

Archivieren von Bachelor- oder Masterarbeiten im Online-Publikationssystem OPUS

Der Online Publikations-Server (OPUS) wird von der Universitätsbibliothek bereitgestellt. In OPUS können alle Angehörigen - Lehrende oder Studierende - der Bauhaus-Universität Weimar Dokumente von längerfristigem wissenschaftlichem bzw. künstlerischem Belang in elektronischer Form im Internet veröffentlichen.

Dazu zählen neben Dissertationen und Habilitationsschriften auch Aufsätze, Proceedings, Research Papers, Reports, Bachelor-, Diplom- und Masterarbeiten. Die Arbeiten werden dauerhaft archiviert, mit Hilfe der Autoren erschlossen und bibliographisch nachgewiesen. Die Dokumente werden zudem mit einer URN (Uniform Resource Name) versehen und an den Archivserver der Deutschen Bibliothek weitergeleitet → <https://portal.dnb.de>.

OPUS gewährleistet den einfachen, schnellen und kostenfreien Zugriff auf Volltexte weltweit.

Abschlussarbeiten von Studierenden der Bauhaus-Universität Weimar (Bachelor- oder Masterarbeiten) werden gespeichert, wenn die Publikation durch den Erstprüfer befürwortet und die Arbeit mindestens mit der Note "gut" bewertet wurde.

Der Autor/die Autorin muss selbständig den digitalen Volltext und die erforderlichen Metadaten (u. a. Dokumententyp, Originaltitel, Verfasser, Fachbereich/Institut, kontrollierte Schlagwörter, Fachklassifikation, Inhaltszusammenfassung...) über ein Web-Formular einreichen.

Nach einer formalen inhaltlichen Kontrolle wird das Dokument in OPUS freigeschaltet. Über eine Rechercheoberfläche kann das Dokument im Publikationssystem der Universität und in weiteren Online-Portalen recherchiert, gelesen und mittels download weitergegeben werden. In den Online-Katalog der Bibliothek werden diese Arbeiten nicht aufgenommen.

Hilfe finden Sie unter den Leitlinien für die Erfassung in OPUS.

Die Bachelorarbeit/die Masterarbeit* wird in OPUS veröffentlicht.

Name des Absolventen

..... Thai Cuong Nguyen

Name des Erstprüfers

..... apl. Prof. Dr. Reinhard Illge

.....
Unterschrift des Absolventen

..... R. Illge

Unterschrift des Erstprüfers

Bachelorarbeit

Flächen zweiter Ordnung - Dächer müssen nicht eben sein

Eingereicht von: Thai Cuong Nguyen
Eingereicht am: 04.04.2018
E-Mail: thai.cuong.nguyen@uni-weimar.de
Fakultät: Bauingenieurwesen
Matrikel-Nr.: 115149

Erstprüfer: apl. Prof. Dr. rer. nat. habil. Reinhard Illge
Zweitprüfer: Dr. rer. nat. Sebastian Bock
Professur: Angewandte Mathematik

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
2	Kurven zweiter Ordnung - Geometrische Eigenschaften	5
2.1	Ellipse	5
2.2	Hyperbel	10
2.3	Parabel	15
3	Flächen zweiter Ordnung	18
3.1	Hauptachsentransformation in die Normalform	19
3.2	Klassifikation von Flächen zweiter Ordnung	23
3.3	Ellipsoid	26
3.4	Elliptisches Paraboloid	30
4	Anwendung von Quadriken	35
4.1	In der Mechanik	35
4.2	In der Geodäsie	36
4.3	Im Bauwesen	37

Abbildungsverzeichnis

1	Ellipse in erster Hauptlage.	6
2	Hyperbel in erster Hauptlage.	11
3	Nach rechts geöffnete Parabel in erster Hauptlage.	16
4	Beispiel eines transformierten elliptischen Paraboloids.	23
5	Ellipsoid.	26
6	a) Zusammengedrücktes und b) langgestrecktes Rotationsellipsoid. . .	27
7	Das Ellipsoid im Beispiel und die Tangentialebene im Punkt T. . . .	29
8	Das elliptische Paraboloid.	31
9	Rotationsparaboloid mit der Flächengleichung $x^2 + y^2 - z = 0$	31
10	Das elliptische Paraboloid im Beispiel und die Tangentialebene im Punkt T.	33
11	Beispiel von Wurfparabel.	35
12	Ellipsoidische Koordinaten.	37
13	Erzeugung eines einschaligen Hyperboloids durch Rotation einer zur Achse windschiefen Geraden.	38
14	Beispiele für Hyperboloidkonstruktionen.	40
15	Das hyperbolische Paraboloid als a) Schiebfläche und b) Regelfläche. .	41
16	Tragverhalten von HP-Schalen.	42
17	Teepott Warnemünde in Rostock.	43
18	Die Dachkonstruktion von L'Oceanogràfic in Valencia.	43
19	Die Karlskirche in Wien mit ellipsoidförmiger Kuppel.	44
20	Die Dächer des berühmten Opernhauses in Sydney waren aus einer einzelnen Kugel geschnittene Segmente.	44

1 Einleitung

In dieser Arbeit wollen wir uns mit den Quadriken beschäftigen. Quadriken stellen eine bedeutende Gruppe geometrischer Objekte dar. Sie werden in der Physik, Computergrafik, Fotoverarbeitung, Modellierungs- und Visualisierungsprogrammen angewendet. Unter einer Quadrik verstehen wir in einem n -dimensionalen Raum die Punktmenge, deren Koordinaten einer quadratischen Gleichung genügen.

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_i x_i + c = 0, \quad a_{ij}, b_i, c \in \mathbb{R}. \quad (1.1)$$

Im zweidimensionalen Raum $n = 2$ bildet eine Quadrik eine Kurve in der Ebene. Dabei handelt es sich um Kegelschnitte. Sie umfassen Kreise, Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln. Ein Kegelschnitt entsteht beim Schnitt eines geraden Doppelkegels (Rotationskegels) mit einer Ebene. Mit Kegelschnitten beschäftigte man sich bereits im Altertum. Die Kegelschnitte wurden 200 Jahre vor Christus erwähnt und systematisch untersucht, als Apollonios von Perge seine bedeutendste Studie *Konika* ("Über Kegelschnitte") durchführte. Die Darstellung von Kegelschnitten durch Koordinatengleichungen wurde nacher von Fermat und Descartes vorgestellt. Die Begrifflichkeit ist auf Apollonios von Perge zurückzuführen. In der Astronomie haben Kegelschnitte eine besondere Bedeutung. Die Bahnen zweier miteinander wechselwirkender Himmelskörper sind nach dem von Isaac Newton formulierten Gravitationsgesetz genäherte Kegelschnitte. Wenn sie sich in die gleiche Richtung bewegen, hinterlassen sie eine elliptische Form. Wenn sie sich getrennt bewegen, bewegen sie sich in parabolischer oder hyperbolischer Form. Für $n = 3$ ergibt sich eine quadratische Fläche im Raum, die manchmal auch Fläche zweiten Grades oder Fläche zweiter Ordnung genannt wird. Im dreidimensionalen Raum ist eine Quadrik die Lösungsmenge einer quadratischen Gleichung mit drei Variablen. Es gibt dabei eine wesentlich größere Vielfalt der Quadriken als in der Ebene. Flächen zweiter Ordnung werden vor allen Dingen in der projektiven und der analytischen Geometrie untersucht. Sie finden in der Technik und den Naturwissenschaften viele bedeutungsvolle Anwendungen.

Wir behandeln im Folgenden die Quadriken in der Ebene und im Raum. Damit zusammenhängend wird die Klassifizierung der Quadriken aus der Betrachtung von Koeffizienten untersucht. Dazu brauchen wir einige Definitionen und Sätze. Insbesondere die Hauptachsentransformation werden wir in dieser Arbeit benutzen. Jede Quadrik lässt sich durch eine Hauptachsentransformation auf eine der Normalformen transformieren. Der nächste Abschnitt ist eine kurze Wiederholung der Kurven zweiter Ordnung. Dabei werden die eigentlichen Kegelschnitte (Ellipse, Parabel, Hyperbel) mit ihren geometrischen Eigenschaften diskutiert. Anschließend werden im Hauptteil die Flächen zweiten Ordnung und ihre grafische Darstellung sowie die geometrischen Eigenschaften ausführlich beschrieben. Zum Schluss werden einige konkrete Anwendungsbeispiele der Quadriken in der Technik und dem alltäglichen Leben gegeben.

2 Kurven zweiter Ordnung - Geometrische Eigenschaften

Die einfachsten gekrümmten ebenen Kurven sind die sogenannten Kegelschnitte. Sie lassen sich durch algebraische Gleichungen zweiten Grades beschreiben und werden deswegen als Kurven zweiter Ordnung bezeichnet.

Definition: Eine *Kurve zweiter Ordnung* in der Ebene ist die Menge aller Punkte $P(x, y)$, deren Koordinaten die allgemeine Kegelschnittsgleichung erfüllen.

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0 \quad (2.1)$$

Bezüglich der Eigenwerte der symmetrischen Matrix $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$ sind folgende Fälle möglich:

1. Ellipse: Die beiden Eigenwerte haben das gleiche Vorzeichen.
2. Hyperbel: Die beiden Eigenwerte haben unterschiedliche Vorzeichen.
3. Parabel: Ein Eigenwert ist gleich Null.

2.1 Ellipse

Definition: Eine *Ellipse* mit den Halbachsen $a > 0$ und $b > 0$ ist die Menge aller Punkte $P(x, y)$, bei denen die Summe der Abstände zu den zwei gegebenen festen Punkten, den Brennpunkten F_1 und F_2 , den konstanten Wert $2a$ hat.

$$ell = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid |\overline{XF_1}| + |\overline{XF_2}| = 2a\}.$$

Ellipsengleichung in Normalform

Wir wählen das Koordinatensystem so, dass die Brennpunkte F_1 und F_2 symmetrisch zum Ursprung auf der x -Achse liegen, d.h. $F_1(-e, 0)$ und $F_2(e, 0)$. So sagt man die Ellipse befindet sich in *erster Hauptlage*.

2 Kurven zweiter Ordnung - Geometrische Eigenschaften

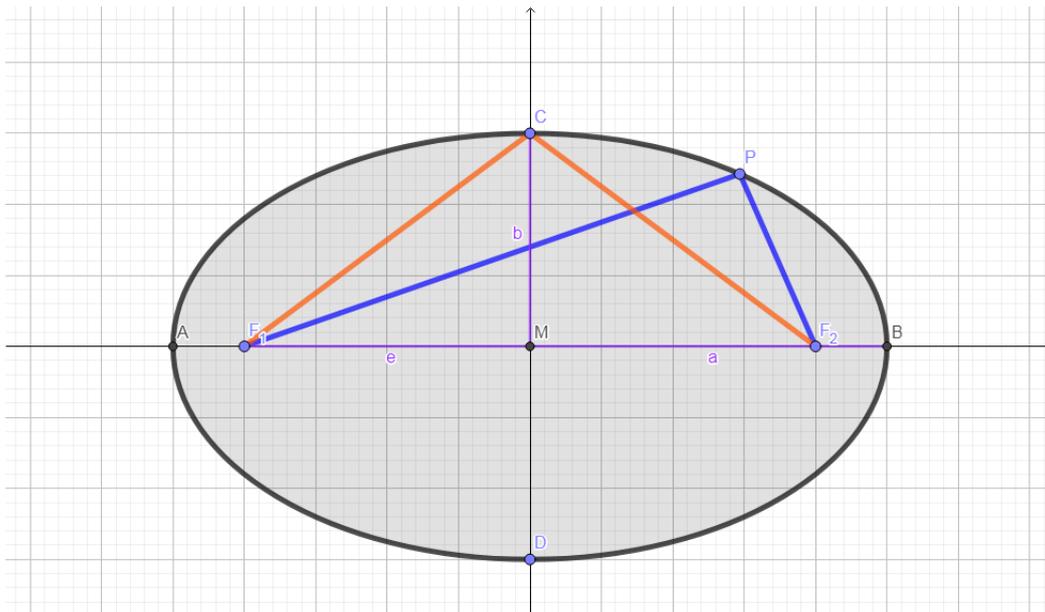


Abbildung 1: Ellipse in erster Hauptlage.

Dabei ist

$M(0, 0)$	<i>Mittelpunkt</i>
$F_1(-e, 0), F_2(e, 0)$	<i>Brennpunkt</i>
$A(-a, 0), B(a, 0)$	<i>Hauptscheitel</i>
$C(0, b), D(0, -b)$	<i>Nebenscheitel</i>
\overline{AB}	<i>Hauptachse</i>
\overline{CD}	<i>Nebenachse</i>
a	<i>große Halbachse</i>
b	<i>kleine Halbachse</i>
e	<i>lineare Exzentrizität.</i>

Satz 2.1 Die Punkte $P(x, y)$ einer Ellipse in erster Hauptlage erfüllen die Gleichung.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2.2)$$

Diese Gleichung lässt sich in Form einer quadratischen Gleichung wie (2.1) umstellen.

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

Wir können also die Gleichung (2.1) immer in die Form (2.2) bringen, wenn die Eigenwerte der Matrix A gleiches Vorzeichen haben. Durch Drehung des Koordinatensystems werden die gemischt-quadratischen Glieder beseitigt. Die Faktoren vor den rein-quadratischen sind dann beide positiv. Anschließend lassen sich die linearen Terme durch Verschiebung des Koordinatensystems eliminieren.

Herleitung der Ellipsengleichung

Durch Aufsummieren der Abstände, die ein Punkt von den beiden Brennpunkten hat, wird die Gleichung (2.2) hergeleitet. Im Punkt $A(-a, 0)$ und $B(a, 0)$ können wir den Wert $2a$ erkennen. Unter Exzentrizität e verstehen wir den Abstand der Brennpunkte zum Mittelpunkt. Es ist ein Maß für die Abweichung einer Ellipse von einem Kreis. Eine Ellipse kann ein Kreis sein, wenn sie eine Exzentrizität von 0 besitzt. Zwischen der Exzentrizität und den Halbachsen besteht der Zusammenhang, der nach dem Satz von Pythagoras zu erkennen ist

$$e^2 = a^2 - b^2.$$

Die Summe der Abstände von P zu den Brennpunkten ist $2a$: $|\overline{F_1P}| + |\overline{F_2P}| = 2a$.

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+e)^2 + y^2} + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} &= 2a \\ \sqrt{(x-e)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x+e)^2 + y^2} \\ (x-e)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x+e)^2 + y^2} + (x+e)^2 + y^2 \\ x^2 - 2ex + e^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 + 2ex + e^2 + y^2} + x^2 + 2ex + e^2 + y^2 \\ 4a^2 + 4ex &= 4a\sqrt{x^2 + 2ex + e^2 + y^2} \\ a^2 + ex &= a\sqrt{x^2 + 2ex + e^2 + y^2} \\ a^4 + 2a^2ex + e^2x^2 &= a^2(x^2 + 2ex + e^2 + y^2) \\ a^4 + 2a^2ex + e^2x^2 &= a^2x^2 + 2a^2ex + a^2e^2 + a^2y^2 \\ a^4 - a^2e^2 &= a^2x^2 - e^2x^2 + a^2y^2 \\ a^2(a^2 - e^2) &= x^2(a^2 - e^2) + a^2y^2. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen von $a^2 - e^2 = b^2$ folgt:

$$\begin{aligned} a^2b^2 &= x^2b^2 + a^2y^2 \\ \Rightarrow b^2x^2 + a^2y^2 &= a^2b^2 \end{aligned}$$

oder

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Um zu bestimmen, ob ein Punkt P innerhalb, außerhalb oder auf der Ellipse liegt, müssen wir die Koordinaten des Punktes P in die Ellipsengleichung in Normalform einsetzen. Wenn das Ergebnis größer als 1 ist, liegt der Punkt P außerhalb der Ellipse. Wenn das Ergebnis kleiner als 1 ist, liegt der Punkt innerhalb der Ellipse. Und wenn wir 1 bekommen, liegt dieser Punkt genau auf der Ellipse.

Gleichung der Tangente im Punkt T einer Ellipse

Satz 2.2 Sei $T(x_T, y_T)$ ein Punkt der Ellipse mit der Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Dann beschreibt die folgende Gleichung die Tangente an die Ellipse im Punkt T.

$$\frac{xx_T}{a^2} + \frac{yy_T}{b^2} = 1 \quad (2.3)$$

bzw.

$$t : b^2 x_T x + a^2 y_T y = a^2 b^2.$$

Diese Gleichung ist die Spaltform der Tangentengleichung.

Beweis: Die Herleitung der Tangentengleichung können wir Schritt für Schritt erarbeiten. Die Tangente hat als Gerade die allgemeine Gleichung:

$$y = kx + d.$$

Dabei ist k die Steigung der Gerade. Der Parameter d kann ermittelt werden, indem wir die Koordinaten des Punktes $T(x_T, y_T)$ einsetzen.

$$\begin{aligned} y_T &= kx_T + d \\ d &= y_T - kx_T. \end{aligned}$$

Diesen Ausdruck für d können wir wieder in die Geradengleichung einsetzen.

$$y = kx + (y_T - kx_T).$$

Die Tangentengleichung in $T(x_T, y_T)$ erhalten wir durch Umformen.

$$y = y_T + k(x - x_T).$$

Die Steigung k wird durch implizites Differenzieren aus der Ellipsengleichung ermittelt.

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\ b^2 x^2 + a^2 y^2 &= a^2 b^2 \\ 2b^2 x + 2a^2 y y' &= 0 \\ \Rightarrow y' &= -\frac{b^2 x}{a^2 y}. \end{aligned}$$

Die Steigung k im Punkt $T(x_T, y_T)$ beträgt daher:

$$k = y'(x_T, y_T) = -\frac{b^2 x_T}{a^2 y_T}.$$

2 Kurven zweiter Ordnung - Geometrische Eigenschaften

Damit können wir die Tangentengleichung durch Einsetzen herleiten.

$$y = y_T - \frac{b^2 x_T}{a^2 y_T} (x - x_T).$$

Durch Multiplizieren und Erweitern wird die Gleichung umgeformt.

$$\begin{aligned} a^2 y_T y &= a^2 y_T^2 - b^2 x_T (x - x_T) \\ a^2 y_T y &= a^2 y_T^2 - b^2 x_T x + b^2 x_T^2 \\ b^2 x_T x + a^2 y_T y &= a^2 y_T^2 + b^2 x_T^2. \end{aligned}$$

Der Punkt $T(x_T, y_T)$ liegt auf der Ellipse und erfüllt die Ellipsengleichung.

$$a^2 y_T^2 + b^2 x_T^2 = a^2 b^2.$$

Die Tangentengleichung im Punkt $T(x_T, y_T)$ lässt sich somit herleiten.

$$b^2 x_T x + a^2 y_T y = a^2 b^2.$$

Wir haben zum Beispiel eine Ellipse:

$$\frac{x^2}{6^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1.$$

Der Punkt $T(3, 2\sqrt{3})$ liegt auf dieser Ellipse, denn $\frac{3^2}{6^2} + \frac{4 \cdot 3}{4^2} = 1$.

Die Tangentengleichung an die Ellipse im Punkt T ist nach dem Satz 2.2 zu bestimmen.

$$\begin{aligned} t : \frac{3x}{6^2} + \frac{2\sqrt{3}y}{4^2} &= 1 \quad \text{bzw.} \\ t : 2x + 3\sqrt{3}y - 24 &= 0. \end{aligned}$$

Parameterdarstellung

Satz 2.3 Für eine Ellipse in erster Hauptlage haben wir die Parameterdarstellung

$$c(t) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot \cos t \\ b \cdot \sin t \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi). \quad (2.4)$$

Die Punkte genügen offenbar $\forall t$ der Ellipsengleichung (2.2).

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{(a \cdot \cos t)^2}{a^2} + \frac{(b \cdot \sin t)^2}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

Zum Beispiel beschreibt die folgende Gleichung

$$\vec{c}(t) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \cos t \\ 5 \sin t \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi)$$

eine Ellipse mit dem Mittelpunkt $M(0, 0)$ und den Halbachsen $a = 7$ und $b = 5$.

Herleitung der Tangentengleichung aus der Parameterdarstellung

Die Tangente an die Ellipse in einem Punkt lässt sich aus der Parameterdarstellung herleiten. Dabei wird die Steigung durch Differenzieren der beiden Parameter in der Parameterdarstellung ermittelt.

An dem Beispiel im letzten Abschnitt:

$$\frac{x^2}{6^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1.$$

soll die Tangentengleichung im Punkt $T(3, 2\sqrt{3})$ bestimmt werden. Diese Ellipse hat die Parameterdarstellung:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \cos t \\ 4 \sin t \end{bmatrix}.$$

Die Ableitungen lauten:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \sin t \\ 4 \cos t \end{bmatrix}.$$

Der Punkt $T(3, 2\sqrt{3})$ liegt auf dieser Ellipse, deshalb

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 6 \cos t \\ 4 \sin t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2\sqrt{3} \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Damit bekommen wir den Tangentenvektor im Punkt $T(3, 2\sqrt{3})$.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -6 \sin t \\ 4 \cos t \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -6 \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 4 \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\sqrt{3} \\ 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Die Tangentengleichung an die Ellipse im Punkt $T(3, 2\sqrt{3})$ hat die Form:

$$\begin{aligned} t : 2x + 3\sqrt{3}y + m &= 0 \\ 2 \cdot 3 + 3\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} + m &= 0 \quad \Rightarrow m = -24 \\ \Rightarrow t : 2x + 3\sqrt{3}y - 24 &= 0. \end{aligned}$$

2.2 Hyperbel

Definition: Eine *Hyperbel* mit den Parametern $a > 0$ und $b > 0$ ist die Menge aller Punkte $P(x, y)$, bei denen die Differenz der Abstände von den zwei gegebenen festen Punkten, den Brennpunkten F_1 und F_2 , den konstanten Wert $2a$ hat.

$$hyp = \{ X \in \mathbb{R}^2 \mid |\overline{XF_1}| - |\overline{XF_2}| = 2a \}.$$

Hyperbelgleichung in Normalform

Wir wählen das Koordinatensystem so, dass der Koordinatenursprung in den Mittelpunkt der Verbindungsline der beiden Brennpunkte $F_1(-e, 0)$ und $F_2(e, 0)$ (den Mittelpunkt der Hyperbel) gelegt wird und die Abszissenachse mit der großen Hyperbelachse zusammenfällt. So sagt man die Hyperbel befindet sich in *erster Hauptlage*.

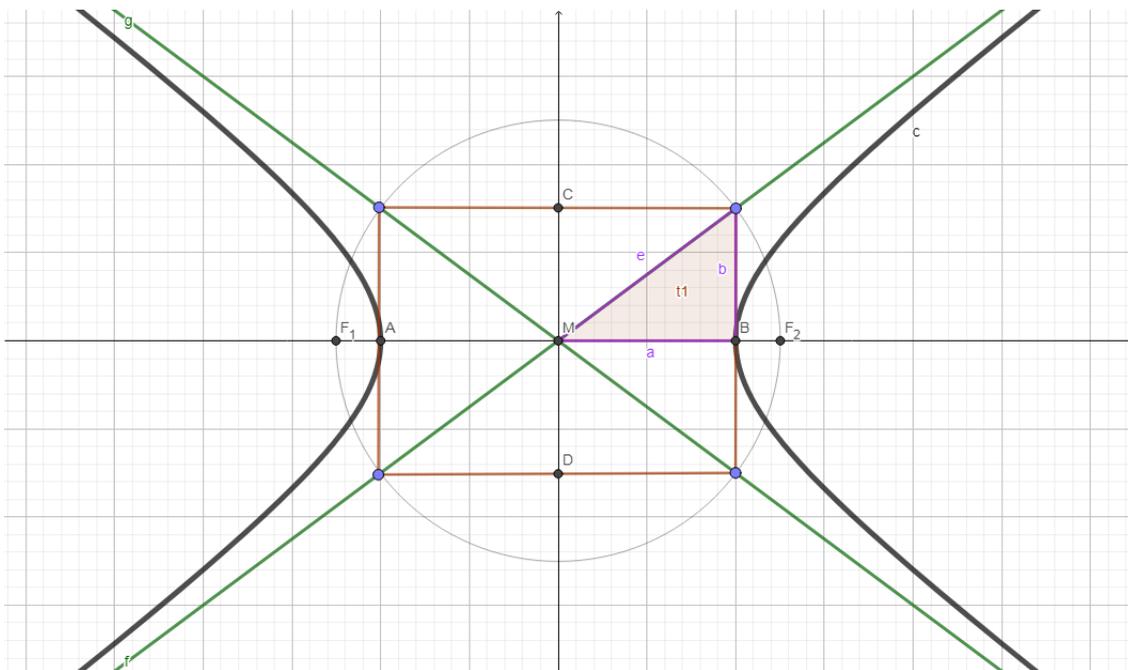


Abbildung 2: Hyperbel in erster Hauptlage.

Dabei ist

$M(0, 0)$	<i>Mittelpunkt</i>
F_1, F_2	<i>Brennpunkt</i>
$A(-a, 0), B(a, 0)$	<i>Hauptscheitel</i>
$C(0, b), D(0, -b)$	<i>Nebenscheitel</i>
\overline{AB}	<i>Hauptachse</i>
\overline{CD}	<i>Nebenachse</i>
a	<i>große Halbachse</i>
b	<i>kleine Halbachse</i>
e	<i>lineare Exzentrizität.</i>

Charakteristisch für Hyperbeln sind ihre *Asymptoten*. Die Asymptote ist eine Kurve (häufig sogar eine Gerade), an die sich der Graph einer Funktion immer mehr annähert, ohne sie zu schneiden. *Annähert* bedeutet dabei, dass der Abstand zwischen der Asymptote und dem Funktionsgraphen beliebig klein wird.

Die beiden Asymptoten einer Hyperbel schneiden sich im Mittelpunkt und haben

die Steigung von $\pm \frac{b}{a}$.

Satz 2.4 Die Punkte $P(x, y)$ einer Hyperbel in erster Hauptlage erfüllen die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2.5)$$

Diese Gleichung lässt sich ebenfalls in Form einer quadratischen Gleichung wie (1.1) umstellen.

$$b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$$

Zwischen der Geometrie und der Algebra besteht ein Zusammenhang. Die Gleichung (2.1) kann immer in die Form (2.2) überführt werden, wenn die Eigenwerte unterschiedliche Vorzeichen haben. Die nach der Drehung verbleibenden linearen Terme werden weiterhin durch Verschiebung des Koordinatensystem beseitigt.

Herleitung der Hyperbelgleichung

Für die Herleitung der Hyperbelgleichung betrachten wir den Fall einer Hyperbel, die sich in erster Hauptlage befindet. Die Herleitung erfolgt aus der Differenz der Abstände, die ein Punkt von beiden Brennpunkten hat und wird in analoger Weise wie bei den Ellipsen durchgeführt. Zwischen der Exzentrizität und den Halbachsen besteht der Zusammenhang, der nach dem Satz von Pythagoras zu erkennen ist.

$$e^2 = a^2 + b^2.$$

Die Abstände des Punktes $P(x, y)$ zu den beiden Brennpunkten F_1 und F_2 betragen:

$$\begin{aligned} \overline{F_1P} &= \sqrt{(x+e)^2 + y^2} \\ \overline{F_2P} &= \sqrt{(x-e)^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Laut Definition gilt: Die Differenz dieser Abstände ist $2a$.

$$\begin{aligned} |\overline{F_1P}| - |\overline{F_2P}| &= 2a \\ \sqrt{(x+e)^2 + y^2} - \sqrt{(x-e)^2 + y^2} &= 2a \\ \sqrt{(x+e)^2 + y^2} &= 2a + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} \\ (x+e)^2 + y^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x-e)^2 + y^2} + (x-e)^2 + y^2 \\ xe - a^2 &= -a\sqrt{(x-e)^2 + y^2} \\ (xe - a^2)^2 &= a^2(x + 2xe + e^2 + y^2) \\ x^2(e^2 - a^2) - a^2y^2 &= a^2(e^2 - a^2). \end{aligned}$$

Durch Einsetzen von $e^2 - a^2 = b^2$ folgt:

$$\begin{aligned} x^2b^2 - y^2a^2 &= a^2b^2 \quad \text{bzw.} \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1. \end{aligned}$$

Gleichung der Tangente im Punkt T einer Hyperbel

Satz 2.5 Sei $T(x_T, y_T)$ ein Punkt der Hyperbel mit der Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Dann beschreibt die folgende Gleichung die Tangente an die Hyperbel im Punkt T:

$$\frac{xx_T}{a^2} - \frac{yy_T}{b^2} = 1. \quad (2.6)$$

Analog zu Ellipsen wird die Tangentengleichung der Hyperbel wie folgt hergeleitet. Die Tangente hat als Gerade die Gleichung

$$y = kx + d.$$

Wir setzen die Koordinaten des Punktes $T(x_T, y_T)$ ein.

$$\begin{aligned} y_T &= kx_T + d \\ d &= y_T - kx_T \\ \Rightarrow y &= kx + (y_T - kx_T) \\ y &= y_T + k(x - x_T). \end{aligned}$$

Die Steigung k wird durch implizites Differenzieren aus der Ellipsengleichung ermittelt.

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\ b^2x^2 - a^2y^2 &= a^2b^2 \\ 2b^2x - 2a^2yy' &= 0 \\ y' &= \frac{b^2x}{a^2y} \\ \Rightarrow k = y'(x_T, y_T) &= \frac{b^2x_T}{a^2y_T}. \end{aligned}$$

Die Gleichung der Tangente in T:

$$\begin{aligned} y &= y_T + \frac{b^2x_T}{a^2y_T}(x - x_T) \\ a^2y_Ty &= a^2y_T^2 + b^2x_T(x - x_T) \\ a^2y_Ty &= a^2y_T^2 + b^2x_Tx - b^2x_T^2 \\ b^2x_Tx - a^2y_Ty &= b^2x_T^2 - a^2y_T^2 = a^2b^2 \quad \text{bzw.} \\ \frac{xx_T}{a^2} - \frac{yy_T}{b^2} &= 1. \end{aligned}$$

Parameterdarstellung

Satz 2.6 Die Parameterdarstellung einer Hyperbel, die sich in erster Hauptlage befindet, erhält man über hyperbolische Funktionen (die daher ihren Namen bekommen haben):

$$\vec{c}(t) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pm a \cdot \cosh t \\ b \cdot \sinh t \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.7)$$

Die *hyperbolischen Funktionen* sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \sinh x &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\ \cosh x &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}). \end{aligned}$$

Ihre Ableitungen lauten:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sinh x &= \cosh x \\ \frac{d}{dx} \cosh x &= \sinh x. \end{aligned}$$

Die Punkte genügen offenbar der Hyperbelgleichung (2.4).

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= \frac{a^2 \cdot \cosh^2 t}{a^2} - \frac{b^2 \cdot \sinh^2 t}{b^2} \\ &= \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 - \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2 \\ &= \frac{1}{4}((e^x + e^{-x}) + (e^x - e^{-x})) \cdot ((e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})) \\ &= \frac{1}{4} \cdot 2e^x \cdot 2e^{-x} = 1. \end{aligned}$$

Den Anstieg der Asymptoten können wir aus der Parameterdarstellung erkennen.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \pm \frac{b \cdot \sinh t}{a \cdot \cosh t} = \pm \frac{b}{a}.$$

Ein Beispiel sehen wir hier. Die Parameterdarstellung

$$\vec{c}(t) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cosh t \\ 5 \sinh t \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

beschreibt eine Hyperbel. Die x -Werte werden nicht kleiner als 3. In diesem Beispiel wird also nur der rechte Ast definiert. Die Asymptoten haben die Steigungen $\pm \frac{5}{3}$ und schneiden sich im Punkt $M(0, 0)$. Die Gleichung der Hyperbel lautet

$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{5^2} = 1.$$

Herleitung der Tangentengleichung aus der Parameterdarstellung

Gegeben ist eine Parameterdarstellung des rechten Astes der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot \cosh t \\ b \cdot \sinh t \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Aus der Parameterdarstellung lässt sich der Tangentenvektor im Punkt $T(x(t_0), y(t_0))$ ermitteln:

$$\vec{c}' = \begin{bmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot \sinh t_0 \\ b \cdot \cosh t_0 \end{bmatrix}$$

Die Steigung beträgt:

$$k = \frac{b \cdot \cosh t_0}{a \cdot \sinh t_0} = \frac{b}{a} \cdot \frac{b \cdot a \cdot \cosh t_0}{a \cdot b \cdot \sinh t_0} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_T}{y_T}.$$

Die Tangente im Punkt T hat somit die Gleichung:

$$\begin{aligned} y - y_T &= \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_T}{y_T} \cdot (x - x_T) \\ \frac{yy_T - y_T^2}{b^2} &= \frac{xx_T - x_T^2}{a^2} \\ \frac{xx_T}{a^2} - \frac{yy_T}{b^2} &= \frac{x_T^2}{a^2} - \frac{y_T^2}{b^2} \\ \frac{xx_T}{a^2} - \frac{yy_T}{b^2} &= 1. \end{aligned}$$

2.3 Parabel

Definition: Eine *Parabel* ist die Menge aller Punkte $P(x, y)$, bei denen der Abstand zu einem festen Punkt, dem Brennpunkt F , und zu einer gegebenen Geraden, der sogenannten Leitlinie l , den gleichen Wert hat. Dabei beschreibt der Parameter $p > 0$ den Abstand zwischen F und l .

$$par = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid \overline{Xl} = \overline{XF}\}.$$

Parabelgleichung in Normalform

Satz 2.7 Die Gleichungen der Parabeln in allen 4 Hauptlagen lauten:

$$\begin{aligned} y^2 &= \pm 2px \\ x^2 &= \pm 2py. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Dabei wird das Koordinatensystem so gewählt, dass der Scheitelpunkt der Parabel genau auf dem Koordinatenursprung liegt und die Parabel symmetrisch zu den Koordinatenachsen gelegt. Die unterschiedlichen Vorzeichen in den Formeln passen zu den unterschiedlichen Parabelästen. Ein Parabelast kann nach links, rechts, oben oder unten geöffnet sein.

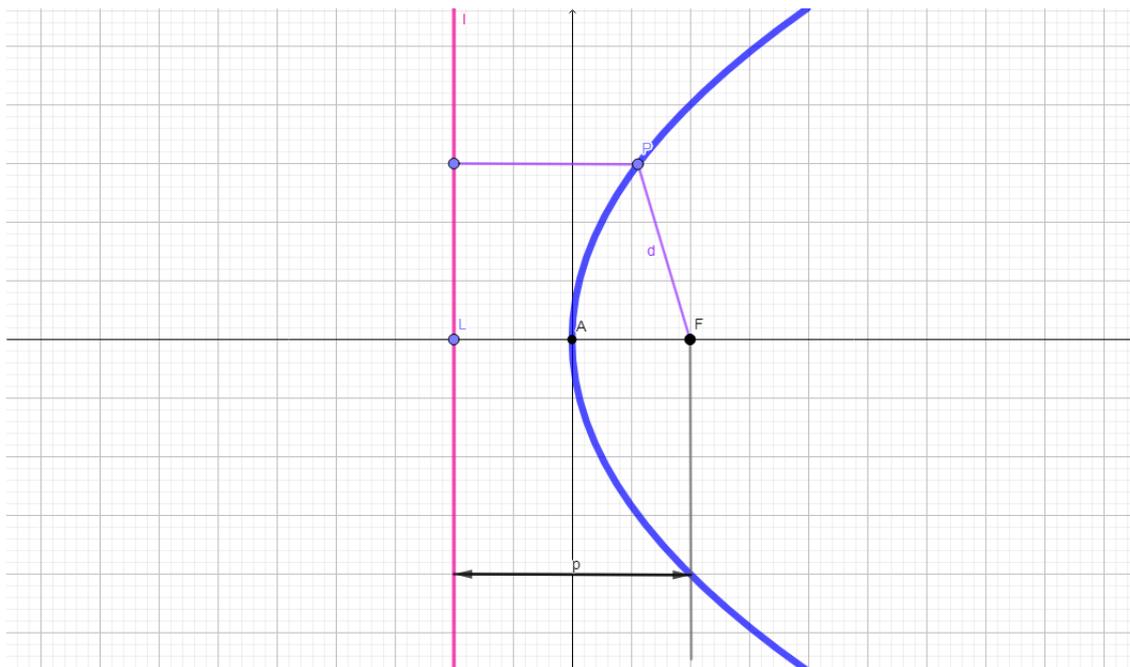


Abbildung 3: Nach rechts geöffnete Parabel in erster Hauptlage.

Man nennt

F	<i>Brennpunkt</i>
A	<i>Scheitelpunkt</i>
l	<i>Leitlinie</i>
$p = \overline{LF}$	<i>Parameter.</i>

Wir können die Gleichung (2.1) immer in die Form (2.2) bringen, wenn ein Eigenwert gleich Null ist. Durch Drehung des Koordinatensystems werden die gemischt-quadratischen Glieder beseitigt. Es verbleibt nur noch ein quadratischer Term. Der lineare Term lässt sich dann durch Verschiebung beseitigen.

Herleitung der Parabelgleichung

Zur Herleitung der Gleichung aus der Definition betrachten wir den Fall einer nach rechts geöffneten Parabel.

Der Punkt $P(x, y)$ hat einen Abstand von $d_1 = x + \frac{p}{2}$ von der Leitlinie l . Zwischen dem Brennpunkt F und dem Punkt $P(x, y)$ besteht der Abstand von

$$d_2 = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$

Da die beiden Abstände d_1 und d_2 gleich groß sind, folgt

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 &= \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 \\ \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 &= y^2 \\ 2px &= y^2. \end{aligned}$$

Gleichung der Tangente im Punkt T einer Parabel

Satz 2.8 Sei $T(x_T, y_T)$ ein Punkt der Parabel mit der Gleichung:

$$f : y^2 = 2px.$$

Dann beschreibt die folgende Gleichung die Tangente an die Hyperbel im Punkt T

$$y_T y = p(x + x_T). \quad (2.9)$$

Beweis Die Gleichung der Tangente von f im Punkt T hat die Form:

$$y = y_T + k(x - x_T).$$

Die Steigung k wird durch implizites Differenzieren aus der Parabelgleichung ermittelt.

$$\begin{aligned} y^2 &= 2px \\ 2yy' &= 2p \\ y' &= \frac{p}{y} \\ \Rightarrow k &= y'(x_T, y_T) = \frac{p}{y_T}. \end{aligned}$$

Somit können wir die Tangentengleichung herleiten.

$$\begin{aligned} y &= y_T + \frac{p}{y_T}(x - x_T) \\ y_T y &= y_T^2 + p(x - x_T) \\ y_T y &= 2px_T + px - px_T \\ y_T y &= px_T + px \\ \Rightarrow y_T y &= p(x + x_T). \end{aligned}$$

3 Flächen zweiter Ordnung

Definition: Eine Fläche zweiter Ordnung ist die Menge aller Punkte eines dreidimensionalen Raumes, deren Koordinaten einer quadratischen Gleichung genügen.

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0. \quad (3.1)$$

Die Flächengleichung einer Fläche zweiter Ordnung kann auch in Matrixform geschrieben werden:

$$x^T A x + 2p^T x + a_{44} = 0,$$

wobei

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \vec{p} = \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{bmatrix}$$

und die Koeffizienten $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{44} \in \mathbb{R}$.

In dieser Gleichung muss natürlich vorausgesetzt werden, dass die ersten sechs Koeffizienten a_{11} bis a_{33} nicht sämtlich gleich Null sein dürfen. Ansonsten handelt es sich um eine algebraische Fläche erster Ordnung, also um eine Ebene.

Es ist notwendig, die allgemeine Flächengleichung in eine Normalform zu bringen. Dabei entstehen 17 mögliche Fälle für Flächen zweiter Ordnung, die in einer Klassifikation deutlich unterschieden werden können. Die allgemeine Flächengleichung wird mit Hilfe der Hauptachsentransformation vereinfacht. Durch Drehung des Koordinatensystems um die Hauptachsen der Fläche gelangt man zu einer Form ohne gemischte quadratische Glieder. Durch Verschiebung des Koordinatensystems in das Zentrum der Fläche entstehen schließlich die beiden möglichen Normalformen einer Fläche zweiter Ordnung:

- Normalform einer singulären Fläche:

$$ax^2 + by^2 + cz = 0. \quad (3.2)$$

- Normalform einer regulären Fläche:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + d = 0. \quad (3.3)$$

Wenn eine Fläche ein Symmetriezentrum besitzt, wird sie reguläre Fläche genannt, d.h. mit jedem Punkt $P(x, y, z)$ der Fläche gehört ebenfalls der Spiegelpunkt $P(-x, -y, -z)$ zur Fläche. Unter singuläre Fläche verstehen wir eine Fläche, die kein Symmetriezentrum aufweist. Die Bezeichnung *reguläre* und *singuläre* Fläche hat allerdings noch einen weiteren Hintergrund. Reguläre Flächen liegen vor, wenn sämtliche Eigenwerte der Matrix A ungleich Null sind. Die Matrix A ist also regulär, d.h. $\det(A) \neq 0$. Wenn ein Eigenwert Null ist, so ist die Matrix A singulär und es handelt sich um eine singuläre Fläche.

3.1 Hauptachsentransformation in die Normalform

Die Hauptachsentransformation ist ein Verfahren der linearen Algebra, um die allgemeinen Flächengleichungen in einer Normalform darstellen und klassifizieren zu können. Die Transformation setzt sich zusammen aus einer Drehung des Koordinatensystems um die Hauptachsen der Fläche und nachfolgender Verschiebung der Fläche in den Koordinatenursprung. Die Drehung bedeutet rechnerisch, dass der gemischte Term xy , yz , und zx in der Gleichung verschwindet. Im zweiten Schritt der Hauptachsentransformation nehmen wir eine Verschiebung vor, um die nicht-quadratischen Terme x , y und z zu eliminieren. Wir müssen hier beachten, dass die Verschiebung nicht immer gelingt. Die linearen Terme lassen sich also nicht immer alle beseitigen.

Erster Schritt: Die Drehung

Vorgehensweise

1. Umformung der Gleichung in Matrixform
2. Diagonalisierung der Matrix
 - 2.1 Berechnung des charakteristischen Polynoms
 - 2.2 Ermittlung der Nullstellen
 - 2.3 Aufstellung der Diagonalmatrix
3. Berechnung der Transformationsmatrix
 - 3.1 Berechnung und Normalisierung der Eigenvektoren
 - 3.2 Aufstellung der Transformationsmatrix
4. Umformung der Matrixgleichung
5. Ausmultiplizierung der Matrixgleichung

Durch eine Drehung lassen sich die Hauptachsen der Fläche parallel zu den Koordinatenachsen ausrichten und die gemischt quadratischen Glieder aus der Flächengleichung beseitigen. Die verbleibenden Faktoren vor den rein-quadratischen Termen sind die Eigenwerte der Matrix A .

Beispiel einer Hauptachsentransformation

Gegeben ist die Flächengleichung eines elliptischen Paraboloids:

$$12x^2 + 6y^2 + 9z^2 - 12xz + 12yz - 13x - 10y - 8z + 3 = 0.$$

Die mit den Transformationen verbunden geometrischen Operationen im dreidimensionalen Raum lassen sich in besonders geeigneter Form mit Hilfe der Matrierrechnung mathematisch beschreiben. Zu diesem Zweck wird zuerst eine Matrixschreibweise der Flächengleichung eingeführt.

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 & 0 & -6 \\ 0 & 6 & 6 \\ -6 & 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -13 & -10 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + 3 = 0$$

3 Flächen zweiter Ordnung

Der Vektor $x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ wird als Koordinatenvektor bezeichnet.

Die Formenmatrix $A = \begin{bmatrix} 12 & 0 & -6 \\ 0 & 6 & 6 \\ -6 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ beinhaltet die Koeffizienten der quadratischen und gemischt quadratischen Glieder der Flächengleichung.

Der Vektor $q = \begin{bmatrix} -13 \\ 10 \\ -8 \end{bmatrix}$ enthält die Koeffizienten der linearen Glieder der Flächengleichung.

Da die Matrix A symmetrisch ist, gibt es bekanntlich eine orthogonale Matrix C , die A auf eine Diagonalmatrix transformiert:

$$C^T A C = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ bezeichnen die Eigenwerte von A .

Charakteristische Gleichung

$$(A - \lambda E_3) = \begin{bmatrix} 12 & 0 & -6 \\ 0 & 6 & 6 \\ -6 & 6 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 - \lambda & 0 & -6 \\ 0 & 6 - \lambda & 6 \\ -6 & 6 & 9 - \lambda \end{bmatrix}$$

Durch Berechnen der Determinante dieser Matrix bekommen wir die *charakteristische Gleichung*:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E_3) &= \det \begin{bmatrix} 12 - \lambda & 0 & -6 \\ 0 & 6 - \lambda & 6 \\ -6 & 6 & 9 - \lambda \end{bmatrix} = 0 \\ &(\lambda - 9)(\lambda - 18)\lambda = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda_1 = 9, \lambda_2 = 18, \lambda_3 = 0. \end{aligned}$$

Die Nullstellen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ heißen Eigenwerte der Matrix A . Aus den drei Eigenwerten wird die Diagonalmatrix D gebildet. Auf der Hauptdiagonalen können die Eigenwerte beliebig angeordnet werden.

$$D = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Die Drehung wird mit einer Transformationsmatrix C beschrieben. Die Matrix C ist orthogonal und es gilt:

$$\begin{aligned} D &= C^T A C \\ C D &= C C^T A C. \end{aligned}$$

3 Flächen zweiter Ordnung

$$\text{Da } CC^T = E \quad \Rightarrow \quad CD = AC$$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 0 & -6 \\ 0 & 6 & 6 \\ -6 & 6 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

Aus dieser Matrixgleichung leiten sich drei Vektorgleichungen ab, deren Lösungsvektoren die (auf die Länge 1 normierten) Spaltenvektoren der Transformationsmatrix darstellen.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 0 & -6 \\ 0 & 6 & 6 \\ -6 & 6 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9c_{11} & 18c_{12} & 0 \\ 9c_{21} & 18c_{22} & 0 \\ 9c_{31} & 18c_{32} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 0 & -6 \\ 0 & 6 & 6 \\ -6 & 6 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9c_{11} \\ 9c_{21} \\ 9c_{31} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 0 & -6 \\ 0 & 6 & 6 \\ -6 & 6 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ c_{32} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 18c_{12} \\ 18c_{22} \\ 18c_{32} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ c_{32} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 0 & -6 \\ 0 & 6 & 6 \\ -6 & 6 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{13} \\ c_{23} \\ c_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} c_{13} \\ c_{23} \\ c_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Damit wird die Transformationsmatrix C gewonnen:

$$C = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

3 Flächen zweiter Ordnung

Es gilt $x = Cx'$:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2x' - 2y' + z' \\ 2x' + y' - 2z' \\ x' + 2y' + 2z' \end{bmatrix}.$$

Durch Einsetzen der transformierten Koordinaten in die Gleichung

$$12x^2 + 6y^2 + 9z^2 - 12xz + 12yz - 13x - 10y - 8z + 3 = 0.$$

ergibt sich eine erste transformierte Gleichung der Fläche zweiter Ordnung.

$$9x'^2 + 18y'^2 - 18x' - 3z' + 3 = 0.$$

Die gemischt-quadratischen Glieder in der allgemeinen Flächengleichung werden somit eliminiert. Es verbleiben noch zwei lineare Glieder in der Gleichung, die durch eine Verschiebung des Koordinatensystems in den Scheitelpunkt des elliptischen Paraboloids beseitigt werden können.

Zweiter Schritt: Die Verschiebung

Vorgehensweise

1. Ausklammern des Faktors vor dem quadratischen Term (falls vorhanden)
2. Bestimmung der Zahl k vor dem linearen Term und Berechnung von $\frac{k^2}{4}$
3. Anwendung der binomischen Formel
4. Ersetzen der Binome

In der durch die Drehung gewonnenen transformierten Flächengleichung sind noch zwei lineare Glieder enthalten. Graphisch bedeutet das, dass der Scheitelpunkt des einschaligen Hyperboloids nicht im Koordinatenursprung liegt.

$$9x'^2 + 18y'^2 - 18x' - 3z' + 3 = 0.$$

Die Verschiebung lässt sich mathematisch durch eine quadratische Ergänzung realisieren. Das heißt, dass sich die linearen Terme nur beseitigen lassen, wenn der zugehörige Eigenwert nicht Null ist. In diesem Beispiel können die linearen Terme nicht alle eliminiert werden, da wir einen Eigenwert von Null haben ($\lambda_3 = 0$).

$$9(x' - 1)^2 + 18y'^2 - 3(z' + 2) = 0.$$

Es entsteht eine Koordinatentransformation der Koordinaten (x', y', z') in die neuen Koordinaten (x'', y'', z'') .

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' - 1 \\ y' \\ z' + 2 \end{bmatrix}$$

Damit bekommen wir die Flächengleichung des elliptischen Paraboloids in der Normalform:

$$9x''^2 + 18y''^2 - 3z'' = 0.$$

3 Flächen zweiter Ordnung

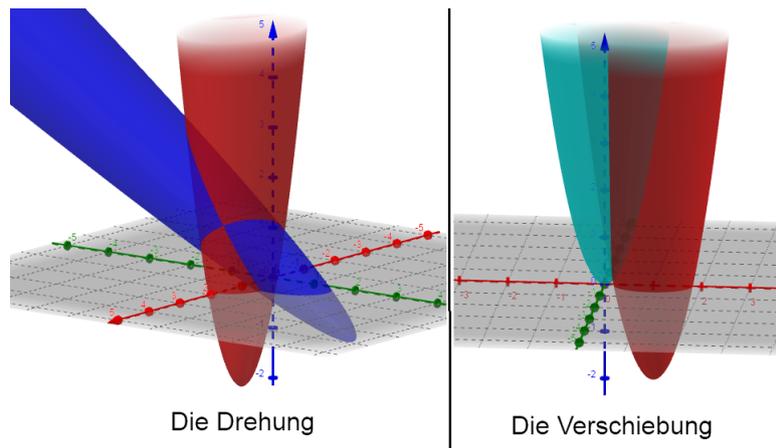
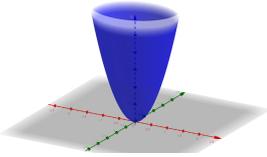
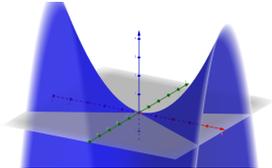
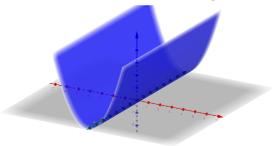


Abbildung 4: Beispiel eines transformierten elliptischen Paraboloids.

3.2 Klassifikation von Flächen zweiter Ordnung

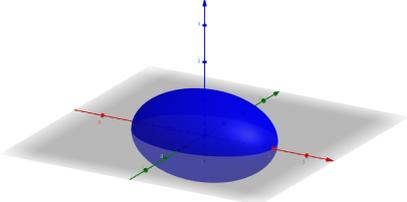
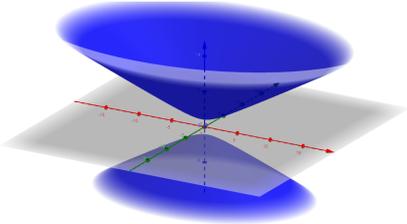
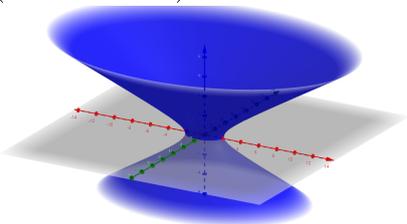
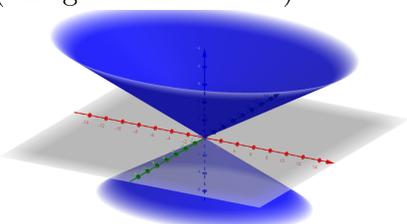
Es existieren 17 verschiedene Typen von Flächen zweiter Ordnung, die aus der Betrachtung der Koeffizienten in den beiden Normalformen klar unterschieden werden können. Neun dieser Fälle werden als uneigentliche Flächen zweiter Ordnung (auch als Entartungsfälle) bezeichnet. Weitere fünf Fälle beschreiben echte Flächen zweiter Ordnung. Die drei verbleibenden Fälle haben keine reellwertige Lösung und daher kein geometrisches Gebilde.

Singuläre Flächen zweiter Ordnung (Flächen ohne Symmetriezentrum): Untersucht werden die Koeffizienten der Normalform $ax^2 + by^2 + cz = 0$.

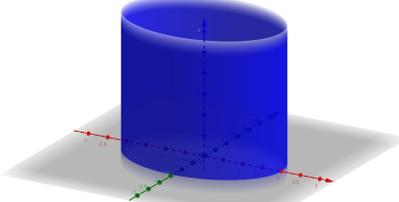
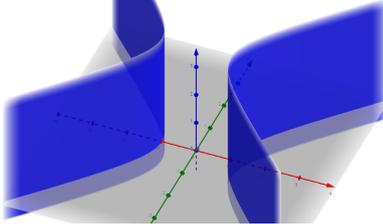
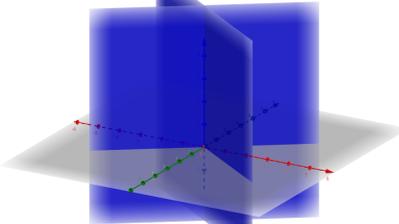
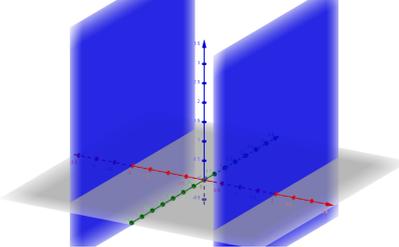
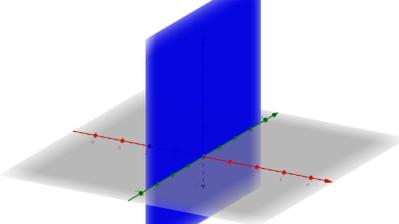
Koeffizienten			Beispiel	Geometrisches Objekt
$a > 0$	$b > 0$	$c \neq 0$	$x^2 + 2y^2 + 3z = 0$	Elliptisches Paraboloid (echte Fläche) 
$a > 0$	$b < 0$	$c \neq 0$	$x^2 - 2y^2 - 3z = 0$	Hyperbolisches Paraboloid (echte Fläche) 
$a > 0$	$b = 0$	$c \neq 0$	$x^2 - 3z = 0$	Parabolischer Zylinder (uneigentliche Fläche) 

3 Flächen zweiter Ordnung

Reguläre Flächen zweiter Ordnung (Flächen mit Symmetriezentrum): Untersucht werden die Koeffizienten der Normalform $ax^2 + by^2 + cz^2 + d = 0$.

Koeffizienten				Beispiel	Geometrisches Objekt
$a > 0$	$b > 0$	$c > 0$	$d > 0$	$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4 = 0$	Leere Menge
$a > 0$	$b > 0$	$c > 0$	$d < 0$	$x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 4 = 0$	Ellipsoid (echte Fläche) 
$a > 0$	$b > 0$	$c > 0$	$d = 0$	$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 0$	Nullpunkt $(0, 0, 0)$ (uneigentliche Fläche)
$a > 0$	$b > 0$	$c < 0$	$d > 0$	$x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 4 = 0$	Zweischaliges Hyperboloid (echte Fläche) 
$a > 0$	$b > 0$	$c < 0$	$d < 0$	$x^2 + 2y^2 - 3z^2 - 4 = 0$	Einschaliges Hyperboloid (echte Fläche) 
$a > 0$	$b > 0$	$c < 0$	$d = 0$	$x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 0$	Elliptischer Doppelkegel (uneigentliche Fläche) 
$a > 0$	$b > 0$	$c = 0$	$d > 0$	$x^2 + 2y^2 + 4$	Leere Menge

3 Flächen zweiter Ordnung

$a > 0$	$b > 0$	$c = 0$	$d < 0$	$x^2 + 2y^2 - 4 = 0$	Elliptischer Zylinder (uneigentliche Fläche) 
$a > 0$	$b > 0$	$c = 0$	$d = 0$	$x^2 + 2y^2 = 0$	Nullpunkt $(0, 0, 0)$ (uneigentliche Fläche)
$a > 0$	$b < 0$	$c = 0$	$d \neq 0$	$x^2 - 2y^2 + 4 = 0$	Hyperbolischer Zylinder (uneigentliche Fläche) 
$a > 0$	$b < 0$	$c = 0$	$d = 0$	$x^2 - 2y^2 = 0$	Schnittebenenpaar (uneigentliche Fläche) 
$a > 0$	$b = 0$	$c = 0$	$d > 0$	$x^2 + 4 = 0$	Leere Menge
$a > 0$	$b = 0$	$c = 0$	$d < 0$	$x^2 - 4 = 0$	Paralleles Ebenenpaar (uneigentliche Fläche) 
$a > 0$	$b = 0$	$c = 0$	$d = 0$	$x^2 = 0$	Koordinatenebene $y - z$ -Ebene (uneigentliche Fläche) 

Einige wichtige Fälle von Flächen zweiter Ordnung, wie das elliptische Paraboloid

und das Ellipsoid werden wir in den nächsten Abschnitten noch genauer untersuchen.

3.3 Ellipsoid

Gleichung in Normalform

Das Ellipsoid ist eine reguläre Fläche zweiter Ordnung und besitzt ein Symmetriezentrum. Wir wählen das Koordinatensystem so, dass dieses Symmetriezentrum genau auf dem Koordinatenursprung liegt.

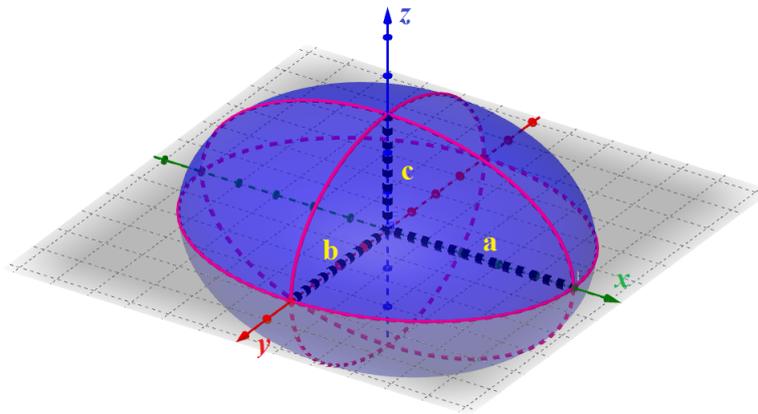


Abbildung 5: Ellipsoid.

Dabei sind die Zahlen a , b , c (analog zu einer Ellipse) die *Halbachsen* des Ellipsoids.

Satz 3.1 Die Gleichung eines Ellipsoids in Normalform lautet:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (3.4)$$

Ein Ellipsoid, bei dem zwei Halbachsen die gleiche Länge haben und die Länge der dritten Halbachse verschieden davon ist, wird als *Rotationsellipsoid* bezeichnet. Alle Schnitte parallel zu den beiden gleichen Halbachsen ergeben Kreise als Schnittfiguren. Es werden folgende Spezialfälle unterschieden:

- a) $a = b > c$: Zusammengedrücktes Rotationsellipsoid.
- b) $a = b < c$: Langgestrecktes Rotationsellipsoid.
- c) $a = b = c$: Es geht also um eine Kugel mit dem Radius $R = a$.

3 Flächen zweiter Ordnung

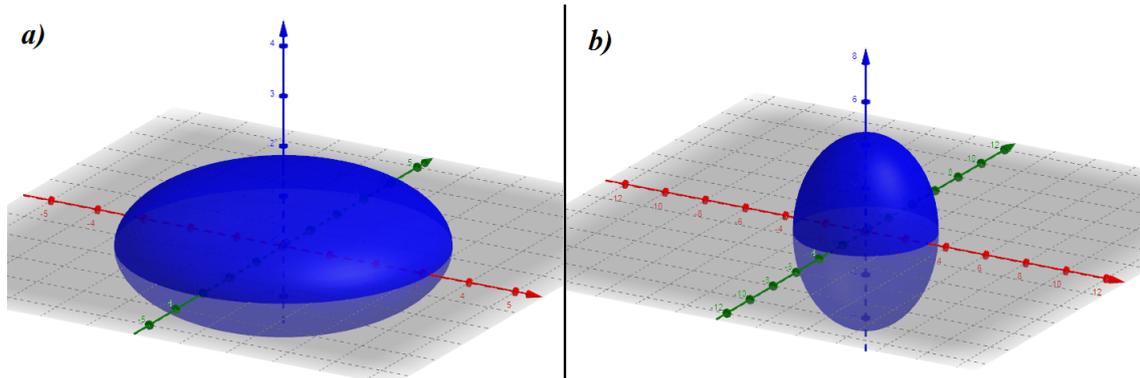


Abbildung 6: a) Zusammgedrücktes und b) langgestrecktes Rotationsellipsoid.

Parameterdarstellung

Satz 3.2 Das Ellipsoid kann durch folgende Parameterdarstellung beschrieben werden:

$$\vec{c}(u, v) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot \cos u \cdot \cos v \\ b \cdot \cos u \cdot \sin v \\ c \cdot \sin u \end{bmatrix} \quad u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad v \in [0, 2\pi). \quad (3.5)$$

Aus der Flächengleichung in Normalform wird die Parameterdarstellung für Ellipsoide so hergeleitet.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 u \\ \frac{z}{c} = \sin u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{(a \cdot \cos u)^2} + \frac{y^2}{(b \cdot \cos u)^2} = 1 \\ z = c \cdot \sin u \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{a \cdot \cos u} = \cos v \\ \frac{y}{b \cdot \cos u} = \sin v \\ z = c \cdot \sin u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \cdot \cos u \cdot \cos v \\ y = b \cdot \cos u \cdot \sin v \\ z = c \cdot \sin u \end{cases} \quad u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad v \in [0, 2\pi).$$

Tangentialebene

Die Tangentialebene einer Fläche ist diejenige Ebene, die im betrachteten Punkt die Fläche berührt. Sie steht senkrecht auf dem Normalenvektor der Fläche in diesem Punkt und ist damit die zweidimensionale Entsprechung zur Tangente einer Kurve. Eine Ebene ist entweder durch einen Punkt und zwei linear unabhängigen Richtungsvektoren oder durch einen Punkt und einen Normalenvektor definiert. Der Normalenvektor ist senkrecht (also orthogonal) zu den beiden Richtungsvektoren. Um den Normalenvektor zu finden müssen wir das Vektorprodukt anwenden. Genauer: Wir errechnen das Vektorprodukt aus den beiden Richtungsvektoren.

3 Flächen zweiter Ordnung

Satz 3.3 Sei $T(x_T, y_T, z_T)$ ein Punkt des Ellipsoids mit der Flächengleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Dann hat die Tangentialebene im Punkt T die Normalengleichung:

$$\frac{xx_T}{a^2} + \frac{yy_T}{b^2} + \frac{zz_T}{c^2} = 1. \quad (3.6)$$

Beweis

Wir brauchen zunächst einen Begriff.

Satz 3.4 Ist die Fläche implizit durch eine Gleichung gegeben:

$$f(x, y, z) = 0,$$

wobei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion ist, so ist der Gradient

$$\text{grad } f(x, y, z) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \right]^T$$

ein Normalenvektor der Fläche im Punkt (x, y, z) .

Hier muss vorausgesetzt werden, dass er dort nicht verschwinden darf:

$$\text{grad } f(x, y, z) \neq [0 \quad 0 \quad 0]^T.$$

Dieser Vektor ist orthogonal sowohl auf der Fläche als auch auf der Tangentialebene. Damit hat die gesuchte Tangentialebene des Ellipsoides im Punkt $T(x_T, y_T, z_T)$ den Normalvektor:

$$\text{grad } f(x_T, y_T, z_T) = \begin{bmatrix} \frac{2x_T}{a^2} \\ \frac{2y_T}{b^2} \\ \frac{2z_T}{c^2} \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} \frac{x_T}{a^2} \\ \frac{y_T}{b^2} \\ \frac{z_T}{c^2} \end{bmatrix}.$$

Die Gleichung der Tangentialebene, die den Normalvektor $\left[\frac{x_T}{a^2} \quad \frac{y_T}{b^2} \quad \frac{z_T}{c^2} \right]^T$ hat und durch den Punkt $T(x_T, y_T, z_T)$ verläuft, lautet

$$\begin{aligned} \frac{x_T}{a^2}(x - x_T) + \frac{y_T}{b^2}(y - y_T) + \frac{z_T}{c^2}(z - z_T) &= 0 \\ \frac{xx_T}{a^2} + \frac{yy_T}{b^2} + \frac{zz_T}{c^2} - \left(\frac{x_T^2}{a^2} + \frac{y_T^2}{b^2} + \frac{z_T^2}{c^2} \right) &= 0 \\ \frac{xx_T}{a^2} + \frac{yy_T}{b^2} + \frac{zz_T}{c^2} - 1 &= 0 \\ \frac{xx_T}{a^2} + \frac{yy_T}{b^2} + \frac{zz_T}{c^2} &= 1. \end{aligned}$$

Beispiel: Die Fläche E ist ein Ellipsoid mit der Gleichung

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{6} - 1 = 0,$$

3 Flächen zweiter Ordnung

gesucht ist die Tangentialebene im Punkt $T(1, \sqrt{3}, 1)$.
Es gilt

$$\text{grad } f(x_T, y_T, z_T) = \left[x_T \quad \frac{2y_T}{9} \quad \frac{z_T}{3} \right]^T = \left[1 \quad \frac{2\sqrt{3}}{9} \quad \frac{1}{3} \right]^T$$

und die gesuchte Tangentialebene hat die Koordinatengleichung

$$(x - 1) + \frac{2\sqrt{3}}{9}(y - \sqrt{3}) + \frac{1}{3}(z - 1) = 0 \quad \text{bzw.}$$
$$3x + \frac{2\sqrt{3}}{3}y + z - 6 = 0.$$

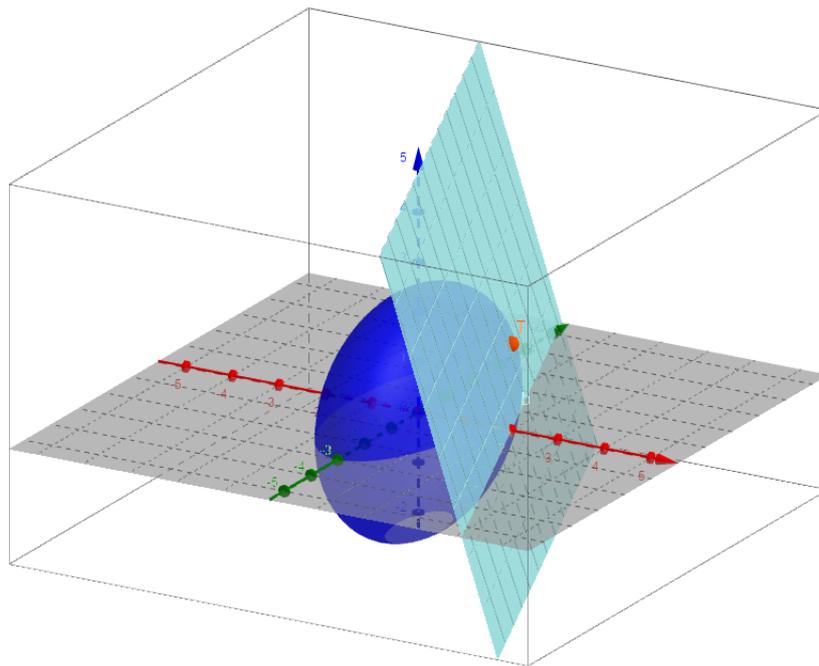


Abbildung 7: Das Ellipsoid im Beispiel und die Tangentialebene im Punkt T.

Herleitung der Tangentialebene aus der Parameterdarstellung

Wir können die Tangentialebene in einem Punkt der Fläche auch aus der Parameterdarstellung gewinnen. Das geht analog zur Tangente an eine Kurve. Die partiellen Ableitungen von der Parameterdarstellung $c(u, v)$ einer Fläche nach den beiden Parametern u und v ergeben zwei Tangentenvektoren. Diese beiden Vektoren spannen dann die Tangentialebene auf.

Wir beginnen mit der allgemeinen Parameterdarstellung (3.5) und dem Punkt $T(x_T, y_T, z_T)$, der auf dem Ellipsoid liegt. Die beiden Tangentenvektoren bekommen wir aus den

3 Flächen zweiter Ordnung

partiellen Ableitungen:

$$\vec{n}_1 = \frac{\partial c}{\partial u} = \begin{bmatrix} -a \cdot \sin u \cdot \cos v \\ -b \cdot \sin u \cdot \sin v \\ c \cdot \cos u \end{bmatrix}$$

$$\vec{n}_2 = \frac{\partial c}{\partial v} = \begin{bmatrix} -a \cdot \cos u \cdot \sin v \\ b \cdot \cos u \cdot \cos v \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Mithilfe des Vektorproduktes (Kreuzproduktes) von den beiden Tangentenvektoren lässt sich der Normalvektor ermitteln.

$$\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$$

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} -bc \cdot \cos^2 u \cdot \cos v \\ -ac \cdot \cos^2 u \cdot \sin v \\ -ab \cdot \sin u \cdot \cos^2 v \cdot \cos u - a \cdot b \cdot \sin u \cdot \sin^2 v \cdot \cos u \end{bmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} -bc \cdot \cos^2 u \cdot \cos v \\ -ac \cdot \cos^2 u \cdot \sin v \\ -ab \cdot \sin u \cdot \cos u \end{bmatrix}$$

$$\vec{n} = -abc \cdot \cos u \cdot \begin{bmatrix} \frac{a \cdot \cos u \cdot \cos v}{a^2} \\ \frac{b \cdot \cos u \cdot \sin v}{b^2} \\ \frac{c \cdot \sin u}{c^2} \end{bmatrix} = -abc \cdot \cos u \cdot \begin{bmatrix} \frac{x_T}{a^2} \\ \frac{y_T}{b^2} \\ \frac{z_T}{c^2} \end{bmatrix}.$$

Damit bekommen wir einen Normalvektor mit gleicher Richtung wie bei der Berechnung durch den Gradient.

3.4 Elliptisches Paraboloid

Gleichung in Normalform

Das elliptische Paraboloid ist eine singuläre Fläche zweiter Ordnung. Da Paraboloiden keinen Mittelpunkt besitzen, wird in der folgenden Gleichung davon ausgegangen, dass der Scheitel des elliptischen Paraboloids im Koordinatenursprung liegt. Die z -Achse wird dabei zur Symmetrieachse und die x, z - sowie die y, z -Ebenen sind Symmetrieebenen. Es entstehen in zwei Koordinatenrichtungen Parabeln als Schnittfiguren von Ebenen parallel zu diesen Symmetrieebenen. Die Schnittfiguren in Richtung der dritten Koordinate (x, y -Ebene) sind Ellipsen. Deshalb wird es *elliptisches Paraboloid* genannt.

3 Flächen zweiter Ordnung

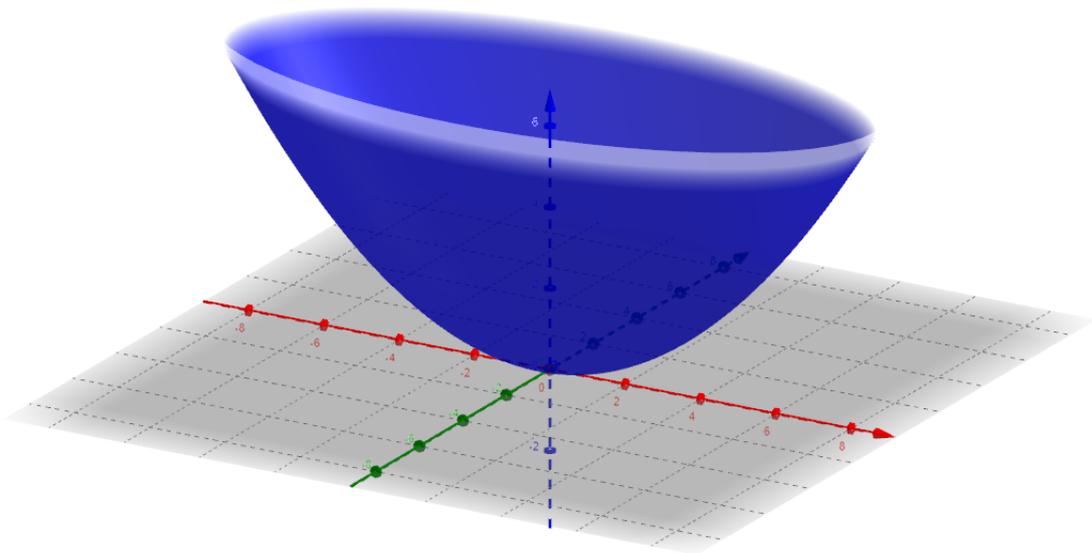


Abbildung 8: Das elliptische Paraboloid.

Satz 3.5 Die Flächengleichung eines elliptischen Paraboloids in Normalform lautet:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0. \quad (3.7)$$

Im einfachsten Fall ($a = b$) ist ein Paraboloid ein Rotationsparaboloid. Das ist der Körper, der entsteht, wenn eine Parabel mit der Gleichung $z = \frac{x^2}{a^2}$ im Raum um ihre Symmetrieachse rotiert. Die Ebenenschnitte senkrecht zur z-Achse ergeben dann Kreise als Schnittfiguren.

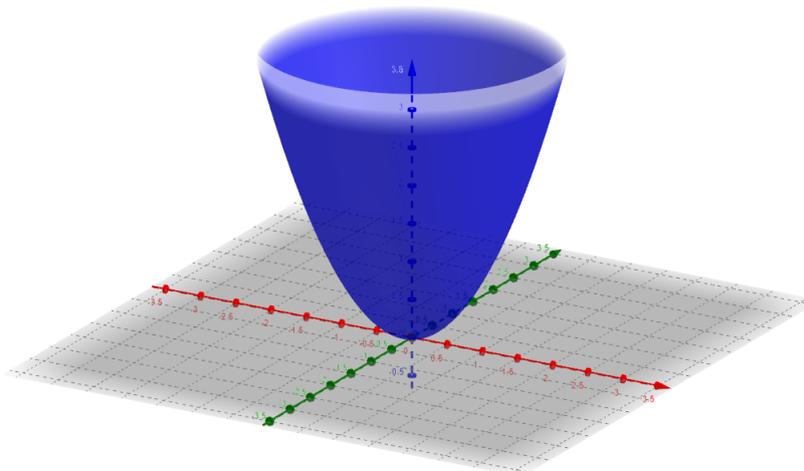


Abbildung 9: Rotationsparaboloid mit der Flächengleichung $x^2 + y^2 - z = 0$.

Parameterdarstellung

Satz 3.6 Die Parameterdarstellung für ein elliptisches Paraboloid mit der Flächengleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$ lautet:

$$\vec{c}(u, v) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot u \cdot \cos v \\ b \cdot u \cdot \sin v \\ u^2 \end{bmatrix}, \quad u \in \mathbb{R}, \quad v \in [0, 2\pi). \quad (3.8)$$

Aus der Flächengleichung in Normalform (3.7) lässt sich die Parameterdarstellung für ein elliptisches Paraboloid wie folgt herleiten.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z \\ z = u^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{(a \cdot u)^2} + \frac{y^2}{(b \cdot u)^2} = 1 \\ z = u^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{a \cdot u} = \cos v \\ \frac{y}{b \cdot u} = \sin v \\ z = u^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \cdot u \cdot \cos v \\ y = b \cdot u \cdot \sin v \\ z = u^2 \end{cases} \quad u \in \mathbb{R}, \quad v \in [0, 2\pi).$$

Tangentialebene

Analog zum Ellipsoid haben wir die gleiche Vorgehensweise zur Herleitung der Tangentialebenengleichung an ein elliptisches Paraboloid mit der Flächengleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$$

in einem Punkt $T(x_T, y_T, z_T)$. Es gilt:

$$\text{grad } f(x_T, y_T, z_T) = \begin{bmatrix} \frac{2x_T}{a^2} \\ \frac{2y_T}{b^2} \\ -1 \end{bmatrix}$$

ist ein Normalvektor der Tangentialebene im Punkt $T(x_T, y_T, z_T)$.

Die Gleichung der Tangentialebene, die den Normalvektor $\left[\frac{2x_T}{a^2} \quad \frac{2y_T}{b^2} \quad -1 \right]^T$ hat und durch den Punkt $T(x_T, y_T, z_T)$ verläuft, lautet:

$$\begin{aligned} \frac{2x_T}{a^2}(x - x_T) + \frac{2y_T}{b^2}(y - y_T) - (z - z_T) &= 0 \\ \frac{2xx_T}{a^2} + \frac{2yy_T}{b^2} - z - z_T - \left(\frac{2x_T^2}{a^2} + \frac{2y_T^2}{b^2} - 2z_T \right) &= 0 \\ \frac{2xx_T}{a^2} + \frac{2yy_T}{b^2} - z - z_T - 0 &= 0 \\ \frac{2xx_T}{a^2} + \frac{2yy_T}{b^2} - z - z_T &= 0. \end{aligned}$$

3 Flächen zweiter Ordnung

Satz 3.7 Sei $T(x_T, y_T, z_T)$ ein Punkt des elliptischen Paraboloids mit der Flächengleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0.$$

Dann hat die Tangentialebene im Punkt T die Normalgleichung:

$$\frac{2xx_T}{a^2} + \frac{2yy_T}{b^2} - z - z_T = 0.$$

Beispiel: Die Fläche F ist ein elliptisches Paraboloid mit der Gleichung:

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} - z = 0.$$

Die Parameterdarstellung lautet:

$$\vec{c}(u, v) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2u \cdot \cos v \\ 2\sqrt{2}u \cdot \sin v \\ u^2 \end{bmatrix}, \quad u \in \mathbb{R}, \quad v \in [0, 2\pi).$$

Der Punkt $T(2, 4, 3)$ liegt auf diesem elliptischen Paraboloid, da

$$\frac{2^2}{4} + \frac{4^2}{8} - 3 = 0.$$

Die Tangentialebene von F im Punkt T hat die Koordinatengleichung

$$\frac{2 \cdot 2 \cdot x}{4} + \frac{2 \cdot 4 \cdot y}{8} - z - 3 = 0 \quad \text{bzw.} \\ x + y - z - 3 = 0.$$

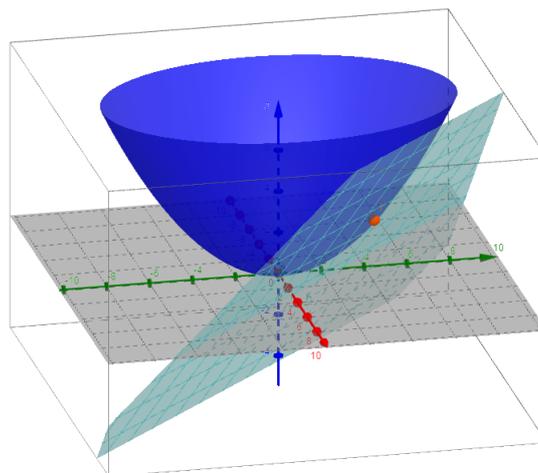


Abbildung 10: Das elliptische Paraboloid im Beispiel und die Tangentialebene im Punkt T.

3 Flächen zweiter Ordnung

Herleitung der Tangentialebene aus der Parameterdarstellung

Die Tangentialebene kann in analoger Weise wie bei dem Ellipsoid aus der Parameterdarstellung gewonnen werden. Die partiellen Ableitungen der Parameterdarstellung (3.5) ergeben die folgenden Tangentenvektoren:

$$\vec{n}_1 = \frac{\partial c}{\partial u} = \begin{bmatrix} a \cdot \cos v \\ b \cdot \sin v \\ 2u \end{bmatrix}$$

$$\vec{n}_2 = \frac{\partial c}{\partial v} = \begin{bmatrix} -au \cdot \sin v \\ bu \cdot \cos v \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Der Normalvektor ist:

$$\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$$

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} -2bu^2 \cdot \cos v \\ -2au^2 \cdot \sin v \\ abu \cdot \cos^2 v + abu \cdot \sin^2 v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2bu^2 \cdot \cos v \\ -2au^2 \cdot \sin v \\ abu \end{bmatrix}$$

$$\vec{n} = -\frac{1}{abu} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2au \cdot \cos v}{a^2} \\ \frac{2bu \cdot \sin v}{b^2} \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{abu} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2x_T^2}{a^2} \\ \frac{2y_T^2}{b^2} \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Damit hat die Tangentialebene im Punkt $T(x_T, y_T, z_T)$ die Normalrichtung $\left[\frac{2x_T^2}{a^2} \quad \frac{2y_T^2}{b^2} \quad -1 \right]^T$.

4 Anwendung von Quadriken

Quadriken sind in der Anwendung sehr vielseitig. Wir greifen hier beispielhaft ein paar Anwendungen aus der Mechanik, Geodäsie und dem Bauwesen heraus.

4.1 In der Mechanik

Beispiel 4.1: Wurfparabel

Die Erde zieht alles durch die Erdanziehungskraft zu sich hin. Wir betrachten einen schräg nach oben geworfenen Körper. Die Flugbahn verformt sich auf der Erde unter dem Einfluss der Gravitation zu einer Parabel. Der Körper wird aus der Höhe h über dem Boden und unter dem Winkel α geworfen. Die Anfangsgeschwindigkeit hat den Betrag v_0 . Der Abwurfwinkel α wird gegen die Horizontale gemessen. Wir bestimmen die Flugbahn in Abhängigkeit der Zeit. Dazu wählen wir das Koordinatensystem so, dass der Abwurfpunkt den x -Wert 0 und den y -Wert h hat.

