführung in die Höhere Festigkeitslehre. 2., überarbeitete Auflage*. Springer Vieweg, 2019.
- [9] Ph Ciarlet. *Lectures on The Finite Element Method*. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1975.
- [10] Ph Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*. North-Holland Publishing Company, 1978.
- [11] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, and J. Z. Zhu. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals, Seventh Edition*. Butterworth-Heinemann, Elsevier, 2013.
- [12] C. Hansen Anders, Adcock Ben, Teschke Gerd, and Roman Bogdan. *Generalized sampling: stable reconstructions, inverse problems and compressed sensing over the continuum*. In Advances in Imaging and Electron Physics (Vol. 182), 187279, 2014.
- [13] C. Hansen Anders, Adcock Ben, Teschke Gerd, and Herrholz Evelyn. *Generalized sampling: extension to frames and inverse and ill-posed problems*. Inverse Problems, 29, 015008, 2013.
- [14] K. Gürlebeck and D. Legatiuk. *On the continuous coupling of finite elements with holomorphic basis function*. Hypercomplex Analysis: New Perspectives and Applications, Birkhäuser, Basel, 2014.

- [15] S. Bock, D. Legatiuk, and K. Gürlebeck. *On the continuous coupling between analytical and finite element solutions*. Science and Technics Publishing Hous, Hanoi, 2012.
- [16] Fink D. Kurtis and John H. Mathews. *Numerical Methods using MATLAB*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1993.
- [17] Philip J. Davis. *Interpolation and Approximation*. Dover Publications, Inc, 1975.
- [18] Ward Cheney and David Kincaid. *Linear Algebra: Theory and Applications*. Sudbury, Ma: Jones and Bartlett., 2009.
- [19] O. Steinbach. *Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme*. B. G. Teubner Verlag, Wiesbaden, 2005.

## **Ehrenwörtliche Erklärung**

Ich erkläre hiermit ehrenwörtlich, dass ich die vorliegende Arbeit ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Die aus anderen Quellen direkt oder indirekt übernommenen Daten, Methoden und Konzepte sind unter Angabe der Quellen gekennzeichnet. Die Arbeit wurde bisher weder im In- noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt. Ich versichere ehrenwörtlich, dass ich nach bestem Wissen die reine Wahrheit gesagt und nichts verschwiegen habe.

Ort, Datum:

Unterschrift: