

ZUR  
ZUVERLÄSSIGKEITSBEURTEILUNG  
VON BAUKONSTRUKTIONEN UNTER  
DYNAMISCHEN EINWIRKUNGEN

Dissertation  
zur Erlangung des akademischen Grades  
Doktor – Ingenieur

an der Fakultät Bauingenieurwesen  
der Bauhaus – Universität Weimar

vorgelegt von

Veit Bayer

geboren am 10. November 1965  
in Braunschweig

Weimar, März 1999

Gutachter: 1. Prof. Dr. tech. habil. Christian Bucher  
2. Prof. Dr.-Ing. habil. Gerhard Burkhardt  
3. Prof. Dr. Uwe E. Dorka

Tag der Disputation: 19. Juli 1999

„Wenn man das richtig überlegt . . . “ , sagt neben mir einer. Der Mann hat Recht. Man soll sich eben alles erst einmal richtig überlegen. Denn wer richtig überlegt, der kann unter Umständen auch zu richtigen Schlüssen kommen. Er kann, er muß nicht etwa. Allerdings, wenn da mancher manchmal vorbeidenkt, das kommt meist nur davon, daß er es sich nicht richtig überlegt hatte. Und zwar vorher. Denn man muß immer vorher richtig überlegen, nicht nachher. Denn nachher weiß man oft auch ohne richtige Überlegung, was man vorher falsch überlegt hatte. Das heißt, wem es früh genug ist, nachher zu wissen, was er vorher nicht richtig überlegt hatte, der kann sich die Mühe sparen zu überlegen. Und wenn man es richtig überlegt, dann ist es auch wirklich überflüssig, vorher richtig zu überlegen, denn man kann ja abwarten, was kommt, und das ist bedeutend bequemer, als erst groß zu überlegen.

*Kurt Schwitters*

Meinen Eltern gewidmet, die mich auf meinem Weg stets unterstützt haben.

---

# Inhalt

<b>Kurzfassung</b>	<b>iii</b>
<b>Abstract</b>	<b>iv</b>
<b>1 Einführung</b>	<b>1</b>
1.1 Ziel und Inhalt der Arbeit . . . . .	1
1.2 Formulierung der Versagenswahrscheinlichkeit . . . . .	2
1.3 Zur Berechnung der Erstüberschreitenswahrscheinlichkeit . . . . .	5
<b>2 Monte Carlo Methoden</b>	<b>9</b>
2.1 „Einfache“ Monte Carlo Simulation . . . . .	9
2.2 Importance Sampling . . . . .	12
2.3 Simulation mit Klassenunterteilung . . . . .	16
2.4 Latin Hypercube Sampling . . . . .	18
2.5 Kontrollvariable . . . . .	20
2.6 Antithetische Variable . . . . .	22
2.7 Aufteilung des Integrationsbereichs . . . . .	23
2.8 Reduzierung der Dimension . . . . .	25
2.9 Directional Sampling . . . . .	28
2.10 Bedingte Wahrscheinlichkeiten . . . . .	32
2.11 Verwendung orthonormaler Funktionen . . . . .	34
<b>3 Simulation stochastischer Prozesse</b>	<b>37</b>
3.1 Grundlagen . . . . .	37
3.2 Darstellung im Zeitbereich . . . . .	40
3.3 Darstellung im Frequenzbereich . . . . .	44
3.3.1 Herleitung der spektralen Repräsentation . . . . .	44
3.3.2 Simulation im Frequenzbereich . . . . .	54
3.4 Auswertung der Strukturantwort . . . . .	61
3.5 Testbeispiele . . . . .	63
3.6 Varianzmindernde Simulationsverfahren . . . . .	76

---

<b>4</b>	<b>Ein Importance Sampling – Verfahren für die Simulation von Zufallsprozessen</b>	<b>83</b>
4.1	Konzeption . . . . .	83
4.2	Auswahl der Variablen . . . . .	85
4.3	Adaption der Simulationsdichte . . . . .	88
4.4	Testbeispiele zu den Abschnitten 4.2 und 4.3 . . . . .	90
4.5	Zusammenfassende Beschreibung der Vorgehensweise . . . . .	102
4.6	Directional Sampling . . . . .	104
4.7	Testbeispiele zum Directional Sampling . . . . .	106
<b>5</b>	<b>Anwendungsbeispiel</b>	<b>115</b>
5.1	Problemstellung . . . . .	115
5.2	Hysteretic Devices . . . . .	117
5.3	Modellbildung und Berechnung . . . . .	118
5.4	Diskussion der Ergebnisse . . . . .	121
<b>6</b>	<b>Schlußbemerkungen</b>	<b>133</b>
	<b>Liste der Formelzeichen</b>	<b>137</b>
	<b>Literatur</b>	<b>139</b>
<b>A</b>	<b>Dokumentation der Simulation nach Abschnitt 4.2, 4.3</b>	<b>A.1</b>
A.1	Hauptroutine . . . . .	A.1
A.2	Generierung der Zeitreihen . . . . .	A.6
A.3	Auswertung der Strukturantwort . . . . .	A.7
A.4	Auswahl und Adaption der Variablen . . . . .	A.9
<b>B</b>	<b>Dokumentation des Directional Sampling nach Abschnitt 4.6</b>	<b>B.1</b>
B.1	Hauptroutine . . . . .	B.1
B.2	Generierung der Zeitreihen . . . . .	B.4
B.3	Auswertung der Strukturantwort . . . . .	B.4
B.4	Adaption der Variablen . . . . .	B.7
<b>C</b>	<b>Das Element UHYDE2</b>	<b>C.1</b>

---

## Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit varianzmindernden Verfahren zur Monte Carlo Simulation von stochastischen Prozessen, zum Zweck der Zuverlässigkeitsbeurteilung von Baukonstruktionen mit nichtlinearem Systemverhalten. Als Maß der Zuverlässigkeit wird hier die Erstüberschreitenswahrscheinlichkeit über ein vorgegebenes Niveau innerhalb eines Beobachtungszeitraums angenommen.

In Kapitel 2 wird ein Überblick über die aktuelle Literatur zu varianzmindernden Monte Carlo Methoden und ihrer Anwendung in der Zuverlässigkeitsanalyse (für zeitunabhängige Probleme) gegeben.

In Kapitel 3 wird nach einer kurzen Darstellung der Grundlagen der Zufallsprozesse und von Simulationsmodellen im Zeitbereich die Spektrale Darstellung eines Zufallsprozesses hergeleitet. Die Betrachtungen richten sich auf stationäre, skalare Gauß – Prozesse. Auf der Grundlage der Spektralen Darstellung werden die zwei in der Literatur am weitesten verbreiteten Simulationsmodelle beschrieben: das Modell der zufälligen Amplituden und das Modell der zufälligen Phasenwinkel. Ihre Eigenschaften werden anhand von Simulationen von nichtlinearen Einmassenschwingern getestet. Es folgt eine kurze Literaturstudie zu varianzmindernden Simulationsverfahren für stochastische Prozesse.

Mit Hilfe varianzmindernder Simulationsverfahren kann der Rechenzeitbedarf gegenüber der „einfachen“ Monte Carlo Simulation reduziert und damit die Untersuchung großer Strukturen ermöglicht werden. Hier wird das Konzept des *Importance Sampling* verwendet. Die Anpassung der Simulationsparameter ist stark an der Strukturantwort angelehnt. In einem ersten Simulationslauf, mit dem Modell der zufälligen Phasenwinkel und ohne Varianzminderung, wird das Leistungsspektrum der Strukturantwort geschätzt. Es zeigt diejenigen Frequenzbereiche an, die am meisten zur Varianz des Prozesses der Strukturantwort beitragen, bzw. für welche die Anregung am wenigsten gedämpft wird. Deshalb werden im zweiten Simulationslauf nur für diese Frequenzen zufällige Amplituden als zusätzliche Variablen eingeführt. Deren statistische Parameter werden im Rahmen des *Importance Sampling* - Konzepts mit Werten, die proportional dem Spektrum sind, beaufschlagt. So wird die Wahrscheinlichkeit der Niveauüberschreitung erhöht und die Effizienz des Verfahrens gegenüber der einfachen Monte Carlo Simulation signifikant gesteigert. In einer Variante der Entwicklung wird das Konzept mit *Directional Sampling* kombiniert.

Das Verfahren wird für die Zuverlässigkeitsanalyse einer Eisenbahnbrücke unter Erdbebenbelastung eingesetzt. Die Brücke ist mit hysteretischen Dämpfungselementen ausgestattet, die zwischen den Stützenköpfen und Brückenüberbau angeordnet sind. Durch trockene Reibung wird Energie dissipiert. Dadurch können sowohl die Belastungen der Stützen als auch die Relativverschiebungen zwischen Stützen und Überbau stark reduziert werden, im Vergleich zu einer herkömmlichen Konstruktion mit Elastomerlagern. Es wird gezeigt, daß Gebrauchsfähigkeitskriterien mit einer vorgegebenen Zielversagenswahrscheinlichkeit eingehalten werden.

---

## Abstract

The major topic of the present thesis is the development of variance-reducing Monte Carlo methods, for the purpose of reliability analyses of engineering structures with nonlinear system behaviour. The measure of reliability assumed here is the probability of first threshold exceedance within a certain observation period.

Chapter 2 provides a literature review on variance – reducing Monte Carlo methods and their application to reliability analysis, yet for time-independent problems.

Basics of stochastic processes are explained briefly in chapter 3. Besides a short description of simulation in the time domain, there is a detailed derivation of the spectral representation of stochastic processes. The discussion concentrates on stationary scalar Gaussian processes. Based on the spectral representation, the most well-known simulation models are discussed: The so-called random amplitudes – model and the random phases model. The properties of these two models are assessed by simulations of two nonlinear single-degree-of-freedom oscillators. The chapter closes with a survey on recent literature about variance-reducing concepts for stochastic processes.

The purpose of variance-reducing Monte Carlo methods is to reduce the computational efforts compared to plain Monte Carlo and therefore to make the analysis of large structures feasible. The present work utilizes the Importance Sampling concept. The adaptation of simulation parameters is based on the structural response. By a first pilot simulation, the power spectral density of the structural response is estimated. It indicates those frequencies, which contribute the largest part to the total variance of the response process, or in other words, which undergo the lowest amount of damping. Only for those frequencies the random amplitudes – model is adopted in the second simulation, the actual Importance Sampling run. The simulation densities of the amplitudes are adapted such that statistical parameters are augmented by values proportional to the spectrum of the response. Thus a higher probability of threshold exceedance is obtained and efficiency of the simulation is increased significantly compared to plain Monte Carlo. In another variant of the development, this simulation concept has been combined with Directional Sampling.

The simulation procedure is applied to the reliability analysis of a railway bridge subjected to earthquake excitation. The bridge is equipped with Hysteretic Devices, which are mounted between the column heads and the superstructure of the bridge. Energy is dissipated due to the phenomenon of Coulomb friction. Thus it is possible to limit the sectional forces in the columns as well as relative displacements between superstructure and columns, unlike a conventional construction with elastomer bearings only. It is shown that some serviceability criteria are fulfilled with a given target value of the probability of failure.

# 1

## Einführung

### 1.1 Ziel und Inhalt der Arbeit

Ein Bauwerk ist äußeren Einwirkungen (Lastgrößen) ausgesetzt, die in der Bemessung den Widerstandsgrößen (Geometrie, Materialeigenschaften) gegenüberzustellen sind. Sowohl Einwirkungen als auch Widerstandsgrößen unterliegen Unsicherheiten, die mathematisch durch wahrscheinlichkeitstheoretische Modelle beschrieben werden können. Gegenwärtige Bauvorschriften wie der Eurocode 1 [24] und darauf basierende Fachnormen schreiben für die Bemessung einer Baukonstruktion charakteristische Werte der Einwirkungs- und Widerstandsgrößen sowie deren Beaufschlagung bzw. Abminderung mit Teilsicherheitsbeiwerten vor. Eine solche Bemessungsvorschrift wird auch als *Level I* – Verfahren bezeichnet (Eurocode 1, Anhang A). Die Bemessung selbst berücksichtigt keine weitere probabilistische Information. Die Sicherheitsbeiwerte müssen aber nicht nur aufgrund der Ingenieur Erfahrung, sondern auch mittels probabilistischer Verfahren (*Level II* bzw. *III*) kalibriert werden. Auch für Bauwerke, für die ein besonders hohes Sicherheitsniveau gefordert ist, und für solche, die durch die bestehenden Fachnormen nicht erfaßt werden, verlangt Eurocode 1 eine genauere Zuverlässigkeitsbeurteilung mit probabilistischen Methoden.

Soll die Sicherheit eines stark nichtlinearen Systems unter stochastischer dynamischer Belastung beurteilt werden, ist zum einen ein genaues numerisches Verfahren zur Strukturanalyse erforderlich. Dieses ist z.B. durch die Finite Elemente Methode mit entsprechenden Lösungsalgorithmen gegeben. Zum anderen soll eine entsprechend genaue probabilistische Modellierung Grundlage der Zuverlässigkeitsanalyse sein. Als genaues und flexibles Verfahren zur Berechnung der Strukturzuverlässigkeit wird die Monte Carlo Simulation gewählt. Andere Verfahren erscheinen in ihrer Anwendbarkeit als zu beschränkt oder zu ungenau. Die einfache Monte Carlo Simulation — in Verbindung mit einer realistischen mechanischen Modellierung — erfordert jedoch einen für reale Anwendungen nicht vertretbaren Rechenzeitbedarf, um Ereignisse mit kleinen Wahrscheinlichkeiten bei akzeptabler Konfidenz zu erfassen.

Ziel der Arbeit ist die Entwicklung eines effizienten Simulationsverfahrens für sto-



chastische Prozesse, welches speziell für die Berechnung von Erstüberschreitenswahrscheinlichkeiten nichtlinearer Systeme geeignet ist. Durch effektive Reduzierung der Varianz des Schätzers der Erstüberschreitenswahrscheinlichkeit soll der notwendige Rechenzeitbedarf gegenüber einfacher Monte Carlo Simulation signifikant verringert werden. Hierdurch kann die Genauigkeit der Monte Carlo Methode und ihre Flexibilität hinsichtlich nichtlinearen Strukturverhaltens ausgenutzt und mit vertretbarem Aufwand eine aussagekräftige Zuverlässigkeitsanalyse der Struktur durchgeführt werden.

Die folgenden Abschnitte dieses Kapitels dienen der weiteren Einführung in die Thematik. In Abschnitt 1.2 wird die Ingenieuraufgabe einer Zuverlässigkeitsanalyse beschrieben. Die Versagenswahrscheinlichkeit für zeitunabhängige Probleme und die sogenannte Erstüberschreitenswahrscheinlichkeit als Zuverlässigkeitsmaß für kurzzeitige dynamische Einwirkungen werden formuliert. Abschnitt 1.3 gibt einen kurzen Überblick über Verfahren zur Berechnung der Erstüberschreitenswahrscheinlichkeit.

Kapitel 2 beschäftigt sich mit der Monte Carlo Simulation im allgemeinen und speziell für die Anwendung auf zunächst zeitunabhängige Zuverlässigkeitsprobleme. Eine Literaturstudie gibt einen Überblick über die aktuellen varianzmindernden Simulationsverfahren und versucht eine kritische Beurteilung ihrer Anwendung in der Zuverlässigkeitsanalyse.

In Kapitel 3 werden verschiedene Varianten zur Monte Carlo Simulation von Zufallsprozessen vorgestellt. Nach einem kurzen Abschnitt zu den Grundlagen stochastischer Prozesse folgen die Simulation auf Basis einer Darstellung im Zeitbereich und, detaillierter, für die Darstellung im Frequenzbereich. Ein Überblick zu anderen varianzmindernden Simulationsverfahren für Prozesse aus der Literatur wird gegeben.

Das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Simulationsverfahren wird in Kapitel 4 vorgestellt. Die Konzeption des Verfahrens und die Simulationsprozedur selbst werden beschrieben. Die Testbeispiele in diesem Kapitel zeigen die Leistungsfähigkeit des Verfahrens und geben Anhaltspunkte für weitere Anwendungen.

Das Simulationsverfahren wird in Kapitel 5 auf die Sicherheitsbeurteilung einer Eisenbahnbrücke unter Erdbebenbelastung angewendet. In der Konstruktion wird ein neuartiger Reibungsdämpfer eingesetzt, der durch Energiedissipation die Belastungen des Tragwerks gegenüber herkömmlichen Konstruktionen reduzieren soll. Der Einfluß dieser Technologie auf die Sicherheit des Tragwerks wird untersucht.

Zusammenfassung und Ausblicke folgen in Kapitel 6.

## 1.2 Formulierung der Versagenswahrscheinlichkeit

In diesem Abschnitt wird die Problemstellung der probabilistischen Zuverlässigkeitsanalyse beschrieben. Die Betrachtung erfolgt zunächst für zeitunabhängige Probleme. Als Maß der Sicherheit wird üblicherweise ihr Komplement, die Versagenswahrscheinlichkeit, berechnet. Es folgen Ausführungen zu verschiedenen Arten zeitabhängiger Probleme und die Formulierung der Erstüberschreitenswahrscheinlichkeit. Bei all die-

sen Betrachtungen erfolgt gleichzeitig die thematische Abgrenzung der vorliegenden Arbeit.

Die Ingenieuraufgabe der Zuverlässigkeitsanalyse wird wie folgt charakterisiert. Zunächst ist zu entscheiden, welche für die Bemessung relevanten Größen als Zufallsvariablen in die Zuverlässigkeitsanalyse eingeführt werden. Das hängt von ihrer Streuung ebenso ab wie von der Sensitivität der untersuchten Struktur bezüglich der zufälligen Parameter.

Je nach Problemstellung kann es notwendig sein, eine räumliche Verteilung der Variablen (als Zufallsfeld) oder eine zeitliche Verteilung (stochastischer Prozeß) zu berücksichtigen. Zufallsfelder werden hier nicht betrachtet. In den Anwendungen der Kapitel 3 bis 5 sind die Belastungen als Zufallsprozesse modelliert. Die Eigenschaften der Struktur selbst werden als deterministisch angesehen.

In den folgenden Ausführungen werden die zufälligen Größen — auch Basisvariablen genannt — durch Großbuchstaben dargestellt. Eine Realisation einer Zufallsvariable ist durch einen Kleinbuchstaben gekennzeichnet. Die Dichtefunktion einer Zufallsvariablen  $X$  wird somit durch  $f_X(x)$  dargestellt. Die Zufallsvariablen sind durch den Verteilungstyp und die entsprechenden Verteilungsparameter festzulegen. Bei Betrachtung mehrerer Zufallsvariablen, zusammengefaßt als Zufallsvektor  $\mathbf{X}$ , ist ebenso deren Kovarianz- bzw. Korrelationsmatrix zu berücksichtigen. Dieser Schritt wird auch als stochastische Modellbildung bezeichnet.

Außerdem ist das zu betrachtende Versagenskriterium festzulegen. Versagen bedeutet in diesem Zusammenhang nicht notwendigerweise den totalen Kollaps der Struktur, beispielsweise können auch Kriterien der Gebrauchsfähigkeit zum Tragen kommen. Vereinfachend wird hier jeder unzulässige Zustand der Struktur als Versagen bezeichnet, die Versagenswahrscheinlichkeit ist somit die Eintretenswahrscheinlichkeit eines solchen Zustands. Selbstverständlich muß auch das verwendete mechanische Modell in der Lage sein, den Versagenszustand abzubilden. Dafür ist oft auch die Berücksichtigung geometrisch oder physikalisch nichtlinearer Effekte notwendig.

Das Versagenskriterium wird durch die Grenzzustandsfunktion modelliert (vgl. Spaethe [81]). Die Grenzzustandsfunktion  $g(\mathbf{x})$  ist die Antwort des betrachteten Systems zu einer Realisation der Basisvariablen, die so skaliert ist, daß

$$g(\mathbf{x}) = \begin{cases} \leq 0 & , \text{ bei Versagen} \\ > 0 & , \text{ bei Überleben} \end{cases} \quad (1.1)$$

Gl. (1.2) ist das einfachste Beispiel für eine Grenzzustandsfunktion:

$$g(r, s) = r - s \quad (1.2)$$

worin  $r$  der Widerstand (z.B. Fließspannung) ist und  $s$  die auftretende Spannung an einer betrachteten Stelle in der Struktur. Bei der praktischen Anwendung liegt die Grenzzustandsfunktion i.d.R. nicht in expliziter Formulierung vor, sondern ist Ergebnis einer Strukturanalyse. (Zum Beispiel ist nicht die vorhandene Spannung, sondern eine äußere

Lastgröße die Basisvariable.) Man spricht dann von einer impliziten Formulierung des Grenzzustands.

Aus Gl. (1.1) ist ersichtlich, daß die Grenze des Versagensbereichs, also der Übergang der Struktur vom sicheren in den versagten Zustand durch  $g(\mathbf{x}) = 0$  markiert ist. Sei  $\mathbb{R}^n$  der Raum der  $n$  Basisvariablen, dann ist der Versagensbereich der Unterraum  $\mathbb{D}_F \subseteq \mathbb{R}^n$ , welcher definiert ist durch

$$\mathbb{D}_F = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | g(\mathbf{x}) \leq 0\} \quad (1.3)$$

Die Versagenswahrscheinlichkeit ist, mit den Definitionen (1.1 und 1.3), das Integral der gemeinsamen Dichtefunktion der Zufallsvariablen  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$  über den Versagensbereich  $\mathbb{D}_F$ , wie in Gl. (1.4) dargestellt. Die Versagenswahrscheinlichkeit wird hier mit  $P_F$  (von *probability of failure*) bezeichnet.

$$\begin{aligned} P_F &= P[\mathbf{X} \in \mathbb{D}_F] \\ &= P[g(\mathbf{X}) \leq 0] \\ &= \int \cdots \int_{\mathbb{D}_F} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Ein zeitabhängiges Zuverlässigkeitsproblem bedeutet, daß die Versagenswahrscheinlichkeit auf einen bestimmten Beobachtungszeitraum bezogen ist. Dabei sollte grundsätzlich zwischen kurzfristigen und langfristigen Betrachtungen unterschieden werden. Langfristige Analysen beinhalten nicht unbedingt dynamische Effekte der Strukturantwort. Die Modellierung der Belastung kann auch als Lastkombinationsproblem aufgefaßt werden. Unter Umständen sind aber Veränderungen des Strukturverhaltens infolge Schadensakkumulation, Rißfortschritt oder Korrosion zu berücksichtigen. In der folgenden Arbeit werden selten auftretende, kurzzeitige Ereignisse (z.B. ein Erdbeben wie in Kapitel 5) betrachtet. Die Belastung sei wie erwähnt ein Zufallsprozeß, die Strukturantwort sei dynamisch, d.h. Trägheits- und Dämpfungseffekte haben einen signifikanten Einfluß. Bei der Strukturanalyse sind auch nichtlineare Effekte zu berücksichtigen, jedoch keine grundsätzliche Veränderung des Verhaltens, z.B. infolge Schädigung.

Aufgabenstellungen dieser Art werden i.d.R. als sogenanntes Erstüberschreitensproblem formuliert. Dabei wird angenommen, daß Versagen bereits eintritt, wenn innerhalb des Beobachtungszeitraums  $T$  ein unzulässiger Zustand einmal erreicht wird. Mit obigen Definitionen und  $\mathbf{X}(t)$  als dem Prozeß der Antwort des untersuchten Systems ist die Versagenswahrscheinlichkeit

$$P_F(T) = P[\mathbf{X}(t) \in \mathbb{D}_F, t \in [0, T]] \quad (1.5)$$

Das ist gleichbedeutend mit der Wahrscheinlichkeit, daß der Zeitpunkt des Eintretens

eines unzulässigen Zustands  $t^*$  innerhalb des Beobachtungszeitraums liegt:

$$P_F(T) = P[t^* \leq T] \quad (1.6)$$

Insbesondere bei skalaren Prozessen wird oft als Versagen die Überschreitung einer Schranke  $\hat{x}$  betrachtet, es sei also  $\mathbb{D}_F = [\hat{x}, \infty)$ . Das führt auf die sogenannte Erstüberschreitenswahrscheinlichkeit

$$P_F(T) = P\left[\max_{t \in [0, T]} X(t) \geq \hat{x}\right] \quad (1.7)$$

### 1.3 Zur Berechnung der Erstüberschreitenswahrscheinlichkeit

Hier soll ein kurzer Überblick über mögliche Lösungsansätze für die zeitabhängige Versagenswahrscheinlichkeit, Gl. (1.5) ff., gegeben werden. Detailliertere Beschreibungen finden sich in der Literatur, z.B. Soong, Grigoriu [80] und Lin, Cai [50]. Einige für das Verständnis der folgenden Ausführungen hilfreiche Grundbegriffe und Definitionen werden in Abschnitt 3.1 angeführt.

Eine Gruppe von Verfahren zur Berechnung von  $P_F(T)$  beruht auf der Theorie der Niveaureisungen. Sei  $E[N_F(T)]$  die mittlere Anzahl der Ereignisse, daß der Prozeß  $\mathbf{X}(t)$  innerhalb des Zeitintervalls  $[0, T]$  in den Versagensbereich  $\mathbb{D}_F$  eintritt, dann wird die Überschreitensrate definiert zu

$$v(t) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial t} E[N_F(T)] \quad (1.8)$$

Bei Aufgabenstellungen in der Form von Gl. (1.7) ist die Niveaureisung mit positiver Ableitung, vom sicheren in den Versagensbereich, von Interesse, bezeichnet als  $v^+$ . Sie ist gegeben durch die Formel von Rice [70] (s. auch Spaethe [81])

$$v^+(t) = \int_0^\infty \xi f_{X, \dot{X}}(x, \xi, t) d\xi \quad (1.9)$$

unter der Voraussetzung, daß der Prozeß  $X(t)$  differenzierbar ist. Für stationäre, normal verteilte Prozesse und für bestimmte Transformationen solcher Prozesse vereinfacht sich obige Formel (Soong, Grigoriu [80, Abschn. 7.3]). Man benötigt für ihre Berechnung die Dichtefunktion oder statistische Momente der Antwort des untersuchten Systems und ihrer Ableitung nach der Zeit. Im Falle eines Vektorprozesses  $\mathbf{X}(t)$  sind die Überschreitensraten wesentlich schwieriger zu ermitteln, wegen der komplizierteren Form der Grenzzustandsfunktion und weil man die gemeinsame Dichtefunktion aller Variablen benötigt.

Auf Basis der Überschreitensrate lassen sich Abschätzungen der Versagenswahrscheinlichkeit ableiten. Unter der Annahme, daß Niveauüberschreitungen selten und deshalb voneinander unabhängig sind und unter der Anfangsbedingung, daß das System bei  $t = 0$  nicht versagt, ist für den stationären Prozeß

$$P_F \approx 1 - e^{-vT} \quad (1.10)$$

Es gibt in der Literatur weitere obere und untere Schranken für  $P_F$ . Die Annahme der Unabhängigkeit der Ereignisse gilt jedoch nicht für schmalbandige Prozesse und nicht für niedrige Schranken  $\hat{x}$ . Niveauüberschreitungen treten in diesen Fällen in Gruppen auf. Auch hierfür gibt es weitere Näherungsformeln. Macke beschäftigt sich in seiner Dissertation [52] näher mit diesem Thema.

Eine andere Klasse von analytischen Verfahren der Zuverlässigkeitsanalyse verwendet die Beschreibung der Systemantwort als Markow – Diffusionsprozeß mit Hilfe der Itô – Differentialgleichung, für den skalaren Prozeß  $X(t)$  wiedergegeben

$$dX(t) = m(X(t), t)dt + s(X(t), t)dB(t) \quad (1.11)$$

Hierin sind  $dB(t)$  die Inkremente eines Wiener – Prozesses, die einer Normalverteilung mit Mittelwert Null und Varianz  $dt$  folgen. Die Größe  $m$  wird als *Drift* und  $s$  als *Diffusionskoeffizient* bezeichnet. Der Markow – Prozeß ist dadurch gekennzeichnet, daß der Zustand zum Zeitpunkt  $t_i$  lediglich vom Zustand des vorher betrachteten Zeitpunktes  $t_{i-1}$  abhängt. So läßt sich der Zustand zum einem beliebigen Zeitpunkt unabhängig vom dazwischen liegenden Pfad mit gegebenen Anfangsbedingungen beschreiben. Die Übergangswahrscheinlichkeit  $\eta = f_X(x, t|x_0, t_0)$  ist die Lösung der Fokker – Planck (auch Kolmogorow – vorwärts) – Gleichung oder der Kolmogorow – rückwärts – Gleichung:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t_0} = -m(x_0, t_0) \frac{\partial \eta}{\partial x_0} - \frac{1}{2} s^2(x_0, t_0) \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_0^2} \quad (1.12)$$

Es gilt also, zunächst die Bestimmungsgleichungen des untersuchten Systems in der Form der Gl. (1.11) zu formulieren und die Drift- und Diffusionskoeffizienten zu bestimmen. Dann kann die Zuverlässigkeit des Systems zu einem bestimmten Zeitpunkt analog Gl. (1.12) formuliert werden. Geschlossene Lösungen der Kolmogorow – rückwärts – Gleichung gibt es jedoch nur für spezielle lineare Systeme (Lin, Cai [50, Abschnitt 8.4]). Die Zuverlässigkeit eines Systems ist aber entsprechend Gl. (1.6) auch bestimmt durch die probabilistische Beschreibung des zufälligen Zeitpunktes  $t^*$ , zu dem der Prozeß  $X(t)$  erstmals den zulässigen Bereich verläßt. Aus der Kolmogorow – rückwärts – Gleichung für  $t^*$  können die statistischen Momente des Erstüberschreitenszeitpunktes hergeleitet werden. Daraus wird die Versagenswahrscheinlichkeit nach Gl. (1.6) näherungsweise bestimmt.

Man erkennt, daß das hier beschriebene Verfahren in seiner Anwendbarkeit sehr eingeschränkt ist. Für hysteretische Systeme sind weitere Näherungen notwendig. Die bisherigen Ausführungen beschränkten sich auf skalare Prozesse. Für eine numerische Lösung der Fokker – Planck – Gleichung in höheren Dimensionen kann die Dichtefunktion in Anlehnung an die Finite Elemente Methode (Spencer und Bergman [83]) oder durch Finite Differenzen (Wojtkiewicz und Bergman [92]) diskretisiert werden. Das Verfahren ist aber sehr aufwendig und auf niedrige Dimensionen (bis 4) beschränkt. Bei der Pfadintegration oder auch *Cell Mapping* – Methode (Sun und Hsu [84], Nielsen und Köylüoğlu [59]) wird der Zustandsraum des Systems diskretisiert und eine Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen den Zellen aufgestellt. Im Falle eines stationären Problems, mit einer konstanten Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten, kann die Fokker – Planck – Gleichung effektiv gelöst werden. Für instationäre Prozesse oder für höhere Dimensionen erscheint auch dieses Verfahren als zu aufwendig.

Ein in der Literatur verbreitetes Verfahren zur Lösung von stochastischen dynamischen Problemstellungen ist die statistisch äquivalente Linearisierung. Hier wird zu einem gegebenen nichtlinearen System mit der Antwort  $X(t)$  ein lineares Ersatzsystem mit Antwort  $L(t)$  gesucht. Kriterium zur Bestimmung der Koeffizienten des linearen Systems ist, daß der Erwartungswert des Fehlerquadrats  $E[(L(t) - X(t))^2]$  minimal wird. Bei bestimmten Arten der Nichtlinearität, z.B. bei hysteretischen Systemen, erfordert das Verfahren eine iterative Bestimmung der Koeffizienten, was die Effizienz stark mindert. Mit dem linearen Ersatzsystem können weitere Untersuchungen wie oben beschrieben angestellt werden. Das Verfahren liefert gute Näherungen für Mittelwert und Varianz der Systemantwort, aber keine Aussagen über höhere Momente. Es scheint daher für die Zuverlässigkeitsanalyse ungeeignet zu sein.

Auch die Monte Carlo Methode stellt keine exakte Lösung des Zuverlässigkeitsproblems dar. Detaillierte Darstellungen dieser Methodik sind Inhalt der folgenden Kapitel. Vereinfacht ausgedrückt, wird für ein gegebenes System mit zufälligen Parametern auf dem Rechner eine künstliche Stichprobe von Eingangswerten generiert. Für jede Realisation der Eingangsgrößen wird die Antwort des Systems berechnet, anschließend erfolgt die statistische Auswertung der Stichprobe von Systemantworten. Das Ergebnis strebt mit zunehmendem Stichprobenumfang gegen die exakte Lösung. Neben seiner Genauigkeit ist ein entscheidender Vorteil die Flexibilität des Verfahrens: Die Berechnungen für jede einzelne Realisation sind quasi deterministisch; so können praktisch beliebige Systeme untersucht werden, z.B. in Verbindung mit der Finite Elemente Methode für die Strukturanalyse. Eine hohe Dimension der Zufallsvektoren kann zwar numerische Schwierigkeiten verursachen, stellt aber keine theoretische Beschränkung dar.

Nachteilig ist der bei einfacher Monte Carlo Simulation u.U. hohe Rechenaufwand, vgl. S. 11 zum notwendigen Stichprobenumfang. Deshalb besteht Bedarf nach der Entwicklung effizienter Algorithmen, um die Analyse realistischer Strukturen bei vertretbarem Zeitaufwand zu ermöglichen.

---

## 2

# Monte Carlo Methoden

## 2.1 „Einfache“ Monte Carlo Simulation

Die Versagenswahrscheinlichkeit für zeitunabhängige Probleme wird in Gl. (1.4) definiert als das Integral der gemeinsamen Dichtefunktion der Basisvariablen über den Versagensbereich. Die Lösung des Integrals durch Simulation wird auch als Monte Carlo Integration bezeichnet. Wie in den folgenden Abschnitten erläutert, wird das Ergebnis von Gl. (1.4) aus einer auf dem Rechner erzeugten künstlichen Stichprobe *im statistischen Sinne geschätzt*. Der Schätzer ist selbst eine zufällige Größe. Er ist *erwartungstreu*, wenn sein Erwartungswert identisch der gesuchten exakten Lösung ist. Das *Konfidenzintervall* des Schätzers hängt von seiner Varianz ab. Daher muß es das Ziel eines statistischen Schätzverfahrens sein, einen erwartungstreuen Schätzer mit minimaler Varianz zu finden. Dies ist die Motivation zur Entwicklung sogenannter varianzmindernder Monte Carlo – Verfahren, die in den folgenden Abschnitten vorgestellt werden.

Die Klassifizierung der Verfahren folgt im wesentlichen dem Buch von Rubinstein [71]. Angesichts des sehr großen Umfangs an Literatur zur Monte Carlo – Simulation erhebt die Zusammenstellung im vorliegenden Kapitel nicht den Anspruch der Vollständigkeit. Zunächst wird die Lösung des Integrals Gl. (1.4) durch einfache Monte Carlo Simulation, also ohne Varianzminderung, erläutert, dann werden auf dieser Grundlage die bekanntesten varianzmindernden Verfahren dargestellt und eine kritische Beurteilung versucht. Es werden sowohl allgemeine Darstellungen gegeben als auch die Anwendung auf die Zuverlässigkeitsanalyse diskutiert. Objektive Vergleiche der verschiedenen varianzmindernden Verfahren gibt es in der Literatur sehr wenige, z.B. Ayyub und Haldar [5] und Engelund und Rackwitz [23] für die Anwendung auf zeitunabhängige Fragestellungen. Die Eignung verschiedener Verfahren zur Simulation von stochastischen Prozessen wird in Kapitel 4 diskutiert.

Nach Hammersley und Handscomb [36] und auch Rubinstein [71] gibt es im wesentlichen zwei Techniken — zunächst ohne Varianzminderung —, mit denen ein Integral numerisch berechnet werden kann, namentlich die *Hit or Miss* („Treffer oder nicht

Treffer“) – Methode und die *Sample Mean* („Mittel einer Stichprobe“) – Methode, die hier kurz diskutiert werden sollen.

Die Darstellung der Simulationsverfahren auch in den folgenden Abschnitten erfolgt meist anhand des folgenden „Standardbeispiels“ (aus Rubinstein [71]). Zu lösen sei das bestimmte Integral einer beliebigen eindimensionalen Funktion  $g(x)$  über den Integrationsbereich  $\mathbb{D}$

$$\theta = \int_{\mathbb{D}} g(x) dx \quad (2.1)$$

Beim *Hit or Miss* – Monte Carlo werden für ein eindimensionales Problem zweidimensionale Zufallsvektoren simuliert. Eine Komponente entspricht  $x$ , gleichverteilt auf  $\mathbb{D}$ , die zweite Komponente ist gleichverteilt auf einem Intervall, das den Wertebereich von  $g(x|x \in \mathbb{D})$  einschließt. Das Integral wird hier als die Fläche (im eindimensionalen Fall) unter der Kurve interpretiert. Sein Wert ergibt sich aus der Zahl derjenigen simulierten Realisationen der Zufallsvektoren, welche unter der Kurve liegen („Treffer“), im Verhältnis zur Gesamtzahl der Simulationen.

Beim *Sample Mean* – Verfahren wird das Integral als das arithmetische Mittel der Funktion über den Integrationsbereich interpretiert. Es werden hier lediglich gleichverteilte Zufallszahlen  $x_i$  im Intervall  $(a, b)$  simuliert und deren Funktionswerte  $g(x_i)$  berechnet. Ihr Mittelwert entspricht dem Wert des Integrals. In der Regel ist diese Methode effektiver als die oben beschriebene, das heißt man kann mit weniger Simulationen die gleiche Signifikanz des Schätzwertes erreichen.

Shinozuka [76] war einer der ersten, die Monte Carlo Simulation auf die Berechnung von Versagenswahrscheinlichkeiten angewendet haben. Das Verfahren, das sich in der Literatur auch allgemein durchgesetzt hat, ist wie folgt. Zunächst wird eine *Indikatorfunktion*  $I$  eingeführt, die quasi anzeigt, ob eine Realisation des Zufallsvektors  $\mathbf{x}$  im Versagensbereich liegt. Mit der Definition des Versagensbereichs nach Gl. (1.3) ist  $I$  definiert durch

$$I(g(\mathbf{x})) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } g(\mathbf{x}) > 0 \\ 1, & \text{wenn } g(\mathbf{x}) \leq 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

So kann für das Integral Gl. (1.4) der Integrationsbereich geändert werden:

$$\begin{aligned} P_F &= \int_{\mathbb{D}_f} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} I(g(\mathbf{x})) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (2.3)$$



Gl. (2.3) ist der Erwartungswert der Indikatorfunktion  $I$ , auch geschrieben als

$$P_F = E[I(g(\mathbf{X}))] \quad (2.4)$$

Für den Erwartungswert und damit auch für die Versagenswahrscheinlichkeit gibt Gl. (2.5) einen erwartungstreuen Schätzer an:

$$\bar{P}_F = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I(g(\mathbf{x}_i)) \quad (2.5)$$

mit  $\mathbf{x}_i$ : die  $i$ -te Realisation einer Stichprobe der Basisvariablen vom Umfang  $N$ . Unter Ausnutzung der Erwartungstreue berechnet sich seine Varianz zu

$$\begin{aligned} \text{var}[\bar{P}_F] &= E[(\bar{P}_F - E[\bar{P}_F])^2] \\ &= E[\bar{P}_F^2] - P_F^2 \\ &= (P_F - P_F^2)/N \end{aligned} \quad (2.6)$$

Gl. (2.6) beinhaltet die unbekannte exakte Lösung  $P_F$ , dient daher nur der theoretischen Bewertung verschiedener Simulationsverfahren. In der programmtechnischen Umsetzung kann ein Schätzer für die Varianz ermittelt werden als

$$\overline{\text{var}}[\bar{P}_F] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I^2(g(\mathbf{x}_i)) - \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I(g(\mathbf{x}_i)) \right)^2 \quad (2.7)$$

Bei Anwendungen wird häufig der auf die Zahl der Simulationen bezogene Standardfehler als Vergleichswert angegeben, der wie folgt definiert ist

$$\sigma_{\bar{P}_F} = \sqrt{\frac{\overline{\text{var}}[\bar{P}_F]}{N}} \quad (2.8)$$

Aus Gl. (2.6) ist ersichtlich, daß die Varianz des Schätzers gegen 0 strebt für  $N \rightarrow \infty$ , damit ist der Schätzer außerdem konsistent. Für  $N \rightarrow \infty$  strebt die Schätzung gegen die exakte Lösung für die Versagenswahrscheinlichkeit.

Nimmt man aufgrund des Zentralen Grenzwertsatzes an, daß der Schätzer  $\bar{P}_F$  normalverteilt ist, kann man mit Hilfe seiner Varianz ein Konfidenzintervall bestimmen. Für eine erwartete Versagenswahrscheinlichkeit und eine vorgegebene Varianz des Schätzers ergibt sich aus Gl. (2.7) die Forderung der Anzahl an Realisationen, die zu simulieren sind, zu  $N \geq (P_F - P_F^2)/\overline{\text{var}}[\bar{P}_F]$ . Für einen Variationskoeffizienten von beispielsweise 10% und einem Sicherheitsniveau von  $P_F = 10^{-3}$  muß  $N \geq 10^5$  sein.

Durch die Einführung der Indikatorfunktion  $I$  ist das hier beschriebene Verfahren im Prinzip eine *Hit or Miss* – Methode. Zwar ist  $\bar{P}_F$  ein Schätzer des arithmetischen Mittels der Indikatorfunktion, da diese aber nur Werte 0 oder 1 annimmt, ist  $\bar{P}_F$  nichts

anderes als das Verhältnis der „Treffer“ zur Gesamtzahl an Realisationen. Ziel von varianzmindernden Verfahren ist es deshalb, dieses Verhältnis zu erhöhen. Eine Ausnahme bilden in diesem Zusammenhang das *Directional Sampling*, Abschnitt 2.9, das ausschließlich einen Mittelwert aus allen Realisationen bildet, und das *Latin Hypercube Sampling*, Abschnitt 2.4, bei dem die auszuwertenden Funktionswerte nicht direkt simuliert werden.

## 2.2 Importance Sampling

Ausgehend vom Standardbeispiel Gl. (2.1), berechnet nach dem *Sample Mean* – Verfahren, werden hier Zufallszahlen anstatt nach einer Gleichverteilung nach einer spezifischen Simulations – Dichtefunktion generiert. Dazu wird eine Zufallsvariable  $Y$  eingeführt, die auf dem gleichen Wertebereich wie  $X$  definiert ist. Ihre Dichtefunktion  $h_Y(y)$  ist dem jeweiligen Problem entsprechend so zu wählen, daß möglichst viele Stichproben in dem Bereich generiert werden, der am meisten zum gesamten Resultat beiträgt, also von größter Bedeutung (*Importance*) für das Gesamtergebnis ist. Die Simulationsdichte wird wie folgt in das Integral Gl. (2.1) eingeführt

$$\theta = \int_{\mathbb{D}} \frac{g(y)}{h_Y(y)} h_Y(y) dy \quad (2.9)$$

wodurch sich sein Wert nicht ändert. Der Wert des Integrals ist der Erwartungswert

$$\theta = E_h \left[ \frac{g(Y)}{h_Y(Y)} \right] \quad (2.10)$$

bezüglich einer nach  $h_Y(y)$  verteilten Grundgesamtheit (vorausgesetzt, die Integrationsgrenzen sind  $\pm\infty$ , was aber in der Regel durch die Indikatorfunktion, Gl. (2.2), immer erreicht werden kann). Der erwartungstreue Schätzer hierfür ist

$$\bar{\theta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{g(y_i)}{h_Y(y_i)} \quad (2.11)$$

worin  $x_i$  Zufallszahlen sind, die nach der Verteilung  $h_Y(y)$  simuliert werden.

In gleicher Weise wird die Simulationsdichte in Gl. (2.3) zur Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit eingeführt

$$P_F = \int_{-\infty}^{\infty} I(g(\mathbf{y})) \frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{y})}{h_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})} h_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (2.12)$$

Durch Simulation von Stichproben  $\mathbf{y}_i$  nach der Verteilung  $h_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})$  wird die Versagens-

wahrscheinlichkeit geschätzt zu

$$\bar{P}_F = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I(g(\mathbf{y}_i)) \frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{y}_i)}{h_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}_i)} \quad (2.13)$$

Die Varianz des Schätzers ist

$$\begin{aligned} \text{var}[\bar{P}_F] &= E[(\bar{P}_F - P_F)^2] \\ &= \frac{1}{N} \left( \int_{-\infty}^{\infty} I^2(g(\mathbf{y})) \frac{f_{\mathbf{X}}^2(\mathbf{y})}{h_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})} d\mathbf{y} - P_F^2 \right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

und wird zu Null wenn man folgende theoretische „ideale Simulationsdichte“ einsetzt (nach Rubinstein [71]):

$$h_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = I(g(\mathbf{y})) \cdot \frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{y})}{P_F} \quad (2.15)$$

Diese Dichtefunktion ist also gleich Null im sicheren Bereich und proportional der Original – Dichtefunktion  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$  im Versagensbereich. Hierfür muß allerdings die exakte Lösung  $P_F$  *a priori* bekannt sein. Die verschiedenen Varianten des *Importance Sampling* zielen daher darauf ab, diese ideale Simulationsdichte anzunähern.

Die meisten in der Zuverlässigkeitsanalyse angewendeten varianzmindernden Verfahren sind dem *Importance Sampling* zuzuordnen, einige davon werden im folgenden vorgestellt.

Das Konzept des *Importance Sampling Using Design Points* von Bourgund und Bucher [9] verwendet den aus *Level II* – Verfahren (z.B. die *First Order Reliability Method* — FORM, s. auch Hasofer, Lind [38], Shinozuka [76], Plate [64]) bekannten Bemessungspunkt als Mittelwertsvektor der Simulationsdichte. Das ist der Punkt auf dem Grenzzustand  $g(\mathbf{X}) = 0$  mit der höchsten Wahrscheinlichkeitsdichte. Im Raum standardnormal verteilter Variablen  $\mathbf{U}$  ist das gleichbedeutend dem geometrischen Ort auf  $g(\mathbf{U}) = 0$  mit dem kleinsten Abstand zum Koordinatenursprung und kann mit einer Optimierungsroutine gefunden werden. Mit dem Bemessungspunkt als Mittelwert werden die Stichproben in dem Teil des Versagensbereichs mit der höchsten Wahrscheinlichkeitsdichte konzentriert, welcher auch am meisten zur gesamten Versagenswahrscheinlichkeit beiträgt. Die Stichproben werden in der Regel nach einer Normalverteilung generiert, deren Korrelationsmatrix gleich derjenigen der Basisvariablen ist. Um eine effektivere Varianzminderung zu erreichen, ist es mitunter notwendig, die Standardabweichungen der Simulation im Verhältnis zu den Werten der Basisvariablen leicht zu verändern. Dies kann zum Beispiel bei extrem nichtlinearen, quasi „rauen“ Grenzzustandsfunktionen der Fall sein. Ein anderes Problem dieses Verfahrens, welches gleichermaßen bei Näherungsverfahren auftritt, ist, daß unter Umständen der Bemessungs-

punkt nicht eindeutig bestimmbar ist, zum Beispiel bei einer Grenzzustandsfunktion, die annähernd symmetrisch zum Mittelwert der Variablen liegt, oder bei Systemen, bei denen die Grenzzustandsfunktion aus mehreren Komponenten zusammengesetzt ist. Deshalb wird vorgeschlagen (Fu [27], Fu und Moses [28]), mehrere Punkte auf der Grenzzustandsfunktion mit lokalen Maxima der Wahrscheinlichkeitsdichte zu ermitteln. Mit diesen Punkten als Mittelwerte verschiedener Dichtefunktionen werden mehrere Simulationen durchgeführt und dann die Einzelergebnisse mit einer geeigneten Gewichtung gemittelt. Bei Verma *et al.* [87] wird dieses Prinzip auf das Problem der Systemversagenswahrscheinlichkeit angewendet. Es werden für alle  $M$  Komponenten die Teilversagenswahrscheinlichkeiten  $P_{F,m}$  ermittelt. Dann werden die Gewichte  $w_m$ ,  $m = 1, \dots, M$  durch das folgende Gleichungssystem aus den Dichten an den Bemessungspunkten bestimmt:

$$\frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_1^*)}{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_m^*)} = \frac{h_{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}_1^*)}{h_{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}_m^*)}; \quad m = 1 \dots M \quad (2.16)$$

$$\sum_{m=1}^M w_m = 1 \quad (2.17)$$

Die Systemversagenswahrscheinlichkeit ist dann

$$\bar{P}_F = \sum_{m=1}^M w_m \bar{P}_{F,m} \quad (2.18)$$

Eine Annäherung der idealen Simulationsdichte durch statistische Momente erster und zweiter Ordnung, das heißt durch Mittelwertsvektor und Kovarianzmatrix wird von Bucher [11] vorgeschlagen. Das *Iterative Fast Monte Carlo* (siehe auch Bucher *et al.* [12]) besteht aus mehreren aufeinanderfolgenden Simulationsläufen. Nach der ersten Simulation werden die statistischen Momente derjenigen Stichproben der Basisvariablen  $\mathbf{X}$ , die in den Versagensbereich fallen, berechnet. Das sind dann die Parameter der normalverteilten Zufallsvariablen  $\mathbf{Y}$ , die zur Simulation im folgenden Lauf verwendet werden.

$$E[\mathbf{Y}] = E[\mathbf{X} | g(\mathbf{x}) \leq 0] \quad (2.19)$$

$$E[\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T] = E[\mathbf{X}\mathbf{X}^T | g(\mathbf{x}) \leq 0] \quad (2.20)$$

Auf diese Weise wird die Simulationsdichte in mehreren Läufen wiederholt angepaßt. Die Erfahrung zeigt, daß das Verfahren recht robust und universell ist, solange man genügend Stichproben hat, um eine verlässliche Schätzung der Kovarianzmatrix, Gl. (2.20), zu erhalten.

Für die erste Simulation bietet sich eine Simulationsdichte an, deren Mittelwertsvektor identisch dem der Basisvariablen ist, die aber größere Standardabweichungen

besitzt. Bucher [11] schlägt stattdessen die folgende Startprozedur vor, um den Mittelwertsvektor der Simulationsdichte zu wählen. Es werden bedingte Versagenswahrscheinlichkeiten berechnet, indem für jeweils eine Variable eine Simulation durchgeführt wird, während die anderen Variablen am Mittelwert festgehalten werden. Diese bedingten Versagenswahrscheinlichkeiten, hier vereinfacht als  $P_{F_i}$  bezeichnet, sind als Fläche unter der eindimensionalen bedingten Wahrscheinlichkeitsdichte im Versagensbereich interpretierbar. Bei der Simulation werden auch die Schwerpunktskoordinaten  $\bar{x}_i$  dieser Flächen ermittelt. Der Startpunkt, also der Mittelwertsvektor der Simulationsdichte, ist dann der gemeinsame Schwerpunkt aller Teilflächen

$$\mu_{\mathbf{Y}} = \frac{P_{f_i} \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^n P_{f_i}} \quad (2.21)$$

Diese Startprozedur benötigt wesentlich weniger Stichproben und damit Aufrufe der Grenzzustandsfunktion, als oben erwähnte erste Simulation am Mittelwert.

Auch die *Kernel Method* (Ang *et al.* [2, 3]) ist ein Verfahren, das mit Hilfe mehrerer aufeinanderfolgender Simulationen die ideale Simulationsdichte annähert. Hier wird gewissermaßen eine empirische Dichtefunktion ermittelt, indem jede Realisation des simulierten Zufallsvektors, die im Versagensbereich liegt, als Mittelwert einer sogenannten *kernel function*  $k(\cdot)$ , die eine Dichtefunktion darstellt, verwendet wird. Die Streuung jeder *kernel function*, als Fensterweite  $w$  bezeichnet, wird willkürlich festgelegt. Die zur Simulation der Stichproben im folgenden Lauf verwendete Dichtefunktion setzt sich aus diesen einzelnen Dichten additiv zusammen, Gl. (2.22).

$$h_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \frac{1}{N_f} \sum_{i=1}^{N_f} \frac{1}{w^n} k\left(\frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}_i}{w}\right) \quad (2.22)$$

Hierin ist  $\mathbf{x}_i$  eine Realisation des Zufallsvektors, die im ersten Lauf zum Versagen führte,  $N_f$  die Anzahl an solchen Versagensfällen  $\mathbf{x}_i$  und  $n$  die Zahl der Basisvariablen. Erfüllt  $k$  die Kolmogorow'schen Axiome, ist also eine Dichtefunktion, dann gilt dies auch für  $h_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})$ . Für  $k$  kann zum Beispiel die Dichtefunktion der Normalverteilung mit Mittelwert  $\mathbf{x}_i$  und Standardabweichung  $w$  verwendet werden. Die Fensterweite  $w$  beeinflusst die Form der Simulationsdichtefunktion  $h_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})$ . Je größer  $w$  gewählt wird, desto glatter erscheint der Verlauf von  $h$ . Eine variable Fensterweite — kleiner in Bereichen hoher Wahrscheinlichkeitsdichte — wird vorgeschlagen. Für die Wahl der Fensterweite liegen jedoch keine objektiven Kriterien vor.

Wang und Ang [88] haben diese Methode mit der oben erwähnten Startprozedur von Bucher [11] verbunden, damit bereits die erste Simulation möglichst viele Stichproben im Versagensbereich erzeugt.

Karamchandani *et al.* [44] verfolgen ein ganz ähnliches Konzept. Vor der Definition der neuen Simulationsdichte werden allerdings die Punkte, die die Mittelwerte der einzelnen Dichtefunktionen festlegen, derart ausgewählt, daß eine lokale Häufung von

Punkten (*cluster*) vermieden wird. So werden die Mittelwerte der einzelnen Dichtefunktionen möglichst gleichmäßig über den Versagensbereich verteilt.

Beim *Asymptotic Importance Sampling* (Maes et al.[54, 55]) wird versucht, die ideale Simulationsdichte, Gl. (2.15), durch Betrachtung der Extrembereiche der Verteilungen der Basisvariablen anzunähern. Hier soll zunächst ein eindimensionales Problem betrachtet werden, für das es genau einen Grenzzustandspunkt  $y_0 | g(y_0) = 0$  gebe. Es wird angenommen, daß der extreme Ast der Dichtefunktion der Basisvariablen durch eine Exponentialfunktion angenähert werden kann. Weiterhin wird eine Funktion  $l(\mathbf{y}) = \ln f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})$  eingeführt. Damit läßt sich die der Gl. (2.15) entsprechende kumulative Verteilung annähern durch

$$H_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) \approx I(g(\mathbf{y})) \cdot \left(1 - \exp(l'(y_0) \cdot (y - y_0))\right) \quad (2.23)$$

In dieser Verteilung ist nicht nur eine Approximation für den Extrembereich der Originalverteilung, sondern auch für den Proportionalitätsfaktor  $1/P_F$  enthalten. Für ein Problem der Dimension  $n > 1$  ist das Verfahren komplexer. Zunächst wird ein Bemessungspunkt ermittelt, der hier anders definiert ist als üblich. Hier ist es im Raum der Basisvariablen der Punkt am Grenzzustand  $g(\mathbf{x}) = 0$ , für den der Logarithmus der Wahrscheinlichkeitsdichte maximal ist. Dann wird ein Koordinatensystem  $\mathbf{Y}$  definiert, dessen Ursprung in diesem Punkt  $\mathbf{x}_0$  liegt. Die erste Achse  $y_1$  zeigt in Richtung der größten Gradienten der Grenzzustandsfunktion. Die Koordinatenachsen sind nicht geradlinig, sondern folgen der Oberfläche der Grenzzustandsfunktion, näherungsweise zumindest der Krümmung der Grenzzustandsfunktion im Bemessungspunkt. Für eine näherungsweise Bestimmung der Simulationsdichte sind weitere Annahmen notwendig, zum einen daß eine Variable  $Y_1$  unabhängig von den anderen ist, zum anderen daß alle Variablen normalverteilt sind. Damit ist

$$h_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) \approx \exp\left(-|\nabla l|y_1 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=2}^n \left(l_{,ij} - \frac{|\nabla l|}{|\nabla g|} g_{,ij}\right) y_i y_j\right) \quad ; \quad y_1 > 0 \quad (2.24)$$

worin der Index  $,ij$  die zweite partielle Ableitung nach den Variablen  $i$  und  $j$  bedeutet.

## 2.3 Simulation mit Klassenunterteilung

Wie auch beim Importance Sampling, Abschnitt 2.2, soll bei der Simulation mit Klassenunterteilung (*Stratified Sampling*) die Simulationsstrategie dem Verlauf des Integranden angepaßt werden, hier aber durch die getrennte Betrachtung einzelner Unterbereiche des gesamten Integrationsbereichs. Hierfür wird der Integrationsbereich in  $m$  sich nicht überschneidende Bereiche  $\mathbb{D}_j | \mathbb{D}_i \cap \mathbb{D}_j = \{\} \forall i \neq j \wedge \bigcup_{j=1}^m \mathbb{D}_j = \mathbb{D}$  aufgeteilt. Es soll wieder das eindimensionale Beispiel Gl. (2.1) betrachtet werden. Die Zufallszahlen werden nach der Verteilung  $h_X(x)$  generiert, die über den gesamten Integrati-

onsbereich  $\mathbb{D}$  definiert ist. Allerdings wird die Simulation für jedes Intervall getrennt durchgeführt. Damit ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Realisation einer simulierten Stichprobe in das Intervall  $\mathbb{D}_j$  fällt,

$$P_j = \int_{\mathbb{D}_j} h_X(x) dx \quad (2.25)$$

und es muß gelten

$$\sum_{j=1}^m P_j = 1 \quad (2.26)$$

Ist  $h_X(x)$  eine Gleichverteilung, sind auch die  $P_j$  leicht zu bestimmen, andernfalls müßte auch hierfür ein statistischer Schätzer eingeführt werden.

Für jedes Intervall  $\mathbb{D}_j$  wird eine Funktion  $g_j(x)$  eingeführt, die in diesem Intervall identisch dem Integranden  $g(x)$  und außerhalb gleich Null ist. Damit läßt sich das auszuwertende Integral als Summe der Integrale über die einzelnen Intervalle anschreiben.

$$\begin{aligned} \theta &= \int_{\mathbb{D}} g(x) h_X(x) dx \\ &= \sum_{j=1}^m \int_{\mathbb{D}_j} g_j(x) h_X(x) dx \\ &= \sum_{j=1}^m P_j E[g_j(X)] \end{aligned} \quad (2.27)$$

Die Einführung der Funktionen  $g_j$  ist nur für die formale Herleitung obiger Gleichung notwendig. Der Schätzer für  $\theta$  ist

$$\bar{\theta} = \sum_{j=1}^m \left( \frac{P_j}{N_j} \sum_{i=1}^{N_j} g(x_{ij}) \right) \quad (2.28)$$

mit der Varianz

$$\text{var}[\bar{\theta}] = \sum_{j=1}^m \frac{P_j^2}{N_j} \text{var}[g(X_j)] \quad (2.29)$$

worin

$$\text{var}[g(X_j)] = \frac{1}{P_j} \int_{\mathbb{D}_j} g^2(x) h_X(x) dx - \left( \frac{1}{P_j} \int_{\mathbb{D}_j} g(x) h_X(x) dx \right)^2$$

Es wird also eine Simulation mit gleichverteilten Zufallsvariablen durchgeführt, ähn-

lich der einfachen Monte Carlo Simulation. Im Gegensatz hierzu ist aber eine flexible Anpassung an den Verlauf des Integranden mit Hilfe der Zahl der Stichproben für jedes Intervall,  $N_j$ , möglich. In den Bereichen, in denen die Variation des Integranden am größten ist, muß auch die Zahl der Simulationen höher sein als in anderen Bereichen. Nach Rubinstein [71] wird die Varianz minimal, wenn die Zahl der Simulationen proportional der Varianz des Integranden für jedes Intervall ist. Mit der Gesamtzahl der Simulationen  $N = \sum N_j$  soll also

$$N_j = \frac{NP_j \text{var}[g(X_j)]}{\sum_{j=1}^m P_j \text{var}[g(X_j)]} \quad (2.30)$$

sein. Die Varianzen  $\text{var}[g(X_j)]$  sind zunächst nicht bekannt und können zum Beispiel durch einen ersten Simulationslauf grob abgeschätzt werden. Eine Verbesserung gegenüber einfacher Simulation ist aber bereits erreichbar, wenn  $N_j = NP_j$  gewählt wird und die Intervallteilungen dem Verlauf des Integranden angepaßt werden.

## 2.4 Latin Hypercube Sampling

Das *Latin Hypercube Sampling* – Verfahren ist eine Weiterentwicklung des *Stratified Sampling* (Abschnitt 2.3) dahingehend, daß — bei einem mehrdimensionalen Problem — jede Klasse jeder Zufallsvariablen in gleichem Maße berücksichtigt werden soll (McKay *et al.* [56]). Die folgende Darstellung bezieht sich auf Probleme mit  $n$  unabhängigen Zufallsvariablen, zusammengefaßt im Zufallsvektor  $\mathbf{X}$ . Zunächst wird die Randverteilung jeder Basisvariablen  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , in  $N$  Klassen  $\mathbb{D}_j$ ,  $j = 1, \dots, N$  gleichen Wahrscheinlichkeitsgehalts  $P[x_i \in \mathbb{D}_j] = 1/N$  unterteilt. So erhält man  $N^n$  „Zellen“ mit dem Wahrscheinlichkeitsgehalt  $N^{-n}$ . Für jede Klasse wird ein repräsentativer Wert  $X_{ij}$  der Variablen bestimmt. Dieser kann zufällig generiert oder auch willkürlich gewählt werden, z.B. in der Mitte jeder Klasse. Huntington und Lyrintzis [41] verwenden den Mittelwert der jeweiligen Klasse, wodurch die Randverteilungen besser repräsentiert werden sollen. Die Besonderheit dieser Methode gegenüber den anderen hier beschriebenen ist, daß nicht die Zufallsvariablen selbst simuliert werden. Stattdessen werden zufällige Kombinationen der Indices  $i$  und  $j$  generiert, so daß jede Klasse jeder Randverteilung genau einmal verwendet wird. So erhält man eine Stichprobe vom Umfang  $N$ .

Für die Berechnung des Schätzers wird ein Indikator  $w_{ij}$  eingeführt:

$$w_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{wenn Zelle } i_j \text{ zur Stichprobe gehört} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.31)$$

Der Erwartungswert einer Funktion von  $\mathbf{X}$  ergibt sich nach dem *Sample Mean* – Prinzip mit Hilfe des Indikators  $w_{ij}$  aus der Summation über alle Zellen. Der Schätzer für die



Versagenswahrscheinlichkeit ist somit

$$\bar{P}_F = \frac{1}{N} \sum_{i_1=1}^N \dots \sum_{i_n=1}^N w_{i_j} I(g(\mathbf{x}_{i_j})) \quad (2.32)$$

Für die Programmierung ist es zweckmäßig, einen Vektor  $\mathbf{M}$  einzuführen, der die Dimension  $n$  hat und dessen Komponenten die Werte  $j = 1, \dots, N$  annehmen können.  $\mathbf{M}$  ist also ein Vektor mit Indices, durch welchen jede Zelle eindeutig bezeichnet werden kann. Der repräsentative Wert einer Zelle sei  $\mathbf{X}_M$ . Nach Simulation von Vektoren  $\mathbf{m}_k$ ,  $k = 1 \dots N$ , d.h. zufälligen Permutationen der Indices, wird die Versagenswahrscheinlichkeit geschätzt zu

$$\bar{P}_F = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N I(g(\mathbf{x}_{\mathbf{m}_k})) \quad (2.33)$$

Die Funktionswerte  $I(g(\mathbf{x}_{i_j}))$  bzw.  $I(g(\mathbf{x}_{\mathbf{m}_k}))$  für jede Zelle können bereits vor der Simulation ermittelt werden.

McKay *et al.* [56] zeigen, daß der Schätzer nach Gl. (2.32) erwartungstreu ist, d.h.  $E[\bar{P}_F] = P_F$ . Die von Ihnen hergeleitete Varianz des Schätzers ist

$$\begin{aligned} \text{var}[\bar{P}_F] &= (P_F - P_F^2)/N \\ &+ (N-1)^{1-n} N^{-1-n} \sum_{\substack{k=1, \dots, n \\ i_k=1, \dots, N}} \sum_{\substack{l=1, \dots, n \\ j_l=1, \dots, N}} \delta_{i_k j_l} (\mu_{i_k} - E[\bar{P}_F]) (\mu_{j_l} - E[\bar{P}_F]) \end{aligned} \quad (2.34)$$

Die Symbole  $\sum$  hierin seien eine Kurzform für die  $n$ -fache Summe entsprechend Gl. (2.32) und  $\delta_{i_k j_l}$  ist das Kronecker – Symbol.  $\mu_{i_k}$  ist der bedingte Erwartungswert  $E[I(g(\mathbf{x}_{i_k})) | \mathbf{X} \in \mathbb{D}_{i_k}]$ , dessen Ermittlung eine Integration der gemeinsamen Dichtefunktion von  $I$  und  $\mathbf{X}$  erfordern würde (Papoulis [62, Abschn. 7-3]). Gl. (2.34) hat damit nur theoretische Bedeutung. Bei einer praktischen Berechnung greift man auf einen Schätzer für die Varianz analog Gl. (2.7) zurück. Der Term in der ersten Zeile von Gl. (2.34) entspricht der Varianz des Schätzers der einfachen Simulation, vgl. Gl. (2.6). Daraus folgt, daß eine Varianzminderung sich ergibt, wenn der Ausdruck in der zweiten Zeile kleiner Null wird. Diese Bedingung ist aber schwer im vorhinein zu erfüllen.

Insbesondere bei geringem Stichprobenumfang kann beim *Latin Hypercube Sampling* eine Korrelation zwischen den Zufallsvariablen eingeführt werden. Damit ist aber eine Voraussetzung für die Erwartungstreue des Schätzers verletzt. Florian [25], Novak und Shiraishi [60] beschreiben ein Verfahren, diese künstliche und unerwünschte Korrelation zu eliminieren. Im Prinzip geschieht das durch Umsortieren der simulierten Permutationen der Klassenindices, vgl. Gl. (2.33). Huntington und Lyrantzis [41] haben einen Sortieralgorithmus entwickelt, der die tatsächlichen Werte standardisierter Variablen und deren Korrelationskoeffizienten verwendet. Die Erzeugung unkorrelier-

ter Variablen oder auch Anpassung evtl. vorhandener Korrelationskoeffizienten ist stark verbessert, dafür ist der Algorithmus relativ rechenintensiv.

Latin Hypercube Sampling erscheint bei einer kleinen Anzahl Zufallsvariablen als ein geeignetes Verfahren, den gesamten Wertebereich der Variablen mit wenigen Stichproben abzudecken. Mittelwerte und Kovarianzen der Variablen werden gut erfaßt, insbesondere mit dem Verfahren von Huntington und Lyrantzis. Diese Autoren schreiben auch, daß Momente höherer Ordnung unabhängiger Variablen nicht mit vertretbarem Aufwand gut wiedergegeben werden können und daß das Verfahren mit höherer Anzahl an Variablen schlechter wird. Für die Berechnung einer Versagenswahrscheinlichkeit, bei der es auf die Erfassung der Extrembereiche der Variablen ankommt, ist das Verfahren deshalb weniger geeignet.

Ziha [98], Ayyub und Lai [6] verwenden allerdings *Latin Hypercube Sampling* zur Generierung von Zufallszahlen in Verbindung mit anderen Varianzmindernden Verfahren wie Importance Sampling (Abschnitt 2.2), Antithetische Variable (Abschnitt 2.6) oder Reduzierung der Dimension (Abschnitt 2.8). Der erzielte Effekt ist vor allem, daß die geschätzte Versagenswahrscheinlichkeit, über die Anzahl der Simulationen betrachtet, weniger fluktuiert und trotz gleicher statistischer Unsicherheit schneller gegen die exakte Lösung strebt.

## 2.5 Kontrollvariable

Durch Verwendung von analytischen Teillösungen kann die Varianz eines Schätzers meist reduziert werden. Beim Verfahren der Kontrollvariable (*Control Variate*) soll zum Beispiel die Fluktuation des Integranden über den Integrationsbereich und damit die Varianz des Schätzers durch Subtraktion einer zweiten Funktion reduziert werden. In das Standardbeispiel Gl. (2.1) wird hierfür die Funktion  $h(x)$  wie folgt eingeführt (nach Hammersley, Handscomb [36]):

$$\theta = \int_{\mathbb{D}} g(x) - h(x) dx + \int_{\mathbb{D}} h(x) dx \quad (2.35)$$

Die Funktion  $h(x)$  soll einerseits den Verlauf von  $g(x)$  möglichst gut abbilden, andererseits einfach genug sein, so daß eine analytische Lösung für das zweite Integral in Gl. (2.35) verfügbar ist. Für  $h(x)$  sind zum Beispiel einfache Approximationen von  $g(x)$  denkbar. Das erste Integral wird durch Monte Carlo Simulation ausgewertet, wodurch nur unwesentlich höherer Rechenaufwand gegenüber der Lösung von Gl. (2.1) entsteht.

Die Varianz des Schätzers läßt sich durch eine andere Interpretation des Verfahrens angeben.  $\theta_1$  sei das auszuwertende Integral in Gl. (2.1),  $t_1$  der statistische Schätzer hierfür. Gesucht ist ein zweiter Schätzer  $t_2$ , der eine starke positive Korrelation zu  $t_1$  hat (z.B. durch Verwendung derselben Zufallszahlen bei der Simulation) und dessen Erwartungswert mit  $\theta_2$  bezeichnet wird. Damit ist ein Schätzer für  $\theta_1$  gegeben durch

$\bar{\theta}_1 = t_1 - t_2 + \theta_2$  entsprechend Gl. (2.35). Seine Varianz ist

$$\text{var}[t_1 - t_2 + \theta_2] = \text{var}t_1 + \text{var}t_2 - 2 \text{cov}[t_1 t_2] \quad (2.36)$$

und ist offensichtlich kleiner als  $\text{var}t_1$  (des Schätzers nach der einfachen Monte Carlo Simulation, Abschnitt 2.1), wenn  $\text{var}t_2 < 2 \text{cov}[t_1 t_2]$ .

Anstelle der additiven Funktion in Gl. (2.35) schlägt Rubinstein [72] vor, eine Funktion  $h(x)$  zu suchen, so daß das Verhältnis  $g(x)/h(x)$  im Integrationsbereich möglichst geringe Fluktuation aufweist. Er formuliert das Verfahren nicht allgemein für die Integration einer beliebigen Funktion, sondern als Bildung eines Erwartungswerts, wie es für die Zuverlässigkeitsanalyse geeignet ist. Mit dieser Funktion  $h(x)$  definiert man

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f_X(x) dx = E[h(X)] \quad (2.37)$$

und setzt dies in Gl. (2.3) — hier vereinfacht auf eine Dimension — ein:

$$\begin{aligned} P_F &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} I(g(x)) f_X(x) dx}{C^{-1}C} \\ &= \frac{E[I(g(X))]}{C^{-1}E[h(x)]} \end{aligned} \quad (2.38)$$

Ein Schätzer für  $P_F$  ist

$$\bar{P}_F = \frac{\sum_{i=1}^N I(g(\mathbf{x}_i))}{C^{-1} \sum_{i=1}^N h(x)} \quad (2.39)$$

Dieser Schätzer ist nicht erwartungstreu, aber konsistent, das heißt im Grenzwert für  $N \rightarrow \infty$  entspricht er mit Wahrscheinlichkeit 1 der exakten Lösung. Ein anderer Schätzer

$$\bar{P}_F = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{I(g(\mathbf{x}_i))}{C^{-1}h(x)} \quad (2.40)$$

hat Ähnlichkeit mit dem *Importance Sampling* Verfahren, nur muß hier  $h(x)$  keine Dichtefunktion sein. Laut Rubinstein sei der systematische Fehler bei diesen Schätzern nicht gravierend, da er mit der Größenordnung  $N^{-1}$  abnimmt, während das Konfidenzintervall zum Schätzer Gl. (2.39) mit der Größenordnung  $\sqrt{N^{-2}}$  kleiner wird. In der Zuverlässigkeitsanalyse, wenn die Simulation zum Beispiel mit Finite Elemente – Berechnungen verbunden ist, ist eine möglichst geringe Zahl von Stichproben das Ziel. Hier kann ein nicht erwartungstreuer Schätzer durchaus problematisch sein. Außerdem muß eine Funktion  $h(x)$  gefunden werden, für die das Integral einfach zu ermitteln ist.

## 2.6 Antithetische Variable

Ähnlich dem Verfahren der Kontrollvariable ist die Grundidee dieses Verfahrens, eine — hier negative — Korrelation zur Varianzminderung auszunutzen. Hier verwendet man zwei Schätzer  $t_1$  und  $t_2$ , die beide als Erwartungswert das zu lösende Integral haben, zum Beispiel  $E[t_1] = E[t_2] = \theta$  zur Berechnung von Gl. (2.1). Damit ist ein erwartungstreuer Schätzer für  $\theta$

$$\bar{\theta} = \frac{1}{2}(t_1 + t_2) \quad (2.41)$$

mit der Varianz

$$\text{var}[\bar{\theta}] = \frac{1}{4}(\text{var } t_1 + \text{var } t_2) + \frac{1}{2} \text{cov}[t_1 t_2] \quad (2.42)$$

Eine Varianzminderung gegenüber der einfachen Monte Carlo Simulation ergibt sich, wenn die Kovarianz  $\text{cov}[t_1 t_2]$  negativ ist. Die negative Korrelation kann man mit Hilfe der simulierten Zufallszahlen einführen. Die Simulation beliebig verteilter Zufallszahlen  $X$  geschieht in der Regel durch Simulation nach einer Gleichverteilung  $U \in [0, 1]$  und der Transformation  $X = F_X^{-1}(U)$  (wobei  $F_X^{-1}$  die Inverse der Verteilung von  $X$  ist). Eine antithetische Variable erhält man durch  $X' = F_X^{-1}(1 - U)$ . Für das Integral Gl. (2.1) ist damit ein antithetischer Schätzer

$$\bar{\theta} = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N (g(x_i) + g(x'_i)) \quad (2.43)$$

Rubinstein [71] zeigt, daß die Varianz dieses Schätzers für einen streng monotonen Integranden höchstens halb so groß ist wie die Varianz bei einfacher Simulation. Die Effizienzsteigerung wird aber dadurch relativiert, daß für die zweimalige Auswertung der Funktion  $g(x)$  der doppelte Rechenaufwand nötig ist.

Eine allgemeinere Form des antithetischen Schätzers wird von Hammersley und Handscomb [36] vorgestellt. Hierbei wird das Verfahren als ein Spezialfall des *Stratified Sampling*, Abschnitt 2.3, mit zwei Klassen interpretiert. Für einen eindimensionalen Fall wird der Integrationsbereich  $\mathbb{D}$  in zwei Intervalle mit den Grenzen

$$\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 \quad (2.44)$$

aufgeteilt. Folgt  $h_X(x)$  in Gl. (2.25) einer Gleichverteilung, dann sind

$$P_1 = \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{\alpha_2 - \alpha_0}, \quad P_2 = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_0} \quad (2.45)$$

Nach dem *Stratified Sampling* ist der Schätzer für das Standardbeispiel Gl. (2.1)

$$\bar{\theta} = \frac{P_1}{N_1} \sum_{i=1}^{N_1} g(\alpha x_{i1}) + \frac{P_2}{N_2} \sum_{i=1}^{N_2} g(\alpha x_{i2}) \quad (2.46)$$

Die Abhängigkeit der Zufallszahlen kann durch  $x_{i1} = x_{i2} = x_i$  eingeführt werden. Sind die  $x_i$  außerdem gleichverteilt in  $[0, 1]$ , wird der Schätzer zu

$$\bar{\theta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P_1 g((\alpha_1 - \alpha_0)x_i) + P_2 g(\alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1)x_i) \quad (2.47)$$

Die Schwierigkeit besteht in der Wahl der optimalen Intervallgrenze  $\alpha_1$ . Da die Schätzer erwartungstreu sind, ist das aber nur ein Problem für die Konvergenz und damit Effizienz des Verfahrens, ein systematischer Fehler kann durch eine falsche Wahl von  $\alpha_1$  nicht eingeführt werden. Insbesondere bei der Berechnung von Versagenswahrscheinlichkeiten ist die Wahl von  $\alpha_1$  schwierig. Der Integrationsbereich liegt im allgemeinen in den Extrembereichen der Dichtefunktionen der Basisvariablen. Generiert man dort Stichproben, dann liegen die antithetischen Zufallszahlen am anderen Ende des Wertebereichs, was sicher eine Verschlechterung der Effizienz ergibt. Problematisch ist auch die Anwendung des Verfahrens auf mehrdimensionale Integrale.

Anwendungsbeispiele dieses Konzepts demonstrieren Ayyub und Haldar [5], Ayyub und Chia [4]. Die erzielten Versagenswahrscheinlichkeiten liegen aber unrealistisch hoch, so daß keine Einschätzung der Anwendbarkeit in der Zuverlässigkeitsanalyse möglich ist.

## 2.7 Aufteilung des Integrationsbereichs

Auch bei diesem Ansatz sollen analytische Teillösungen eingeführt werden. Ist für einen Teil des Integrationsbereichs eine exakte Lösung für das Integral bekannt, liegt es nahe, den Integrationsbereich aufzuteilen. Im eindimensionalen Fall:

$$\begin{aligned} \theta &= \int_{\mathbb{D}} g(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{D}_1} g(x) dx + \int_{\mathbb{D}_2} g(x) dx \\ &= \theta_1 + \theta_2 \end{aligned} \quad (2.48)$$

Es seien zum Beispiel  $\theta_1$  und auch das Integral der Simulationsdichtefunktion über  $\mathbb{D}_1$ ,  $P_1 = \int_{\mathbb{D}_1} f_X(x) dx$  bekannt. Damit wird eine neue Dichtefunktion nur für den Bereich  $\mathbb{D}_2$  eingeführt.

$$h_X(x) = \begin{cases} f_X(x)/(1 - P_1) & , \text{ wenn } x \in \mathbb{D}_2 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases} \quad (2.49)$$

Mit dieser Dichtefunktion wird  $\theta_2$  ähnlich dem *Importance Sampling* – Verfahren, Abschnitt 2.2 durch Simulation ermittelt. Damit ergibt sich insgesamt

$$\bar{\theta} = \theta_1 + \frac{1 - P_1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{g(x_i)}{f_X(x_i)} \quad (2.50)$$

$$\text{var}[\bar{\theta}] = \frac{1 - P_1}{N} \int_{\mathbb{D}_2} \frac{g^2(x)}{f_X(x)} dx - \frac{1}{N} \left( \int_{\mathbb{D}_2} g(x) dx \right)^2 \quad (2.51)$$

Die Varianz ist kleiner oder gleich dem  $(1 - P_1)$ -fachen der Varianz des nach *Importance Sampling* ermittelten Schätzers bei Verwendung der gleichen Simulationsdichte.

Die Essenz dieses Verfahrens liegt also in der Bestimmung eines Teilbereiches, für den sowohl das Integral über die Funktion  $g(x)$  als auch über die in der Simulation verwendete Dichtefunktion bekannt sind. (Bei Berechnung einer Versagenswahrscheinlichkeit ist das gleichbedeutend.) Der bekannteste Ansatz in der Zuverlässigkeitsanalyse hierzu ist die Simulation außerhalb der  $\beta$  – Sphäre von Harbitz [37].

Ähnlich wie bei Level II – Verfahren oder dem *Importance Sampling Using the Design Point*, S. 13, wird der Bemessungspunkt ermittelt, welcher im Raum standardnormal – verteilter Basisvariablen bekanntlich der Punkt auf der Grenzzustandsfunktion mit dem kürzesten Abstand zum Ursprung ist. Innerhalb einer (Hyper-) Sphäre mit diesem Abstand  $\beta$  als Radius führt keine Realisation der Basisvariablen zum Versagen — vorausgesetzt, der Bemessungspunkt wurde korrekt ermittelt. Das bedeutet, das Integral der gemeinsamen Dichtefunktion für den Teilbereich der Hypersphäre ist gleich Null. Mit  $\mathbf{U}$  als dem Vektor der standardnormal verteilten Basisvariablen (oder einer entsprechenden Transformation beliebig verteilter Basisvariablen  $\mathbf{x}$ ) wird die Simulationsdichtefunktion außerhalb der  $n$ -dimensionalen Hypersphäre mit Radius  $\beta$  definiert.

$$h_{\mathbf{U}}(\mathbf{u}) = \begin{cases} f_{\mathbf{U}}(\mathbf{u})/(1 - P_1) & \forall \mathbf{u} \|\mathbf{u}\| > \beta \\ 0 & \forall \mathbf{u} \|\mathbf{u}\| \leq \beta \end{cases} \quad (2.52)$$

mit  $P_1 = \Xi^2(\beta^2)$ , wobei  $\Xi^2(\cdot)$  die Summenfunktion der  $\chi^2$ –Verteilung ist.

Puppo und Bertero [69] gehen in der Beschränkung des Integrationsbereichs weiter. Sie definieren als Integrationsbereich  $\mathbb{D}_2$  — wiederum für standardnormal verteilte Variablen — einen Konus, dessen Mittelachse die Gerade durch den Ursprung und den Bemessungspunkt ist. Der Konus wird begrenzt durch den Sicherheitsindex  $\beta$  und einen willkürlichen, größeren Radius. Außerhalb dieses Integrationsbereichs sind bei vernünftiger Wahl des größeren Radius und des Winkels, der den Konus festlegt, keine

nennenswerten Beiträge zum Gesamtergebnis zu erwarten. Das Integral über  $\mathbb{D}_1$  ist aber nicht exakt gleich Null, es wird also ein systematischer Fehler eingeführt.

Auch Fu [27] nimmt eine weitergehende Beschränkung des Simulationsbereichs vor, als lediglich die Sphäre mit Radius  $\beta$ . Er ermittelt ebenfalls den Bemessungspunkt. Linearisierung der Grenzzustandsfunktion am Bemessungspunkt ergibt die Integrationsgrenze, welche die Bereiche  $\mathbb{D}_1$  und  $\mathbb{D}_2$  trennt. Zur Simulation wird eine Normalverteilung verwendet, mit einer Wertebereichsbeschränkung entsprechend Gl. (2.49), deren Mittelwert der Bemessungspunkt ist. Bei Existenz mehrerer Bemessungspunkte (zum Beispiel bei zusammengesetzter Grenzzustandsfunktion für mehrere Versagenskriterien) wird die Simulationsdichte aus mehreren Gauß'schen Dichtefunktionen zusammengesetzt, vgl. Abschn. 2.2. Fu beschränkt sein Verfahren ausdrücklich auf lineare bzw. bereichsweise lineare Grenzzustandsfunktionen. Andernfalls würde auch hier ein systematischer Fehler eingeführt werden.

Anstelle einer Linearisierung schlagen Wu *et al.* [94, 93] eine Begrenzung des Integrationsbereichs  $\mathbb{D}_2$  durch eine Fläche zweiter Ordnung vor, die durch den Bemessungspunkt geht und deren Symmetrieachse die Gerade durch den Bemessungspunkt und den Koordinatenursprung ist. Der Krümmungsradius wird zunächst willkürlich gewählt, so daß der sichere Wertebereich  $\mathbb{D}_1$  konvex ist, und dann in mehreren Simulationsläufen sukzessive verkleinert, bis keine Stichprobe mehr in  $\mathbb{D}_1$  fällt. Hiermit soll sichergestellt werden, daß kein systematischer Fehler eingeführt wird. Dies ist aber kein exakter Nachweis, sondern ein empirisches Kriterium, das auch vom Stichprobenumfang abhängt.

Yonezawa und Okuda [97] bauen prinzipiell auf dem Verfahren von Harbitz auf. Zusätzlich versuchen sie, die ideale Simulationsdichte, vgl. Abschn. 2.2, durch eine empirisch ermittelte Dichtefunktion anzunähern. Dazu wird nach einer ersten Simulation eine Klassenunterteilung des Versagensbereichs vorgenommen. Die Klassengrenzen sind konzentrische Hypersphären mit Radien größer als  $\beta$ . Durch Auszählen der Stichproben erhält man über den Radius eine diskrete Dichte, die für die nachfolgende Simulation verwendet wird. Das Verfahren erscheint allerdings zweifelhaft, da die Richtung, in welcher der Bemessungspunkt vom Ursprung aus liegt, keine Berücksichtigung findet. Die erwähnte ideale Simulationsdichte wird hierdurch sicher nicht gut angenähert.

## 2.8 Reduzierung der Dimension

Auch bei diesem Verfahren werden bekannte Teillösungen verwendet, die sich allerdings nicht auf Teile des Integrationsbereichs, sondern auf Unterräume eines mehrdimensionalen Problems beziehen. Mit  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$  als der Vektor der Zufallsvariablen wird

analog Gl. (2.1) ein mehrdimensionales Beispiel beschrieben:

$$\theta = \int_{\mathbb{D}} g(\mathbf{x}) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (2.53)$$

mit  $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ . Hierbei wurde zusätzlich eine (nicht gleichverteilte) Simulationsdichte  $f_{\mathbf{X}}$  eingeführt. Der  $n$ -dimensionale Raum wird in Unterräume aufgeteilt, darin werden neue Zufallsvektoren definiert:

$$\mathbf{Y}^T = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_m] \in \mathbb{R}^m \quad (2.54)$$

$$\mathbf{Z}^T = [X_{m+1} \ X_{m+2} \ \dots \ X_n] \in \mathbb{R}^{n-m} \quad (2.55)$$

Hierbei muß offensichtlich gelten:

$$\mathbb{R}^m \cap \mathbb{R}^{n-m} = \{\}, \quad \mathbb{R}^m \cup \mathbb{R}^{n-m} = \mathbb{R}^n$$

und für die Integrationsbereiche

$$\mathbb{D}_1 \subseteq \mathbb{R}^m, \quad \mathbb{D}_2 \subseteq \mathbb{R}^{n-m} \quad \text{und} \quad \mathbb{D}_1 \cup \mathbb{D}_2 = \mathbb{D}$$

Damit ist

$$\theta = \int_{\mathbb{D}_1} \int_{\mathbb{D}_2} g(\mathbf{y}, \mathbf{z}) f_{\mathbf{Y}, \mathbf{Z}}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) dz dy \quad (2.56)$$

Wenn der bedingte Erwartungswert von  $g$  bezüglich einer nach  $\mathbf{Z}$  verteilten Grundgesamtheit für fest vorgegebenes  $\mathbf{Y}$ , also

$$E_{\mathbf{Z}}[g(\mathbf{Z}|\mathbf{y})] = \int_{\mathbb{D}_2} g(\mathbf{y}, \mathbf{z}) f_{\mathbf{Z}|\mathbf{Y}}(\mathbf{y}|\mathbf{z}) dz \quad (2.57)$$

und außerdem die Randverteilung

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \int_{\mathbb{D}_2} f_{\mathbf{Z}, \mathbf{Y}}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) dz \quad (2.58)$$

bekannt oder analytisch berechenbar sind, dann folgt aus Gln. (2.57) und (2.58) unter



der Voraussetzung, daß  $\mathbf{Y}$  und  $\mathbf{Z}$  unabhängig sind

$$\theta = \int_{\mathbb{D}_1} \int_{\mathbb{D}_2} g(\mathbf{y}, \mathbf{z}) f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) f_{\mathbf{Z}|\mathbf{Y}}(\mathbf{y}|\mathbf{z}) d\mathbf{y} d\mathbf{z} \quad (2.59)$$

$$= \int_{\mathbb{D}_1} \mathbf{E}_{\mathbf{Z}}[g(\mathbf{y}, \mathbf{Z})] f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (2.60)$$

$$= \mathbf{E}_{\mathbf{Y}} \mathbf{E}_{\mathbf{Z}}[g(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})] \quad (2.61)$$

Das Integral  $\theta$  kann durch Simulation geschätzt werden zu

$$\bar{\theta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{E}_{\mathbf{Z}}[g(\mathbf{y}_i, \mathbf{Z})] \quad (2.62)$$

Die Integration über  $\mathbf{z} \in \mathbb{D}_2$  wird also analytisch durchgeführt, so daß bei der Simulation nur noch der Zufallsvektor  $\mathbf{Y}$ , der eine kleinere Dimension als  $\mathbf{X}$  hat, zu generieren ist.

Die Varianz des Schätzers läßt sich mit Hilfe der Varianz des Integranden ausdrücken. Mit

$$\text{var}[g(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})] = \text{var}_{\mathbf{Y}} [\mathbf{E}_{\mathbf{Z}}[g(\mathbf{Z}|\mathbf{Y})]] + \mathbf{E}_{\mathbf{Y}} [\text{var}_{\mathbf{Z}}[g(\mathbf{Z}|\mathbf{Y})]]$$

ist

$$\text{var}[\bar{\theta}] = \text{var}_{\mathbf{Y}} [\mathbf{E}_{\mathbf{Z}}[g(\mathbf{Z}|\mathbf{Y})]] = \text{var}[g(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})] - \mathbf{E}_{\mathbf{Y}} [\text{var}_{\mathbf{Z}}[g(\mathbf{Z}|\mathbf{Y})]] \quad (2.63)$$

Wegen der Einführung des bedingten Erwartungswerts, Gl. (2.57), wird dieses Verfahren in der Literatur auch oft als bedingte Erwartungswertbildung (*Conditional Expectation*) bezeichnet. Es ist aber nicht zu verwechseln mit dem in Abschnitt 2.10 vorgestellten Verfahren, bei dem zusätzliche Variablen eingeführt werden.

Bei Ayyub und Haldar [5], Ayyub und Chia [4] wird zunächst die bedingte Wahrscheinlichkeit für eine skalare Variable  $Y$ , hier auch Kontrollvariable genannt, eingeführt. Im einfachsten Fall liegt eine Grenzzustandsfunktion mit zwei Variablen vor. Ist z.B.  $Y$  eine Beanspruchungsgröße der Struktur,  $Z$  die korrespondierende Widerstandsgröße, dann ist  $g(y, z) = z - y$ . Die Versagenswahrscheinlichkeit für gegebenes  $y$  ist damit  $P_F|y = P[Z \leq y] = F_Z(y)$ . Durch Simulation von  $Y$  wird die Versagenswahrscheinlichkeit geschätzt zu  $\bar{P}_F = 1/N \sum_{i=1}^N F_Z(y_i)$ . Im allgemeinen kann hier  $Z$  auch ein Zufallsvektor sein. Als Kontrollvariable wählt man, um größte Varianzminderung zu erreichen, die Basisvariable mit der größten Streuung, sofern hierfür eine analytische Lösung möglich ist.

Von Ayyub und Chia [4] wird außerdem noch das *Generalized Conditional Expectation* – Konzept vorgeschlagen. Hierbei wird nicht nur eine Kontrollvariable, sondern ein Vektor von Kontrollvariablen eingeführt, was genau dem eingangs beschriebenen

Verfahren, vgl. S. 26, entspricht. Kriterium zur Auswahl der Kontrollvariablen ist nicht unbedingt deren Varianz. Es kann auch sinnvoll erscheinen, alle nicht – normalverteilten Variablen, oder auch nichtlineares Verhalten in der Grenzzustandsfunktion auf diese Weise zu eliminieren. Für die Berechnung des bedingten Erwartungswerts, Gl. (2.57), bzw. der bedingten Versagenswahrscheinlichkeit  $P_F|y$  ist jede beliebige Methode, also analytische Verfahren oder Simulation, geeignet. Jeder Fehler hierbei wirkt sich auch auf das Endergebnis aus, wie die Beispiele von Ayyub und Chia [4] zeigen, so daß die Verwendung von Näherungsverfahren nicht empfehlenswert ist.

Karamchandani und Cornell [45] verbinden dieses Konzept mit *Importance Sampling*, Abschnitt 2.2. Es werden zwei Varianten vorgeschlagen; bei der ersten Variante wird der Mittelwertsvektor der Simulationsdichte nach jeder Realisation des Zufallsvektors  $\mathbf{Y}$  als diejenige Realisation festgelegt, für die sich die höchste bedingte Versagenswahrscheinlichkeit  $P_F|y_i$  ergibt. Bei der zweiten Variante wird zusätzlich eine abgeschnittene Dichte, ähnlich dem Konzept von Fu, S. 25, zur Simulation verwendet. Die Ergebnisse sind sehr vielversprechend, allerdings erscheint die Aktualisierung der Simulationsdichte mit jeder Realisation zweifelhaft. Ein theoretischer Nachweis der Erwartungstreue und Konsistenz des Schätzers wurde in der zitierten Literaturstelle nicht erbracht.