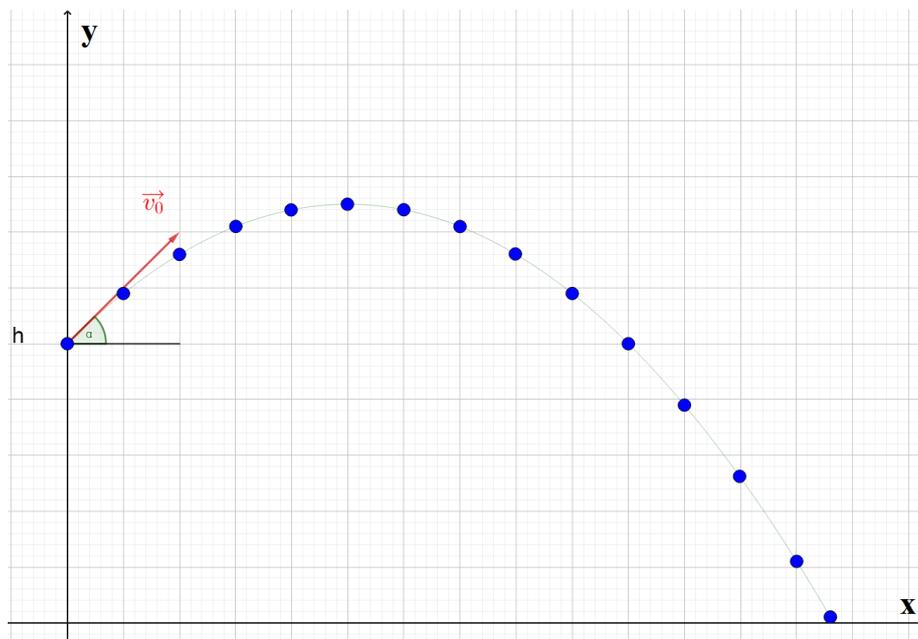


Abbildung 11: Beispiel von Wurfparabel.

Mit Hilfe der Bewegungsgesetze können wir zu jedem Zeitpunkt die x - und die y -Koordinate des Körpers bestimmen.

- Komponenten der Anfangsgeschwindigkeit:

$$v_{0x} = v_0 \cdot \cos \alpha$$

$$v_{0y} = v_0 \cdot \sin \alpha.$$

- Zeit-Geschwindigkeits-Gesetze

In x -Richtung wirken auf den Körper nach dem Abwurf keine Kräfte. Er führt in

4 Anwendung von Quadriken

dieser Richtung also eine gleichförmige Bewegung aus.

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cdot \cos \alpha.$$

In y -Richtung wirkt auf den Körper die Erdbeschleunigung g ($g \approx 9,81 \text{ m}^2/\text{s}$). In dieser Richtung führt er also eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung aus. Aus dem Zeit-Geschwindigkeits-Gesetz ergibt sich die folgende Gleichung:

$$v_y = v_{0y} - g \cdot t = v_0 \cdot \sin \alpha - g \cdot t.$$

- Zeit-Orts-Gesetze

Für die gleichförmige Bewegung in x -Richtung:

$$x(t) = v_{0x} \cdot t = t \cdot v_0 \cdot \cos \alpha.$$

Für die gleichmäßig beschleunigte Bewegung in y -Richtung mit der Abwurfhöhe h :

$$y(t) = h + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2}g \cdot t^2$$
$$y(t) = t \cdot v_0 \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2}g \cdot t^2 + h.$$

Wir erhalten somit die Parameterdarstellung:

$$\vec{c}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \cdot v_0 \cdot \cos \alpha \\ t \cdot v_0 \sin \alpha - \frac{1}{2}g \cdot t^2 + h \end{bmatrix}.$$

Mit Hilfe der Parameterelimination lässt sich die Bahngleichung herleiten.

$$t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos \alpha}$$
$$\Rightarrow y = \frac{x}{v_0 \cdot \cos \alpha} \cdot v_0 \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2}g \cdot \left(\frac{x}{v_0 \cdot \cos \alpha} \right)^2 + h$$
$$y = h + \tan \alpha \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} \cdot x^2.$$

Die Flugbahn ist eine Parabel, also eine Kurve zweiter Ordnung.

4.2 In der Geodäsie

Beispiel 4.2: Die Erde als Rotationsellipsoid

In der Geodäsie, Kartografie und den anderen Geowissenschaften werden Rotationsellipsoide als geometrische Annäherung an das physikalische Geoid benutzt.

Die Erde ist wie bei den meisten größeren Himmelskörpern ein kugelförmiger Planet. Die Frage nach der idealen Form der Erde gab es schon lange. Früher wurde eine perfekte Kugel als ideale Form der Erde angesehen. Mit dieser Hypothese hat man eine lange Zeit gut gelebt. Wenn man jedoch genauer hinschaut, dann ist die ideale Form der Erde eher ein Rotationsellipsoid als eine Kugel, weil sich wegen der Fliehkräfte aufgrund der Erdrotation am Äquator eine Schwellung gebildet hat. Der Erdkörper hat etwa folgende Ausdehnung:

4 Anwendung von Quadriken

- mittlerer Äquatorradius ~ 6.378 km
 - mittlerer Polradius ~ 6.357 km (etwa 20 km weniger).
- Wobei der Äquator definiert ist als der Großkreis, der von beiden Polen gleich weit entfernt ist. Die geographischen Pole sind als Schnittpunkte der Rotationsachse mit der Erdoberfläche definiert. Das Rotationsellipsoid dient dann als Referenzfläche um die Lage bzw. Höhe von Objekten der Erdoberfläche anzugeben. Man spricht dann von einem Referenzellipsoid. Die Referenzfläche ist eine mathematisch-geometrische Ersatzfläche für die Erde, die durch die Rotation einer Ellipse um ihre Achse entsteht.

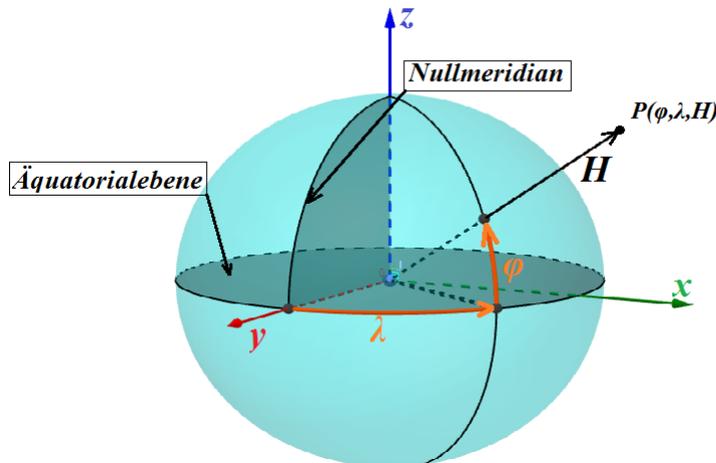


Abbildung 12: Ellipsoidische Koordinaten.

Zur Positionsangabe eines Punktes mittels ellipsoidischer Koordinaten ist eine getrennte Darstellung von Lage und Höhe zu verwenden. Zunächst wird die Lage eines Punktes auf der Referenzfläche durch Angabe von geographischer Länge und Breite bestimmt. Die orthometrische Höhe ist nun der relative Abstand in Bezug auf den Punkt auf der Oberfläche.

Ellipsoidische Koordinaten eines Punktes P : $P(\varphi, \lambda, H)$.

Dabei bezeichnet die ellipsoidische Breite φ den Winkel zwischen Ellipsoidnormale in P und Äquatorialebene. Die ellipsoidische Länge ist der Winkel zwischen dem Nullmeridian und der Meridianebene von P .

Es besteht ein Zusammenhang zwischen der ellipsoidischen Lage und der Parameterdarstellung eines Ellipsoids im Abschnitt 3.3. Der Breitengrad φ entspricht dem Winkel u und der Längengrad λ entspricht dem Winkel v in der Parameterdarstellung.

4.3 Im Bauwesen

Beispiel 4.3: Hyperboloidkonstruktion

Das einschalige Rotationshyperboloid ist eine reguläre Fläche zweiter Ordnung. Es entsteht dann, wenn wir eine Hyperbel um eine ihrer Achsen rotieren lassen. Drehen

wir um die Nebenachse, so bezeichnen wir das Rotationshyperboloid als einschalig, bei Rotation um die Hauptachse dagegen als zweischalig. Es besteht aus zwei getrennten Flächenstücken.

Einschaliges Hyperboloid als Regelfläche

Eine Fläche heißt Regelfläche, wenn sie durch die Bewegung einer Geraden im Raum gebildet werden kann. Das einschalige Hyperboloid lässt sich auch durch Rotation einer zur Achse windschiefen Geraden erzeugen.

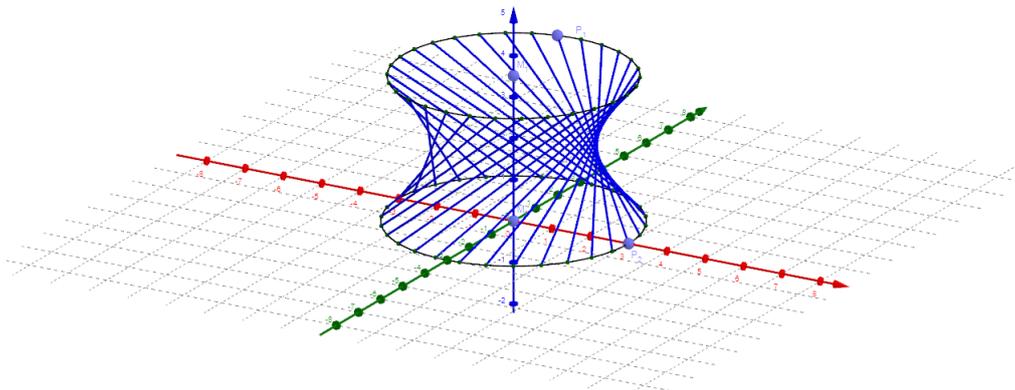


Abbildung 13: Erzeugung eines einschaligen Hyperboloids durch Rotation einer zur Achse windschiefen Geraden.

Gleichung des einschaligen Hyperboloids

Bei entsprechender Wahl des Koordinatensystems und für von 0 verschiedene Werte a , b , c ist die Gleichung des einschaligen Hyperboloids von der Form:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Besonderheit des einschaligen Hyperboloids

Satz 4.1 Durch jeden Punkt eines einschaligen Hyperboloids gehen genau zwei Geraden, die ganz in diesem Hyperboloid enthalten sind.

Diese Geraden nennen wir *Erzeugende* des einschaligen Hyperboloids. Auf jedem einschaligen Hyperboloid gibt es genau zwei erzeugende Geradenscharen. Je zwei Geraden derselben Schar sind zueinander windschief, je zwei Geraden verschiedener Scharen schneiden sich in genau einem Punkt. Die zweite Schar erzeugender Geraden ergibt sich, wenn der Richtungsvektor der Erzeugende gespiegelt wird.

Beweis von Satz 4.1

Zunächst benötigen wir einen Begriff.

4 Anwendung von Quadriken

Definition Eine *Gerade* in \mathbb{R}^3 ist eine Menge aller Punkte der Form:

$$g = \{ \vec{x} + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R} \},$$

wobei $\vec{x}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ und $v \neq 0$.

Wir können so annehmen, dass das einschalige Hyperboloid

$$H : \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad x, y, z \in \mathbb{R}$$

mit den Koeffizienten $a, b, c > 0$ ist. Die Rechnungen lassen sich vereinfachen, indem wir die folgende bijektive Abbildung benutzen.

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^3 &\mapsto \mathbb{R}^3 \\ \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c} \right) &\mapsto (x, y, z) \\ H &\mapsto H' \\ \Rightarrow H' : \quad x^2 + y^2 - z^2 &= 1. \end{aligned}$$

Sei $P(x_P, y_P, z_P)$ ein beliebiger Punkt von H' . Durch eine entsprechende Drehung um die z -Achse können wir annehmen das $x_P = 0$. Ist $v \in \mathbb{R}^3$, $v \neq 0$, so liegt die durch P verlaufende Gerade

$$g : x + tv, \quad t \in \mathbb{R}$$

ganz in H' , wenn für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (tv_1)^2 + (y_P + tv_2)^2 - (z_P + tv_3)^2 &= 1 \\ t^2(v_1^2 + v_2^2 - v_3^2) + 2t(y_P v_2 - z_P v_3) + (y_P^2 - z_P^2) &= 1 \\ \text{Da } y_P^2 - z_P^2 = 1 \Rightarrow t^2(v_1^2 + v_2^2 - v_3^2) + 2t(y_P v_2 - z_P v_3) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} v_1^2 + v_2^2 &= v_3^2 \\ y_P v_2 - z_P v_3 &= 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Da $v = (v_1, v_2, v_3) \neq (0, 0, 0)$, so muss v_3 von 0 verschieden sein. Wir können daher so normieren, dass $v_3 = 1$. Das obige Gleichungssystem ist dann äquivalent zu

$$\begin{aligned} \begin{cases} y_P v_2 &= z_P \\ v_1^2 + v_2^2 &= 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} v_2 &= \frac{z_P}{y_P} \\ v_1^2 &= 1 - v_2^2 = \frac{y_P^2 - z_P^2}{y_P^2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} v_2 &= \frac{z_P}{y_P} \\ v_1^2 &= \frac{1}{y_P^2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} v_2 &= \frac{z_P}{y_P} \\ v_1 &= \pm \frac{1}{y_P}. \end{cases} \end{aligned}$$

Also hat eine der beiden in H' enthaltenen Geraden durch P einen Richtungsvektor $\vec{v}_+ = \left[\frac{1}{y_P} \quad \frac{z_P}{y_P} \quad 1 \right]^T$ und die andere $\vec{v}_- = \left[-\frac{1}{y_P} \quad \frac{z_P}{y_P} \quad 1 \right]^T$.

