

## Zur Anwendung von Chaos-Entwicklungen in der Tragwerksstatik

Von J. Biehounek, H. Grolik und S. Herz

Hochschule Anhalt (FH), Fachbereich Architektur und Bauingenieurwesen  
Dessau

*Seit mehr als fünfzig Jahren werden zur Untersuchung der Tragwerkssicherheit auch Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung herangezogen. Ungeachtet der inzwischen erreichten Fortschritte und der offensichtlichen Vorzüge, konnte dieses Vorgehen in der Praxis bis jetzt noch nicht ausreichend Fuß fassen. Im Beitrag wird das Problem der Tragwerkssicherheit mit einem neuartigen Verfahren behandelt. Im Unterschied zu den üblichen probabilistischen Methoden geht es nicht von Verteilungsfunktionen aus. Vielmehr werden die maßgebenden Zufallsgrößen in den Mittelpunkt gestellt und direkt in die Rechenvorschrift eingeführt. Als mathematisches Hilfsmittel dienen die WIENERSchen Chaos-Polynome. Sie stellen im Raum der Zufallsgrößen mit beschränkter Varianz eine Basis dar, mit der sich eine beliebige Zufallsgröße nach orthogonalen Polynomen GAUSSscher Zufallsgrößen entwickeln läßt. So entsteht ein effektiver Formalismus, der sich eng an die herkömmliche Deformationsmethode anlehnt und als deren probabilistische Verallgemeinerung angesprochen werden darf. Die Methode liefert die Grenzzustandsbedingung als Funktion der auf das Tragwerk wirkenden Zufallsgrößen. Die Versagenswahrscheinlichkeit kann daher durch Monte-Carlo-Simulation bestimmt werden. Die mit der Auswertung des Wahrscheinlichkeitsintegrals der First Order Reliability Method (FORM) verbundenen Schwierigkeiten werden vermieden. An einem Beispieltragwerk wird dargestellt, wie sich Veränderungen gewisser Konstruktionsparameter auf die Versagenswahrscheinlichkeit auswirken.*

### 1. Einführung

Im Bauingenieurwesen sind nahezu alle für die Bemessung eines statischen Systems maßgebenden Belastungs-, Material- und Geometriegrößen in gewissen Grenzen unscharf. Da damit das Resultat im Rahmen verschiedener Möglichkeiten ungewiß ist, stellt die Konstruktion eines Tragwerks einen Zufallsversuch dar. Die Aufgabe ist umfangreich und läßt sich in Teilschritte zergliedern. Diese sind selber wieder Zufallsversuche. Indem sich der Konstrukteur beispielsweise für ein ganz bestimmtes Walzprofil eines Herstellers entscheidet, veranlaßt er einen derartigen Versuch: Aus dem Materiallager wird ein geeigneter Stab ausgewählt. Als Ergebnis kommt z.B. der Wert der Zufallsgröße  $E$ -Modul infrage, der durch diese Wahl realisiert wird. Danach wird der Stab auf die vorgesehene Länge gebracht. Weil sich die Länge nur innerhalb gewisser Grenzen verwirklichen läßt, ist auch das ein Zufallsversuch. Nun hat der Wert des  $E$ -Moduls nichts mit der Länge des Stabes zu tun. Daher darf man annehmen, daß die einzelnen Teilversuche ohne gegenseitige Beeinflussung ablaufen. Zur Beschreibung von Zufallsversuchen, die darin bestehen, daß  $n$  unabhängige Experimente nacheinander oder nebeneinander ausgeführt werden, benutzt man in der Mathematik Produkt-Wahrscheinlichkeitsräume. In diesem Fall setzt sich der für den Gesamtversuch maßgebende Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  in einem bestimmten

Sinn aus den für die Teilerperimente maßgebenden Räumen  $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, P_i)$  als Faktoren zusammen (vgl. [1.1]). So ist die Menge der Elementarereignisse  $\Omega$  gemäß

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n \quad (1.1)$$

das kartesische Produkt der Mengen  $\Omega_i$ , und für das auf  $\mathcal{A}$  definierte Wahrscheinlichkeitsmaß gilt

$$P(\Delta A) = P_1(\Delta A_1) \dots P_k(\Delta A_k), \quad (1.2)$$

wobei  $\Delta A \in \mathcal{A}$  ein Ereignis ist, das bei Ausführung des Gesamtversuches eintreten kann, während die  $\Delta A_i \in \mathcal{A}_i$  Ergebnisse der Einzelversuche sind, die das Ereignis  $\Delta A$  implizieren.

Die in der Tradition von M. MAYER [1.2] und A.M. FREUDENTHAL [1.3] stehende probabilistische Theorie der Tragwerkssicherheit (s. z.B. [1.4], [1.5]) baut auf dem Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$  auf. Ist  $\vec{B}$  der Vektor der Basisvariablen, darf ohne Einschränkung der Allgemeinheit das Versagen des Systems für  $g(\vec{B}) < 0$  angenommen werden. Der Versagensbereich ist dann durch

$$V = \{\vec{b} \mid g(\vec{b}) < 0\} \quad (1.3)$$

definiert. Als Versagenswahrscheinlichkeit ergibt sich daraus

$$P_f = P(g(\vec{B}) < 0) = \int_V f_{\vec{B}}(\vec{b}) d\vec{b}. \quad (1.4)$$

Die Berechnung des mehrdimensionalen Integrals ist das Grundproblem dieser Richtung der probabilistischen Zuverlässigkeitstheorie. Eine analytische Behandlung ist nur in Sonderfällen möglich (vgl.[1.4]). Gewöhnlich ist man auf Näherungsmethoden angewiesen, von denen die *first order reliability method (FORM)* die am häufigsten angewandte sein dürfte. FORM umgeht die direkte Berechnung des Integrals und bestimmt  $P_f$  über eine Optimierungsaufgabe. Dazu ist es erforderlich, in der Grenzzustandsfunktion  $g$  die Basisvariablen  $B_i$  über eine wahrscheinlichkeitserhaltende Transformation durch Zufallsgrößen  $Y_i \in N(0;1)$  auszudrücken und  $g$  im Bemessungspunkt durch eine Tangentialhyperebene zu ersetzen. Bei diesem Vorgehen treten solche Standardverfahren des Bauingenieurwesens wie das Kraftgrößen- oder das Weggrößenverfahren vordergründig nicht mehr in Erscheinung. Ein Konzept, das sich stärker an die herkömmliche Vorgehensweise anlehnt, kann daher dazu beitragen, die wahrscheinlichkeitstheoretische Tragwerksbemessung zu vereinfachen und ihre praktische Anwendung zu begünstigen. Im Beitrag wird ein neuartiges Verfahren vorgestellt, das zufallsbeeinflusste Stahltragwerke in einer Weise behandelt, die in ihrer Substanz der Deformationsmethode entspricht. Um die dem konstruktiv tätigen Ingenieur vertraute Vorgehensweise zu wahren, muß allerdings ein Hilfsmittel der Wahrscheinlichkeitsrechnung herangezogen werden, das bisher in der probabilistischen Sicherheitstheorie nicht allgemein üblich ist: Die Entwicklung der auftretenden Zufallsgrößen in *Chaos-Polynome*. Wie dieses mathematische Instrument genutzt wird, das auch bei der Kraftgrößenmethode eingesetzt werden kann [1.6], wird am Beispiel der Deformationsmethode erläutert [1.7].

## 2. Die probabilistische Verallgemeinerung der Deformationsmethode

Ein zentrales Element der probabilistischen Sicherheitstheorie von Tragwerken ist der Grenzzustand. Gewöhnlich wird er über eine lokal vorgegebene Schranke einer Wirkungsgröße definiert. Der jeweilige Grenzzustand muß gekennzeichnet und als mathematische Bedingung formuliert werden. Dies setzt ein mathematisches Modell voraus, welches das Tragwerk über eine Zuordnung von Eingangs-

größen und Ausgangsgrößen beschreibt. Bei der Deformationsmethode ist diese Abbildung implizit durch die Gesamt-Steifigkeitsbeziehung

$$K \cdot V = P \quad (2.1)$$

gegeben, die den Vektor  $V$  der Weggrößen mit dem Vektor  $P$  der Kraftgrößen über die Gesamt-Steifigkeitsmatrix  $K$  verbindet. Ist  $n_d$  die Zahl der zu berücksichtigenden Deformationsgrößen, so sind die Matrizen  $V$  und  $P$  in (2.1) vom Typ  $(n_d, 1)$ . Ferner ist  $K$  eine quadratische Matrix vom Typ  $(n_d, n_d)$ . Unscharfe Bemessungsgrößen belasten sowohl  $P$  als auch  $K$  mit gewissen Unsicherheiten. Sie können bei  $K$  von den Elastizitätsmoduln der Stäbe ausgehen und lassen sich mit Methoden der Wahrscheinlichkeitstheorie erfassen. Der Ansatzpunkt zur Verbindung von Stochastik und Mechanik ist in der Struktur von (2.1) zu finden. Die Elemente  $k^{(ij)}$  von  $K$  ergeben sich aus den in den Stäben des Tragwerks wirkenden Schnittkräften. Dabei ist jedes  $k^{(ij)}$  eine Linearkombination einzelner Stab-Beiträge. Besteht das Tragwerk aus  $s$  Stäben, so läßt sich auch  $K$  als Summe

$$K = \sum_{l=1}^s K_l \quad (2.2)$$

darstellen, wobei jede  $(n_d, n_d)$ -Matrix  $K_l$  einem ganz bestimmten Stab zuzurechnen ist [1.7]. Die für den Tragwerkswiderstand maßgebenden Basisvariablen sind in  $K$  enthalten. Insbesondere gehen der Elastizitätsmodul  $E$  bzw. die Biegesteifigkeit  $E \cdot I$  als Faktoren ein, die in jedem Element einer Teilmatrix  $K_l$  enthalten ist. Werden diese Größen allgemein mit  $B_l$  bezeichnet, so gestattet dieser Umstand die Darstellung

$$K_l = B_l W_l, \quad l = 1, 2, \dots, s. \quad (2.3)$$

Dabei ist  $W_l$  eine nichtzufällige Matrix vom Typ  $(n_d, n_d)$ , die sich nach der klassischen Deformationsmethode ergibt. Man muß lediglich darauf verzichten, den  $E$ -Modul bzw. die Biegesteifigkeit als Zahlenwert einzusetzen. Nach dieser Umformung besitzt die Gesamt-Steifigkeitsbeziehung des Tragwerkes die Gestalt

$$\sum_l B_l W_l V = P. \quad (2.4)$$

Auf der rechten Seite ist eine ähnliche Überlegung möglich. Da der Vektor der Kraftgrößen linear von den auf das Tragwerk wirkenden Belastungen abhängt, kann  $P$  in Bezug auf die Belastungsgrößen in Summanden aufgespalten werden, von denen jeder einer ganz bestimmten Belastungsgröße entspricht. Sind insgesamt  $p$  derartige Größen vorhanden, so gilt

$$P = \sum_{k=1}^p P_k. \quad (2.5)$$

Bei den Summanden handelt es sich um die  $(n_d, 1)$ -Matrizen

$$P_k^T = \left( p_k^{(1)}, p_k^{(2)}, \dots, p_k^{(n_d)} \right) \quad (2.6)$$

Die Berechnung der  $p_k^{(i)}$  erfolgt über Integrale, deren Integranden gewisse Schnittkräfte *und* die Lastgrößen enthalten. Letztere sind Basisvariable, die nachfolgend in Anlehnung an die gebräuchliche Symbolik mit  $Q_k$ ,  $k = 1, \dots, p$  bezeichnet werden. Weil  $Q_k$  nach der Logik der Deformationsmethode in jedem  $p_k^{(i)}$  als Faktor erscheint, läßt sich ein Spaltenvektor  $P_k$  gemäß

$$P_k = Q_k S_k, \quad k = 1, \dots, p \quad (2.7)$$

als Produkt der Zufallsgröße  $Q_k$  mit den nichtzufälligen  $(n_d, 1)$ -Matrizen  $S_k$  darstellen. Letztere werden nach der Rechenvorschrift der Deformationsmethode in der herkömmlichen Weise ermittelt. Abweichend von der üblichen Vorgehensweise wird allerdings die Belastungsgröße in den Formeln nicht als Zahlenwert eingesetzt. Insgesamt entsteht auf diese Weise die Gesamt-Steifigkeitsbeziehung

$$\sum_{l=1}^s B_l W_l V = \sum_{k=1}^p Q_k S_k \quad (2.8)$$

Die in (2.8) auftretenden Größen  $B_l$ ,  $Q_k$  werden als Zufallsgrößen aufgefaßt, die für die einleitenden erwähnten Teilversuche kennzeichnend sind. Weil in (2.8) sowohl die linke als auch die rechte Seite Zufallsgrößen enthalten, unterscheidet sich das System prinzipiell von der Gesamt-Steifigkeitsbeziehung der deterministischen Deformationsmethode. Der Unterschied zur klassischen Vorgehensweise besteht in *zwei* Punkten: a) Weil Zufallsgrößen wegen der ihnen wesenseigenen Streuung kein bestimmter Wert fest zugewiesen werden kann, muß ein Gleichungssystem behandelt werden, dessen Koeffizientenmatrix allgemeine Zahlen enthält. Das behindert die praxisgerechte Automatisierung der Methode. Schwerwiegender als diese mehr im praktischen Bereich liegenden Komplikation ist allerdings b), daß nun die Koeffizientendeterminante  $\det(K)$  zufällig ist und daher keinen festen Zahlenwert besitzt. Vielmehr streuen ihre Werte nach Maßgabe eines Verteilungsgesetzes um den Mittelwert und  $\det(K) = 0$  kann nicht mehr sicher ausgeschlossen werden. Diese Schwierigkeit muß beim Ausbau der Deformationsmethode zur vollprobabilistischen Theorie überwunden werden.

### 3. Chaos-Entwicklungen

Der für den Zufallsversuch „Konstruktion eines Tragwerks“ maßgebende Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, A, P)$  ist ein Produktraum, der sich aus den Wahrscheinlichkeitsräumen  $(\Omega_i, A_i, P_i)$  als Faktoren zusammensetzt. Der Ausgang eines Teilversuchs wird durch eine Zufallsgröße

$$X_i : \Omega_i \rightarrow R \quad (3.1)$$

beschrieben. Für den Gesamtversuch ist dann der auf  $\Omega$  definierte zufällige Vektor

$$\vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (3.2)$$

mit Werten in  $R^n$  maßgebend. Bei der Anwendung auf die Deformationsmethode heißt  $\vec{X}$  Vektor der Basisvariablen und wird mit  $\vec{B}$  bezeichnet. Er enthält die Elemente  $B_l$ ,  $Q_k$ ,  $l = 1, \dots, s$ ,  $k = 1, \dots, p$ . Wird nun gefordert, daß jedes auf  $\Omega$  definierte  $X_i$  der Forderung

$$E X_i^2 = \int_{\Omega} |X_i(\omega)|^2 P(d\omega) < \infty, \quad (3.3)$$

genügt, so bildet diese Menge bekanntlich einen separablen HILBERTraum  $L^2(\Omega, A, P)$  mit dem Skalarprodukt

$$(X, Y) = E XY = \int_{\Omega} X(\omega)Y(\omega)P(d\omega) \quad (3.4)$$

und der Norm

$$\|X\|^2 = E X^2. \quad (3.5)$$

Der HILBERTraum  $L^2$  ist eine unmittelbare Verallgemeinerung des EUKLIDischen Raums  $R^n$ . Daher erhebt sich die Frage, inwiefern Eigenschaften des  $R^n$  auch dem  $L^2$  zukommen. Weil die auf  $\Omega$  definierten Zufallsgrößen Funktionen sind, interessiert beispielsweise deren Approximation durch ein System orthogonaler Polynome – eine Methode, die sich im  $R^n$  in der Ausgleichsrechnung und harmonischen Analyse immer wieder praktisch bewährt. In der Tat ist es auch im  $L^2$  möglich, auf der Grundlage der WIENERSchen *Chaos-Entwicklung* [3.1], [3.2], [3.3] Zufallsgrößen durch HERMITESche Polynome GAUSSScher Zufallsgrößen zu approximieren.

Zur Erläuterung der Vorgehensweise soll zunächst an den Begriff der *Orthogonalität* erinnert werden. Zwei Zufallsgrößen  $X, Y \in L^2(\Omega, A, P)$  heißen orthogonal für

$$(X, Y) = 0. \quad (3.6)$$

Insbesondere ist ein System  $(G_1, G_2, \dots, G_n, \dots)$  von Elementen des  $L^2$  orthonormiert, wenn stets

$$(G_i, G_j) = \delta_{ij} \quad (3.7)$$

gilt, wo  $\delta_{ij}$  das KRONECKER-Symbol ist.

Diese, der Funktionalanalysis entlehnte Begriffsbildung, besitzt ein Pendant in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Und zwar heißen dort zwei Zufallsgrößen unkorreliert, wenn ihre Kovarianz

$$\text{cov}(X, Y) = E[(X - EX)(Y - EY)] \quad (3.8)$$

verschwindet. Handelt es sich speziell um zentrierte Zufallsgrößen, so ist die Kovarianz offenbar mit dem Skalarprodukt identisch.

Das System  $G = (G_1, G_2, \dots, G_n, \dots)$  kann als Verallgemeinerung der Basis im  $R^n$  aufgefaßt werden. Daher interessieren die Voraussetzungen, unter denen sich eine Koordinate  $X_i \in L^2(\Omega, B, P)$  des Zufallsvektors  $\vec{X}$ , allgemein in der Form

$$X_i = \lim_{\nu \rightarrow \infty} X_{i\nu} \quad (3.9)$$

mit

$$X_{i\nu} = \sum_{\mu=1}^{m_\nu} a_{i\nu}^{(\mu)} G_{\nu\mu} \quad (3.10)$$

bezüglich  $G$  entwickeln läßt. Notwendig und hinreichend dafür ist die *Vollständigkeit* und damit auch die *Abgeschlossenheit* von  $G$ . In jedem separablen HILBERTraum gibt es stets vollständige orthogonale Systeme. Wie ein solches System in  $L^2(\Omega, A, P)$  konkret konstruiert werden kann, soll nun beschrieben werden. Es sei  $\{\xi_i\}_{i=1}^\infty$  die Menge aller orthonormierten GAUSSschen Zufallsgrößen. Als *Polynomiales Chaos*  $\Gamma_p$  der Ordnung  $p$  bezeichnet man alle orthogonalen Polynome der Ordnung  $p$ , die sich aus den  $\xi_i$  bilden lassen. Da Zufallsgrößen Funktionen sind, stellen diese Polynome als Funktionen von Funktionen streng genommen Funktionale dar. Sie werden als *orthogonale Zufallspolynome* bezeichnet. Die Menge aller Polynomiale Chaos ist ein dichter Unterraum von  $L^2(\Omega, A, P)$ . Das bedeutet: Jedes  $X \in L^2$  läßt sich gemäß

$$X = \alpha_0 G_0 + \sum_{i_1=1}^{\infty} \alpha_{i_1} G_1(\xi_{i_1}) + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} \alpha_{i_1 i_2} G_2(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}) + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} \sum_{i_3=1}^{i_2} \alpha_{i_1 i_2 i_3} G_3(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \xi_{i_3}) + \dots$$

$$(3.11)$$

beliebig genau durch orthogonale Zufallspolynome unterschiedlicher Ordnung, d.h. durch GAUSSsche Zufallsgrößen, approximieren. In (3.11) sind die  $G_N$  HERMITESCHE Polynome. Derartige *Chaos-Entwicklungen* sind für das hier besprochene Verfahren von zentraler Bedeutung. Allerdings ist das skizzierte Vorgehen in dieser Allgemeinheit nicht praktikabel. Immerhin sind ja die Zufallspolynome Elemente eines unendlichdimensionalen Raumes. Für den Übergang zu handhabbaren Größen ist eine weitere Eigenschaft von  $L^2$  nützlich, die sich ebenfalls aus seinem Charakter als HILBERTraum ergibt. In jedem beliebigen HILBERTraum  $H$  läßt sich nämlich einem  $h \in H$  eindeutig seine Projektion  $h_0$  auf den Teilraum  $H_0$  von  $H$  zuordnen. Demnach ist auch in  $L^2$  der Übergang zu endlichdimensionalen Zufallspolynomen grundsätzlich möglich. Sie werden jeweils nur mit endlich vielen Zufallsgrößen  $\xi_i$  gebildet, wobei die Dimension die Zahl der jeweils benutzten Zufallsgrößen bedeutet. Bei den Polynomen

$$\begin{aligned} G_0 &= 1 & G_1 &= \gamma, \\ G_2 &= \gamma^2 - 1, & G_3 &= \gamma^3 - 3\gamma, \dots \end{aligned} \quad (3.12)$$

mit  $\gamma \in N(0,1)$  handelt es sich beispielsweise um eindimensionale Zufallspolynome der Ordnungen 0, 1, 2 und 3.

#### 4. Die Anwendung auf die Elastizitätsgleichung der Deformationsmethode

Um dieses Resultat der Stochastik mit der Mechanik zu verbinden, wird als Bindeglied die Elastizitätsgleichung (2.1) als zentrales Bestandteil der Deformationsmethode benutzt. Sie verknüpft den  $n$ -dimensionalen Vektor  $V$  der Weggrößen mit dem Vektor  $P$  der Kraftgrößen über die *Gesamt-Steifigkeitsmatrix*  $K$  vom Typ  $(n,n)$ . Unsichere Eingangsgrößen wirken sich sowohl auf  $P$  als auch  $K$  aus. Die zufälligen Störungen können beispielsweise bei  $K$  von den Elastizitätsmoduln der Stäbe ausgehen. Werden diese Zufallsgrößen in (2.1) gedanklich berücksichtigt, so nimmt die durch (2.1) vermittelte Abbildung den Charakter eines stochastischen Operators an. Nachdem in [1.7] ausführlich dargestellt worden ist, wie die besondere Struktur von (2.1) genutzt werden kann, um Mechanik und Stochastik zu verbinden, sollen hier nur die Grundgedanken skizziert und um einige theoretische Aspekte ergänzt werden.

Zuerst werden die Zufallseinflüsse auf die Matrix  $K$  behandelt. Wenn sie, wie nachfolgend angenommen wird, von den  $E$ -Moduln ausgehen, stellen die Elastizitätsmoduln  $E_l$ ,  $l = 1, 2, \dots, s$  der Stäbe

Basisgrößen dar. Es ist sachgerecht, diese als Überlagerung

$$E_l = E_{0l}(1 + v_{el}\varepsilon_l) \quad (4.1)$$

des Nominalwertes  $E_{0l}$  mit einer Zufallsstörung  $E_{0l}v_{el}\varepsilon_l$  aufzufassen, die den Variationskoeffizienten  $v_{el}$  besitzt. Über die  $\varepsilon_l$  wird angenommen, daß es sich um standard-normalverteilte Zufallsgrößen mit dem Erwartungswert  $E\varepsilon_l = 0$  und der Streuung  $D^2\varepsilon_l = 1$  ( $\varepsilon_l \in N(0;1)$ ) handelt. Die  $\varepsilon$ -Größen sollen außerdem gemäß  $\text{cov}(\varepsilon_i\varepsilon_k) = \delta_{ik}$  unkorreliert, d.h. unabhängig sein. Die nach Gl. (4.1) daraus hervorgehenden  $E_l$  sind dann ebenfalls normalverteilt mit dem Erwartungswert  $E E_l = E_{0l}$ , der Streuung  $D^2 E_l = E_{0l}^2 v_{el}^2$  und der Kovarianz  $\text{cov}(E_i E_k) = E_{0i} E_{0k} v_i v_k \delta_{ik}$ .

Die üblichen Formeln zur Berechnung der Elemente der Steifigkeitsmatrix  $K$  legen gewöhnlich nicht den  $E$ -Modul als absolute Größe, sondern seinen auf den Nominalwert  $E_0$  bezogenen relativen Wert zugrunde. In diesem Fall gilt

$$B_l = \frac{E_l}{E_{0l}} = 1 + v_{el}\varepsilon_l \quad (4.2)$$

Von dieser Darstellung wird im weiteren Gebrauch gemacht.

Insgesamt handelt es sich bei (4.2) um eine Entwicklung von  $E_l$  in Polynome GAUSSScher Zufallsgrößen, die nach dem linearen Glied abbricht. Analog wird auch für die Belastungsvariable

$$P_k = q_{0k} + q_{1k} [a_{1k}\gamma_k + a_{2k}(\gamma_k^2 - 1) + a_{3k}(\gamma_k^3 - 3\gamma_k)] \quad (4.3)$$

eine Darstellung in Polynomen der Zufallsgrößen  $\gamma_k \in N(0;1)$  vorgesehen, die allerdings bis zur dritten Ordnung geführt wird [1.7]. Wegen  $E Q_k = q_{0k}$  stellt auch (4.3) eine Zerlegung der Belastungsgröße in den Erwartungswert  $q_{0k}$  und eine überlagerte Schwankungsgröße dar, die durch  $q_{1k}$  quantifiziert wird. Die Koeffizienten  $a_{1k}$ ,  $a_{2k}$ ,  $a_{3k}$  müssen so bestimmt werden, daß  $Q_k$  einer vorgegebenen Verteilung genügt. In diesem Beitrag wird eine PEARSON-Verteilung verwendet. Es können aber auch andere Verteilungsfunktionen benutzt werden. Gegebenenfalls müssen dann in der Entwicklung Polynome höherer Ordnung berücksichtigt werden.

Werden die Gleichungen (4.2) und (4.3) in die Gesamt-Steifigkeitsbeziehung (2.1) eingetragen, so entsteht ein Gleichungssystem, bei dem sowohl die Elemente der Koeffizientenmatrix als auch die

rechten Seiten zufällig sind. Diese Unbestimmtheit überträgt sich auf die Lösung  $V$ . Auch sie wird zur Zufallsgröße. Weil für den Zufallscharakter von  $V$  ebenfalls die Basisvariablen verantwortlich sind, liegt es nahe,  $V$  als Entwicklung nach orthogonalen Polynomen in den  $\varepsilon_l$ ,  $\gamma_k$  anzusetzen. Erfahrungsgemäß reicht es aus, bei den  $\varepsilon$ -Größen bis zu Gliedern zweiter Ordnung zu gehen. So entsteht der Ansatz

$$V = V^{(0)} + \sum_{i=1}^s V_i^{(1)} \varepsilon_i + \sum_{i=1}^s V_i^{(2)} (\varepsilon_i^2 - 1) + \sum_{j=1}^p V_{qj}^{(1)} \gamma_j + \sum_{j=1}^p V_{qj}^{(2)} (\gamma_j^2 - 1) + \sum_{j=1}^p V_{qj}^{(3)} (\gamma_j^3 - 3\gamma_j) \quad (4.4)$$

[1.7]. Die nichtzufälligen Matrizen  $V^{(0)}$ ,  $V_k^{(1)}$ ,  $V_k^{(2)}$  usw. sind vom Typ  $(n_d, 1)$  und erfassen die durch die Zufallsgrößen  $\varepsilon_l$ ,  $\gamma_k$  verkörperten Störungen. Sie sind unbekannt und müssen bestimmt werden. Da alle Polynome in  $\varepsilon_l$ ,  $\gamma_k$  den Erwartungswert 0 besitzen, stellt  $V^{(0)}$  wegen  $E V = V^{(0)}$  die Lösung der Elastizitätsgleichungen für ein statisches System ohne Zufallseinflüsse dar.

Wird schließlich noch (4.4) in (2.1) eingetragen, entsteht eine neue Darstellung der zufälligen Gesamt-Steifigkeitsbeziehung, die sich von der ursprünglichen Form (2.1) dadurch unterscheidet, daß nun die im System wirkenden Zufallsgrößen durch GAUSSSche Zufallsgrößen ausgedrückt sind und so für die weitere Rechnung faßbar werden. Die Gleichung, die wegen ihres Umfangs hier nicht angegeben werden soll, enthält

$$n_M = 1 + 2s + 3p \quad (4.5a)$$

unbekannte Spaltenmatrizen vom Typ  $(n_d, 1)$ . Insgesamt sind also in der Rechnung

$$n_S = n_d \cdot n_M \quad (4.5b)$$

skalare Unbekannte enthalten. Die erforderlichen Bestimmungs-Gleichungen entstehen, indem man die Elastizitätsgleichungen in der jetzt vorliegenden Gestalt sukzessive mit den Polynomen 1,  $\varepsilon_i$ ,  $\varepsilon_i^2 - 1$ ,  $i=1, \dots, s$  bzw.  $\gamma_j$ ,  $\gamma_j^2 - 1$ ,  $\gamma_j^3 - 3\gamma_j$ ,  $j=1, \dots, p$  multipliziert und den Erwartungswert bildet.

Da Erwartungswerte deterministische Größen sind, führt dieses Vorgehen zum unten angegebenen Gleichungssystem, das keine Zufallseinflüsse mehr enthält. Deshalb wird dieses System als *deterministisches Ersatzsystem* bezeichnet. Da es weder auf

der rechten Seite noch in der Koeffizientenmatrix allgemeine Zahlen enthält, kann es in der herkömmlichen Weise gelöst werden. Die Lösung liefert die Koeffizienten der Entwicklung (4.4). Daraus ergibt sich eine Näherungslösung des zufälligen Systems (2.8). Mit dieser Lösung kann die

$$\begin{aligned}
 K^{(0)}V^{(0)} + v \sum_{k=1}^s W_k V_k^{(1)} &= \sum_{l=1}^p S_k q_{0k} \\
 vW_l V_l^{(0)} + K^{(0)}V_l^{(1)} + 2vW_l V_l^{(2)} &= 0 \\
 2vW_l V_l^{(1)} + K^{(0)}V_l^{(2)} &= 0 \\
 &= q_{1m} a_{1m} S_m \\
 &= q_{1m} a_{2m} S_m \\
 &= q_{1m} a_{3m} S_m
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

$$K^{(0)}V_{qm}^{(1)} \quad K^{(0)}V_{qm}^{(2)} \quad K^{(0)}V_{qm}^{(3)}$$

$$l = 1, \dots, s, \quad m = 1, \dots, q$$

Dabei ist  $K^{(0)}$  die Gesamtsteifigkeitsmatrix der klassischen Deformationsmethode und die  $W_k$  sind Teilmatrizen, die in der Summe  $K^{(0)}$  ergeben. Sie werden ebenso wie die Spaltenmatrizen  $S_m$  nach Gl. (2.7) mit der Deformationsmethode ermittelt. Das System (4.6) ist ein zentraler Bestandteil des vorgestellten Verfahrens. Es enthält keinerlei Zufallsgrößen mehr. Seine Koeffizientenmatrix  $V_{de}$  ist schwach besetzt und symmetrisch. Die Struktur von  $V_{de}$  als Hypermatrix wird vor allem vom jeweils benutzten Ansatz für  $V$  (z.B. (4.4)) geprägt. Von ihrem Typ abgesehen, der auch von  $n_d$  abhängt, spiegelt  $V_{de}$  die statische Struktur des Tragwerks nicht wider. Damit ist für das vorgeschlagene Verfahren kennzeichnend: a) Die Bestandteile ( $K^{(0)}$ ,  $S_m$  usw.) des deterministischen Ersatzsystems werden nach der klassischen Deformationsmethode ermittelt. b) Die Struktur der Koeffizientenmatrix hängt im wesentlichen vom Ansatz (4.4) ab. Daher kann das deterministische Ersatzsystem auch formal, d.h. ohne Hilfsmittel der Stochastik, angegeben werden, wenn bei *allen* Tragwerken an *einem* erprobten Ansatz festgehalten wird. c) Das System enthält keine allgemeinen Zahlen und kann in der üblichen Weise gelöst werden. Insgesamt schließt das Verfahren unmittelbar an den Grundalgorithmus der Deformationsmethode an und kann als deren probabilistische Erweiterung angesprochen werden.

## 5. Zum Einfluss von Konstruktionsparametern auf die Versagenswahrscheinlichkeit eines Tragwerks

Bekanntlich reagiert die Versagenswahrscheinlichkeit  $P_f$  sehr empfindlich auf Veränderungen von Querschnittswerten und anderen Bemessungsparametern [1.4], [1.7]. Die im Entwurfsprozeß beim

Grenzzustandsbedingung als Funktion der im statischen System wirkenden Zufallsgrößen angegeben werden. Daraus läßt sich die Versagenswahrscheinlichkeit ermitteln. Das Ersatzsystem besitzt die Darstellung

Streben nach bestmöglicher Anpassung an den Verwendungszweck in Erwägung gezogenen Varianten ein und derselben Konstruktion können sich daher, selbst bei geringfügigen Abwandlungen, die nicht das statische System selbst, sondern nur gewisse geometrische Kennwerte betreffen, hinsichtlich  $P_f$  um Größenordnungen unterscheiden. Werden derartige Varianten also vom Standpunkt der Tragwerkssicherheit beurteilt, so handelt es sich praktisch um neue Tragwerke, die sich nur noch äußerlich ähneln. Angesichts dieses Umstandes interessieren Aussagen darüber, wie sich Veränderungen der Bemessungsgrößen auf  $P_f$  auswirken. Dieser Frage wird im Folgenden nachgegangen.

Am Beispiel des stählernen Stockwerksrahmens nach Bild 1 wird insbesondere untersucht, auf welche Weise Veränderungen vorgenommen werden müssen, damit die auseinander hervorgehenden Varianten einer Konstruktion möglichst den gleichen  $P_f$ -Wert besitzen.

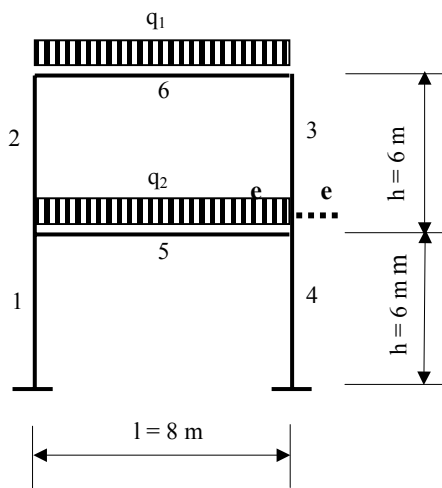
Die Versagenswahrscheinlichkeit im Schnitt *e-e* des Rahmenstiels wird unter der Annahme ermittelt, daß die zufälligen Streckenlasten  $P_1, P_2$  auf den Riegeln stochastisch unabhängig sind und jeweils einer PEARSON-Verteilung mit dem Variationskoeffizienten  $v_q = 0.24$  genügen.

Dabei erhalten der Erwartungswert  $q_0$  und die Parameter  $a_1, a_2, a_3$  der Gl. (4.3) solche Werte, daß das 98-Prozent-Quantil  $q_{0,98}$  der Belastung mit dem charakteristischen Wert  $q_k = q_d / \gamma$  übereinstimmt. Nach DIN 18800 wird  $\gamma = 1,5$  gesetzt [1.6]. Die *E*-Moduln der Stäbe werden als unabhängige normalverteilte Zufallsgrößen angesetzt (Erwartungswert  $E_0 = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$ , Variati-

onskoeffizient  $\nu_e = 0.05$ ). Die Stabquerschnitte werden so dimensioniert, daß für den Bemessungswert  $q_d$  und  $E = E_0$  die Spannung an den höchst ausgelasteten Querschnitten  $e-e$  oberhalb der Mittelknoten den Bemessungswert  $\sigma_{R,d} = 218.2 \text{ N/mm}^2$  der Grenznormalspannung gerade erreicht. Als Grenzzustandsgleichung wird die Beziehung

$$g = \sigma_S - \sigma_e \quad (5.1)$$

benutzt, in der  $\sigma_S$  die ebenfalls als Basisgröße aufgefaßte Streckgrenze und  $\sigma_e$  die Spannung im Schnitt  $e-e$  bedeuten. Untersucht wurde, wie sich die Veränderungen der Riegelänge und der Stielhöhe auswirken.



**Bild 1:** Rahmen-Grundvariante

Für die Grundvariante des Rahmens ergibt sich unter den Voraussetzungen über die Belastung der Wert  $P_f = 0.97 \cdot 10^{-7}$ , wenn die  $E$ -Moduln als deterministische Größen aufgefasst werden (Variationskoeffizient  $\nu_e = 0$ ). Für  $\nu_e = 0.05$  folgt dagegen  $P_f = 1.37 \cdot 10^{-7}$ . Werden nun die Abmessungen und Querschnittswerte der Stäbe willkürlich verändert, resultiert, vom Sicherheits-Standpunkt aus gesehen, faktisch ein neuer Rahmen. Soll dessen Versagenswahrscheinlichkeit jedoch mit der der Ausgangsvariante übereinstimmen, müssen bei den hier interessierenden Veränderung der Stiel- bzw. Riegelängen gleichzeitig die Querschnittswerte in einer ganz bestimmten Weise angepasst werden. Ist Ähnlichkeit hergestellt, müssen die Streckenlasten so lange verändert werden, bis sich am betrachteten Schnitt genau die Bemessungsspannung  $\sigma_{Rd}$  einstellt.

Bei den Rahmen mit veränderlichen Breiten zeigen sich in allen untersuchten Varianten leicht mit der

Riegelänge anwachsende  $P_f$ -Werte (Tab. 1). Wird jedoch die Stiellänge bei gleichzeitiger Anpassung der Querschnittswerte geändert, ergeben sich für die Varianten praktisch gleiche  $P_f$ -Werte (Tab. 2).

Werden die für  $\nu_e = 0$  gemessenen Werte mit denen verglichen, die sich auf  $\nu_e = 0.05$  beziehen, zeigt sich der Einfluss von Unschärfen der  $E$ -Moduln. Er ist nicht zu vernachlässigen und besitzt bei allen Rahmenvarianten etwa die gleiche Größe. Einige Gesichtspunkte, die zur Deutung der Ergebnisse beitragen können, sind die folgenden:

Die Veränderungen der Stützenhöhen bleiben ohne Einfluss, da bei *ähnlichen* Rahmen und der angenommenen Art der Belastungen die Spannungen nur noch von der Größe der Streckenlasten und den Riegelängen beeinflusst werden. Die leicht anwachsenden Werte von  $P_f$  mit steigender Rahmenbreite können mit dem Umstand erklärt werden, daß die Größe der Rieglmomente sich in einer quadratischen Abhängigkeit von der Riegelänge verändert. Dem wurde beim Anpassen der Querschnittswerte noch nicht Rechnung getragen. Der große Einfluss der  $E$ -Modul-Unsicherheiten im Schnitt  $e-e$  ist auf ihr relatives Verhältnis zur Größe der Versagenswahrscheinlichkeit zurückzuführen. Für die Ausgangsvariante des Tragwerks ergibt sich beispielsweise als Spannung im Schnitt  $e-e$  die (etwas vereinfachte) Gleichung

$$\begin{aligned} \sigma_e = & 88,53 + 6,41\gamma_1 + 13,76\gamma_1^2 + \\ & + 1,1\gamma_1^3 + 2,36\gamma_2^2 + 0,04\gamma_1^3 + 0,09\gamma_2^3 \\ & - 0,21\varepsilon_1 + 1,03\varepsilon_2 - 0,23\varepsilon_3 + 0,94\varepsilon_4 \\ & - 1,2\varepsilon_5 - 0,51\varepsilon_6 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Die Größe der Koeffizienten veranschaulicht die Anteile der Zufallsgrößen. Die für die Unbestimmtheit von  $E$  maßgebenden Zufallsgrößen  $\varepsilon_i$  treten hier mit relativ großen Koeffizienten auf.

Für den untersuchten Rahmen mit der gewählten Belastung liefern die Biegebeanspruchungen gegenüber den Längskraftbeanspruchungen die überwiegenden Anteile an den Gesamtspannungen. Betrachtet man die Gleichung für das Bemessungsmoment am Schnitt  $e-e$ ,

$$M_{ed} = \frac{2}{l_4} \Phi_d + \frac{4}{l_4} \Phi_e - \frac{6}{l_4} \Psi_2, \quad (5.3)$$

so ist zu erkennen, daß die zufälligen Streckenlasten  $P_1$  und  $P_2$  nicht direkt auf das Moment  $M_{ed}$

einwirken, sondern nur indirekt über die Deformationsgrößen  $\Phi_d$ ,  $\Phi_e$  und  $\Psi_2$ .

Aus dieser Tatsache kann man schlußfolgern, daß die Zufallsgrößen Streckenlast das Bemessungsmoment nicht dominant bestimmen, sondern die weiteren Zufallsgrößen (Schwankungen der  $E$ -Moduln) Beiträge in etwa gleicher Größenordnung liefern. Diese Relationen kommen dann letztendlich im

Einfluß der  $E$ -Modul-Abweichungen auf  $P_f$  zum Ausdruck.

Weitere Untersuchungen an einer anderen Schnittstelle im Rahmen führten zu einer um Größenordnungen geänderten Versagenswahrscheinlichkeit und einem wesentlich geringeren Einfluss der  $E$ -Modul-Schwankungen.

**Tab. 1:** Veränderungen der Rahmenbreiten

	l = 7,0 m		l = 7,5 m		l = 8,0 m Ausgangsvariante		l = 8,5 m		l = 9,0 m	
	q = 31,3 kN/m		q = 27,55 kN/m		q = 24,4 kN/m		q = 21,8 kN/m		q = 19,5 kN/m	
	d	$P_f \cdot 10^7$	d	$P_f \cdot 10^7$	d	$P_f \cdot 10^7$	d	$P_f \cdot 10^7$	d	$P_f \cdot 10^7$
$v_e = 0$	5,2418	<b>0,80</b>	5,2212	<b>0,89</b>	5,1983	<b>1,01</b>	5,1827	<b>1,09</b>	5,1637	<b>1,21</b>
$v_e = 0,05$	5,1767	<b>1,13</b>	5,1563	<b>1,26</b>	5,1338	<b>1,42</b>	5,1184	<b>1,54</b>	5,0997	<b>1,70</b>

d...Sicherheitsindex

**Tab. 2:** Veränderungen der Stielhöhen

			h = 6,0 m Ausgangsvariante		h = 6,25 m		h = 6,5 m	
			q = 24,37 kN/m		q = 25,36 kN/m		q = 26,36 kN/m	
	d	$P_f \cdot 10^7$	d	$P_f \cdot 10^7$	d	$P_f \cdot 10^7$	d	$P_f \cdot 10^7$
$v_e = 0$			5,1990	<b>0,97</b>	5,1515	<b>0,95</b>	5,1800	<b>0,97</b>
$v_e = 0,05$			5,1346	<b>1,37</b>	5,0876	<b>1,34</b>	5,1159	<b>1,37</b>

## Literatur

- [1.1] *Michel, H.*: Maß- und Integrationstheorie  
Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1978
- [1.2] *Mayer, M.*: Die Sicherheit der Bauwerke und ihre Berechnung nach Grenzkraften,  
Springer-Verlag, Berlin 1926
- [1.3] *Freudental, A.M.*: The Safety of Structures; Transactions of the ASCE, Vol 112, 1947
- [1.4] *Spaethe, G.*: Die Sicherheit tragender Baukonstruktionen Springer-Verlag Wien New York 1992
- [1.5] *Schneider, J.*: Sicherheit und Zuverlässigkeit im Bauwesen  
Hochschulverlag Zürich, Teubner Stuttgart 1995
- [1.6] *Biehounek, J, Grolik, H.*: Zur Anwendung des Kraftgrößenverfahrens in der probabilistischen  
Sicherheitstheorie statischer Systeme. Technische Mechanik, Band 21, 3(2001), 179-190
- [1.7] *Biehounek, J., Grolik, H, S.Herz*: Zur voll-probabilistischen Verallgemeinerung der  
Deformationsmethode  
Hochschule Anhalt, Beiträge zur Wissenschaft, Technologie und Gestaltung, 58/2002 bzw.  
Stahlbau (im Druck)
- [3.1] *Wiener, N.*: The homogeneous chaos  
Amer. J. Math 60 (1938), 897 -936
- [3.2] *Ghanem, R. G., Spanos, P. D.*: Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach  
Springer-Verlag 1991
- [3.3] *Kakutani, S.*: Spectral Analysis of Stationary Gaussian Processes,  
Proceedings auf the Fourt Berkeley Symposion on Mathematical Statistics and Probability,  
Vol. II, 239-246 University of California, 1961