Im Bauwesen und in der Architektur werden Tragwerke in Form des Rotationshyperboloids verwendet. Man spricht dann von einer Hyperboloidkonstruktion. Der

4 Anwendung von Quadriken

große Vorteil dieser Konstruktion ist nämlich, dass wir eine gekrümmte Fläche durch Geraden erzeugen können. Dabei wird die Besonderheit des einschaligen Rotationshyperboloids ausgenutzt und angewandt. In der Praxis kann die äußere Schale einer Hyperboloidkonstruktion mit einem oder zwei Gittern aus geraden Elementen hergestellt werden. Sie ist daher leichter zu bauen als gekrümmte Flächen, bei denen gekrümmte Elemente erforderlich sind. Hyperbolische Strukturen haben im Vergleich zu *geraden* Bauwerken noch eine bessere Stabilität gegenüber äußeren Kräften und einen minimalen Windwiderstand. Ihre Formen erzeugen aber eine große Menge an unbrauchbarem Volumen und werden daher häufiger bei zweckgerichteten Bauwerken wie Wassertürmen, Kühltürme und ästhetischen Merkmalen angewandt.



Abbildung 14: Beispiele für Hyperboloidkonstruktionen.

Die erste Hyperboloidkonstruktion war ein Wasserturm, der von dem russischen Ingenieur, Wladimir Schuchow entworfen und 1896 erbaut wurde. Heute werden die Kühltürme auch nach dieser Methode gebaut. Bei den Kühltürmen bietet die Erweiterung an der Unterseite des Turms einen großen Raum für die Installation. Die Form eines Rotationshyperboloids hat aber noch gute strömungstechnische Eigenschaften. Wenn das erhitzte Wasser unten in den Kühlturm eingesprüht wird, so erwärmt sich die Luft, dehnt sich aus, strömt zusammen mit dem Dampf nach oben und zieht dabei vom unteren Rand jeweils frische Kaltluft.

Beispiel 4.4: Flächen zweiter Ordnung im Dachbau

Das hyperbolische Paraboloid ist eine singuläre Fläche zweiter Ordnung und wird aufgrund der Form auch als Sattelfläche bezeichnet. Es entsteht durch Schieben einer Parabel entlang einer anderen Parabel. Folgende Bedingungen müssen die Parabeln

erfüllen:

- Ihre Trägerebenen sind zueinander orthogonal.
- Die Achse und die Scheitel der Parabeln stimmen überein.
- Die Parabeln müssen nach verschiedenen Seiten geöffnet sein.

Das hyperbolische Paraboloid als Regelfläche

Das hyperbolische Paraboloid ist auch eine Regelfläche, die durch Bewegung einer Gerade mit Endpunkten auf zwei zueinander windschiefen Geraden entsteht.

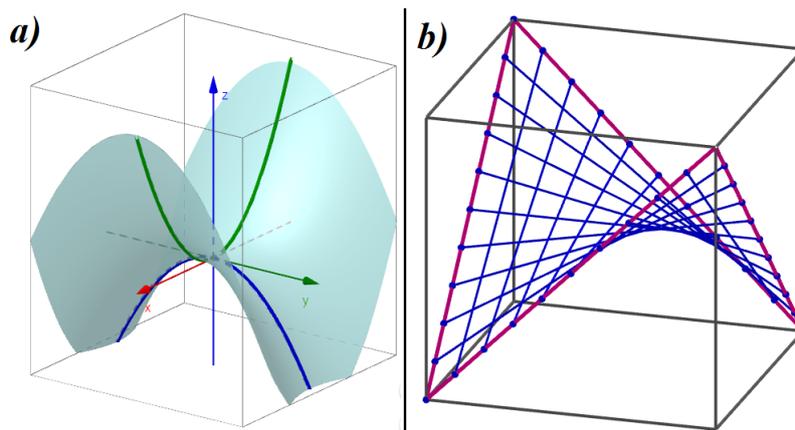


Abbildung 15: Das hyperbolische Paraboloid als a) Schiebfläche und b) Regelfläche.

Gleichung des hyperbolischen Paraboloids

Bei entsprechender Wahl des Koordinatensystems und für von 0 verschiedenen Werte a, b, c lautet die Gleichung des hyperbolischen Paraboloids in Normalform:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + cz = 0.$$

Satz 4.2 Durch jeden Punkt eines hyperbolischen Paraboloids gehen genau zwei Geraden, die ganz in diesem Paraboloid enthalten sind.

Ein hyperbolisches Paraboloid enthält zwei Scharen erzeugender Geraden. Jeder dieser Scharen von Geraden liegen parallel zu einer Ebene. Je zwei Geraden derselben Schar sind zueinander windschief und je zwei Geraden verschiedener Scharen schneiden sich in genau einem Punkt.

Beweis von Satz 4.2

Der Beweis wird in analoger Weise wie bei dem einschaligen Hyperboloid durchgeführt. Sei H ein hyperbolisches Paraboloid mit der Gleichung:

$$H : x^2 - y^2 + z = 0.$$

4 Anwendung von Quadriken

Und $P(x_P, y_P, z_P)$ ist ein beliebiger Punkt von H . Durch eine entsprechende Drehung um die x -Achse können wir annehmen, dass $y_P = 0$. Die Gerade $g : x + tv$, die durch P verläuft und ganz in H liegt, wenn für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (x_P + tv_1)^2 - (tv_2)^2 + (z_P + tv_3) &= 0 \\ (x_P^2 + z_P) + t^2(v_1^2 - v_2^2) + t(2x_P v_1 + v_3) &= 0 \\ \text{Da } x_P^2 + z_P = 0 \Rightarrow t^2(v_1^2 - v_2^2) + t(2x_P v_1 + v_3) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} v_1^2 - v_2^2 &= 0 \\ 2x_P v_1 + v_3 &= 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Da $v = (v_1, v_2, v_3) \neq (0, 0, 0)$, so dürfen v_1 und v_2 nicht 0 sein. Deswegen können wir hier so normieren, dass $v_1 = 1$. Das obige Gleichungssystem ist dann äquivalent zu

$$\begin{cases} v_2^2 &= 1 \\ 2x_P + v_3 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_2 &= \pm 1 \\ v_3 &= -2x_P. \end{cases}$$

Es gibt also genau zwei Geraden, die durch P und ganz in H enthalten sind. Eine der beiden Geraden hat den Richtungsvektor $\vec{v}_+ = [1 \ 1 \ -2x_P]^T$ und die andere $\vec{v}_- = [1 \ -1 \ -2x_P]^T$.

Wegen der beiden Geradenscharen werden die hyperbolischen Paraboloid-Schalen (HP-Schalen) in der Architektur und im Bauwesen als Dachfläche eingesetzt. Der Vorteil ist, dass sie zum einen als Regelfläche aus geraden Elementen hergestellt werden können und zum anderen eine ästhetische Form besitzen, insbesondere in der Kombination von mehreren Schalen und bei geschwungenen Dachflächen. Bei dieser Dachform werden Verschalungen hergestellt, indem ein Netz von ganz in der Fläche liegenden Stahlseile für das Tragwerk aufgebaut wird.

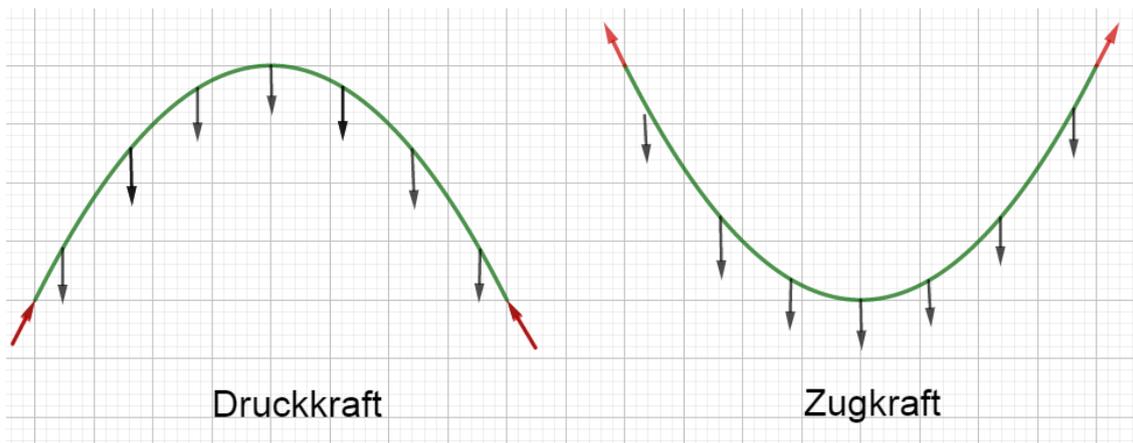


Abbildung 16: Tragverhalten von HP-Schalen.

Die HP-Schale besitzt ein günstiges, überschaubares Tragverhalten mit relativ gleichmäßiger Schnittkraftverteilung bei passender Lagerung und ein gutes Stabilitätsverhalten. Die Belastung lässt sich nicht mehr von Wänden oder Stützen sondern von

4 Anwendung von Quadriken

der Schale selbst tragen und in die Bodenplatte leiten. Da das hyperbolische Paraboloid aus einer Reihe von Parabeln mit unterschiedlichen Öffnungsseiten besteht, werden die Druckkräfte von stehenden Parabeln und die Zugkräfte von hängenden Parabeln aufgenommen. Diese Struktur kann daher sowohl Druckkräfte als auch Zugkräfte aufnehmen.



Abbildung 17: Teepott Warnemünde in Rostock.

Der Teepott ist eine Sehenswürdigkeit in Rostock. Sein Dach wurde von Bauingenieur Ulrich Müther entworfen und ist eine hyperbolische Paraboloidschale, welche aus drei einzelnen Flächen besteht. Es verfügt dadurch über eine hohe Festigkeit. Während das Gewicht des Daches von den drei senkrechten Stahlbetonstützen getragen wird, übernehmen die schrägen Stützen Windkräfte und horizontalen Belastungen.

In den folgenden Abbildungen sind noch ein paar Anwendungsbeispiele von Flächen zweiter Ordnung in der Dachkonstruktion zu sehen.

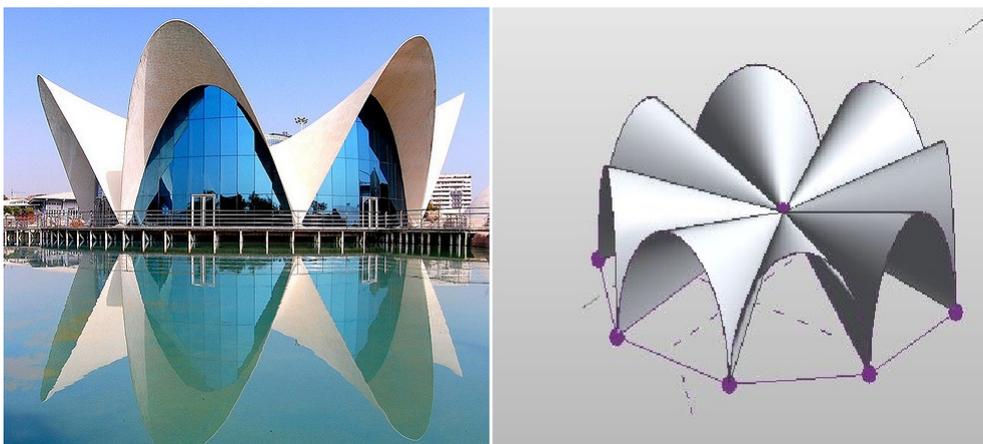


Abbildung 18: Die Dachkonstruktion von L'Oceanogràfic in Valencia.

4 Anwendung von Quadriken



Abbildung 19: Die Karlskirche in Wien mit ellipsoidförmiger Kuppel.



Abbildung 20: Die Dächer des berühmten Opernhauses in Sydney waren aus einer einzelnen Kugel geschnittene Segmente.

Literatur

Die Literaturangaben sind alphabetisch nach den Namen der Autoren geordnet. Bei mehreren Autoren wird nach dem ersten Autor sortiert. Alle Internetadressen und Links beziehen sich auf März 2018 und können sich zwischencitlich geändert haben.

Literatur

- [1] Arens, T. *Mathematik*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg 2008.
- [2] Bronstein, I. N.; Semendjajew, K. A. *Taschenbuch der Mathematik*. Wissenschaftlicher Verlag Harri GmbH, Frankfurt 2008.
- [3] Burg, K., Haf, H., Wille, F., Meister, A. *Höhere Mathematik für Ingenieure Band II*. Springer Verlag, Wiesbaden 2017.
- [4] Koch, J.; Stämpfle, M. *Mathematik für das Ingenieurstudium*. Carl Hanser Verlag, München 2017.
- [5] Meyberg, K.; Vachenauer, P. *Höhere Mathematik 1*. Springer Verlag, Berlin 1999.
- [6] Handrock, S.: Vorlesungsskript Mathematik II für Wirtschaftsingenieure, <https://www-user.tu-chemnitz.de/syha/lehre/wiingII/wiII.pdf>
- [7] Berge, I.: Geodätische Koordinatensysteme, https://www.cs.hs-rm.de/linn/fachsem0809/GeoCoord/Geodaetische_Koordinatensysteme.pdf
- [8] deacademic.com: Kühlturm, <http://deacademic.com/dic.nsf/dewiki/813592>
- [9] Axel Schuldt: Der Teepott von Warnemünde, <http://www.warnemuende-infos.de/teepott-warnemuende.html>
- [10] iui.uni-stuttgart.de: Die Oper von Sydney, http://www.iui.uni-stuttgart.de/fileadmin/downloads/bachelor/vorlesung/SS2010-dedi/studienleistung/09_Opera_House_Sydney_Ausarbeitung.pdf

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich diese Arbeit selbständig verfasst und keine anderen, als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt. Die Arbeit wurde weder in dieser oder einer ähnlichen Form noch in Auszügen bereits einer Prüf Stelle vorgelegt.

Weimar, den 8. März 2018

Danksagung

Einen ganz besonderen Dank möchte ich in erster Linie an meinen Betreuer, Herrn Prof. Reinhard Illge, für seine ausgiebige Unterstützung. Er stand nicht nur für aufschlussreiche und unterhaltsame Gespräche zur Verfügung, sondern schaffte es auch, mich stets zu motivieren.

Außerdem möchte ich mich bei meinen Freunden für das Korrekturlesen bedanken. Vielen Dank an dieser Stelle für die Zeit und Mühen.