## 2.9 Directional Sampling

Vorgeschlagen von Deák [16], wurde dieses Verfahren von Ditlevsen und Bjerager in die Zuverlässigkeitsanalyse eingeführt (Bjerager [8], Ditlevsen *et al.* [17, 18]). Es ist eine spezielle Art der Reduzierung der Dimension, wie in Abschnitt 2.8 beschrieben, wobei die Basisvariablen in Polarkoordinaten transformiert werden.

Zunächst wird hier das Verfahren für den Fall beschrieben, daß der Vektor  $\mathbf{X}$  unabhängige, standardnormal verteilte Zufallsvariablen (alle  $\mu_{X_i} = 0$  und  $\sigma_{X_i} = 1$ ) enthält. Der Vektor  $\mathbf{X}$  wird in Polarkoordinaten angeschrieben als  $\mathbf{X} = R\mathbf{A}$ , beziehungsweise  $\mathbf{A} = \mathbf{X}/\|\mathbf{X}\|$  und  $R = \|\mathbf{X}\|$ . Damit wird Gleichung (1.4) zu

$$\begin{aligned} P_F &= \int_{\mathbb{D}_f} \overset{n\text{-f\aa}ch}{\int} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{D}_f} \overset{n\text{-f\aa}ch}{\int} f_{R,\mathbf{A}}(r, \mathbf{a}) \, dr \, d\mathbf{a} \end{aligned} \tag{2.64}$$

Die Transformation der Standardnormalverteilung in Polarkoordinaten ergibt, daß die Einheitsvektoren  $\mathbf{A}$  gleichverteilt sind auf der Oberfläche einer (Hyper-) Sphäre mit

Mittelpunkt im Koordinatenursprung und Radius Eins:

$$f_{\mathbf{A}}(\mathbf{a}) = \frac{1}{O_n} = \frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}} \quad (2.65)$$

Die Radien  $R$  sind  $\chi^2$ -verteilt mit  $n$  Freiheitsgraden und unabhängig von den Vektoren  $\mathbf{A}$ , deshalb ist  $f_{R,\mathbf{A}}(r, \mathbf{a}) = f_{R|\mathbf{A}}(r|\mathbf{a}) \cdot f_{\mathbf{A}}(\mathbf{a})$ . Im weiteren wird vorausgesetzt, daß der Koordinatenursprung nicht im Versagensbereich liegt und daß es in einer gegebenen Richtung  $\mathbf{a}$  nur einen eindeutigen Grenzzustandspunkt mit  $g(r^*(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{a}) = 0$  gibt. Der Versagensbereich ist dann gekennzeichnet durch  $\mathbb{D}_f = \{R | R > r^*\}$  und die Versagenswahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} P_F &= \int_{O_n} \int_{r^*(\mathbf{a})}^{\infty} f_{R|\mathbf{A}}(r|\mathbf{a}) \cdot f_{\mathbf{A}}(\mathbf{a}) \, dr \, d\mathbf{a} \\ &= E_{\mathbf{A}}[P_F | \mathbf{A}] \end{aligned} \quad (2.66)$$

mit der bedingten Versagenswahrscheinlichkeit für eine gegebene Richtung

$$\begin{aligned} P_F | \mathbf{a} &= P[R \geq r^*(\mathbf{a})] \\ &= \int_{r^*(\mathbf{a})}^{\infty} f_{R|\mathbf{A}}(r|\mathbf{a}) \, dr \\ &= 1 - \chi_n^2(r^{*2}(\mathbf{a})) \end{aligned} \quad (2.67)$$

Realisationen der Einheitsvektoren  $\mathbf{a}_i$  werden zweckmäßig durch Generierung standardnormal verteilter Zufallsvektoren  $\mathbf{x}_i$  und Normalisierung  $\mathbf{a}_i = \mathbf{x}_i / \|\mathbf{x}_i\|$  erzeugt. Bei Katsuki und Frangopol [46] werden die Richtungsvektoren nicht simuliert, stattdessen werden alle Koordinatenebenen durch konstante Winkeldifferenzen in Sektoren unterteilt und so die Vektoren nach einem deterministischen Schema derart bestimmt, daß sie annähernd gleichverteilt auf der Hypersphäre sind. Eine Varianzminderung z.B. durch *Importance Sampling*, wie weiter unten beschrieben, ist hierbei allerdings nicht möglich. Eine Generierung der Vektoren analog dem *Latin Hypercube Sampling*, Abschnitt 2.4 wäre ebenfalls denkbar.

In jeder Richtung  $\mathbf{a}_i$  kann der Grenzzustand  $r^*$  durch Nullstellensuche oder — wenn ein mechanisches Modell untersucht wird — durch Laststeigerung aufgefunden werden. Das eindimensionale Integral Gl. (2.67) kann durch eine Rekursionsformel exakt gelöst werden (Abramowitz, Stegun [1]):

$$1 - \chi_n^2(r^{*2}) = 1 - \chi_{n-2}^2(r^{*2}) + \frac{(r^{*2}/2)^{n/2-1} \exp(-r^{*2}/2)}{\Gamma(n/2)}, \quad n \geq 1 \quad (2.68)$$

wobei allerdings für  $n = 2$  eine Exponentialfunktion und für  $n = 1$  die Gauß'sche Sum-

menverteilung auszuwerten ist, was nur numerisch möglich ist.

Entsprechend Abschnitt 2.8 ergibt sich eine Reduzierung der Dimension um Eins. Der erwartungstreue Schätzer für die Versagenswahrscheinlichkeit ist das Mittel aus den bedingten Versagenswahrscheinlichkeiten der Gl. (2.67):

$$\begin{aligned}\bar{P}_F &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P_F | \mathbf{a}_i \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N 1 - \chi_n^2(r^{*2}(\mathbf{a}_i))\end{aligned}\tag{2.69}$$

Eine explizite Formel für die Varianz von  $\bar{P}_F$  liegt nicht vor, sie kann aber analog Gl. (2.7) geschätzt werden.

Für nicht normalverteilte Variablen liegt in der Regel keine geschlossene Lösung für Gl. (2.67) vor. Melchers [57] bietet einige Ansätze für eine Schätzung der bedingten Versagenswahrscheinlichkeit durch Simulation. Dieses Vorgehen erscheint aber nicht sinnvoll, da der varianzmindernde Effekt durch Einführung einer exakten Teillösung und Reduzierung der Dimension verlorenggeht. Durch geeignete Transformation der originalen Variablen zu unabhängigen, standardnormal verteilten Variablen (z.B. mittels Nataf – Transformation, s. Liu, DerKiureghian [51]) und weiterer Vorgehensweise wie oben beschrieben erreicht man mit relativ wenig Rechenaufwand eine numerisch genaue Lösung.

Das *Directional Sampling* ist umso effektiver, je mehr die Grenzzustandsfunktion einer Hypersphäre ähnelt. Dies ist bei nicht-redundanten Systemen der Fall, wenn Versagen eines Teiles der Struktur bereits als Gesamtversagen angesehen wird. Dann ist die Grenzzustandsfunktion das Minimum aus mehreren Teilfunktionen und i.d.R. konkav bezüglich des Ursprungs. Ein Vorteil des *Directional Sampling* liegt nicht nur in der Verwendung von analytischen Teillösungen, sondern auch darin, daß praktisch jede Realisation des zufälligen Richtungsvektors einen Beitrag zum Gesamtergebnis liefert, während bei allen anderen Simulationsverfahren der Integrationsbereich durch das *Hit-or-Miss* – Prinzip erfaßt wird, also einige Stichproben „verlorenggehen“. Damit ist das Verfahren insbesondere für nichtlineare statische Probleme mit zufälligen Lasten interessant, da man auch bei klassischen Simulationsverfahren die Last inkrementell steigern muß. Hier ist also der zusätzliche Aufwand, den Grenzzustandspunkt durch Iteration genau zu bestimmen, nicht mehr wesentlich. Weniger geeignet erscheint das *Directional Sampling* dagegen zur Simulation dynamischer Belastungen, wenn für jede Iteration eine Strukturanalyse im Zeitbereich notwendig ist.

Es ist naheliegend, das *Directional Sampling* mit dem *Importance Sampling* – Konzept für die Simulation der Einheitsvektoren zu koppeln. Analog Abschnitt 2.2 wird die

Simulationsdichtefunktion in Gl. (2.66) eingeführt:

$$\begin{aligned} P_F &= \int_{O_n}^{n-1} (P_F | \mathbf{a}) \cdot \frac{f_{\mathbf{A}}(\mathbf{a})}{h_{\mathbf{A}}(\mathbf{a})} h_{\mathbf{A}}(\mathbf{a}) d\mathbf{a} \\ &= E_h \left[ P_F | \mathbf{A} \cdot \frac{f_{\mathbf{A}}(\mathbf{A})}{h_{\mathbf{A}}(\mathbf{A})} \right] \end{aligned} \quad (2.70)$$

und die Versagenswahrscheinlichkeit wird geschätzt zu

$$\bar{P}_F = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( 1 - \chi_n^2(r^{*2}(\mathbf{a}_i)) \right) \cdot \frac{f_{\mathbf{A}}(\mathbf{a}_i)}{h_{\mathbf{A}}(\mathbf{a}_i)} \quad (2.71)$$

Bei Bjerager [8] und Ditlevsen [18] finden sich Hinweise für eine Bestimmung der optimalen Simulationsdichte für einige Spezialfälle. Ein allgemeineres Vorgehen ist die automatische Adaption der Simulationsdichte durch die *Iterative Fast Monte Carlo* – Simulation (Bucher [11], Kijawatworawet [47]), vgl. Abschn. 2.2. Es wird wiederum von standardnormal verteilten Basisvariablen ausgegangen. Die Simulation der Einheitsvektoren erfolgt wie oben beschrieben, jedoch werden hier Vektoren  $\mathbf{X}$  nach einer Normalverteilung mit den Parametern

$$E_h[\mathbf{X}] = \frac{\sum_{i=1}^N \mathbf{a}_i (P_F | \mathbf{a}_i)}{\sum_{i=1}^N P_F | \mathbf{a}_i} \quad (2.72)$$

$$E_h[\mathbf{X}\mathbf{X}^T] = \frac{\sum_{i=1}^N \mathbf{a}_i \mathbf{a}_i^T (P_F | \mathbf{a}_i)}{\sum_{i=1}^N P_F | \mathbf{a}_i} \quad (2.73)$$

erzeugt, die nach einer ersten Simulation mit auf der Hypersphäre gleichverteilten Einheitsvektoren bestimmt werden können. Die Einheitsvektoren entstehen wiederum durch Normalisierung. Die Simulationsdichte der Einheitsvektoren auf der Hypersphäre,  $h_{\mathbf{A}}(\mathbf{a})$ , ist durch Integration in radialer Richtung bestimmbar, wofür sich ebenfalls eine Rekursionsformel angeben läßt. Die Beispiele bei Kijawatworawet [47] zeigen, daß mit dieser Simulationsdichte zwei dominante Richtungen, in denen die Grenzzustandsfunktion dem Ursprung am nächsten liegt, erfaßt werden können. Je mehr die Grenzzustandsfunktion einer Sphäre ähnelt, desto mehr nähert sich die Simulationsdichte der Gleichverteilung an. Dieses Verfahren des *Adaptive Directional Sampling* hat sich als robust und vielseitig erwiesen. Die Adaption der Simulationsdichte wird dann problematisch, wenn der Versagensbereich nur in einer Richtung vom Ursprung liegt und ausgeprägt konvex geformt ist.

Auch für das *Directional Importance Sampling* von Richtungsvektoren gibt es analog Abschnitt 2.2, Seite 13 eine ideale Simulationsdichte. Sie ist proportional den bedingten Versagenswahrscheinlichkeiten, Gl. (2.67). Shao und Murotsu [74] versuchen diese durch eine empirische Dichte anzunähern. Die Simulationsprozedur geht

zunächst von einer Gleichverteilung der Richtungsvektoren aus, außerdem wird die Einheitssphäre in einzelne Sektoren diskretisiert. Für jede Realisation einer Richtung wird abhängig von der bedingten Versagenswahrscheinlichkeit entschieden, ob für den jeweiligen Bereich die Dichte erhöht oder abgemindert werden soll. Liegt in einer Richtung der Grenzzustand beispielsweise im unendlichen, wird die Dichte zu Null gesetzt. Fällt im weiteren Verfahren eine Realisation wieder in einen Bereich reduzierter Dichte, wird der Richtungsvektor in einen Bereich erhöhter Dichte transformiert. So wird während der Simulation für jede Realisation die Simulationsdichte angepaßt. Aus diesem Grunde erscheint das Verfahren als recht unhandlich in der Ausführung, zumal nicht eindeutig entscheidbar ist, in welche neue Richtung ein neuer Vektor zu transformieren ist. Vorteilhaft ist sicher die sofortige Verwendung der Information über die Grenzzustandsfunktion, die man durch Ermittlung jedes Grenzzustandspunkts erhält. Die Verwendung einer empirischen Simulationsdichte verspricht eine hohe Flexibilität bezüglich der Form der Grenzzustandsfunktion.

## 2.10 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Anstatt wie in Abschnitt 2.8 die Dimension zu verringern, kann es auch sinnvoll sein, den Raum zu erweitern, wenn dadurch das Problem insgesamt vereinfacht wird. Zu lösen sei zum Beispiel das Integral

$$\theta = E_f[g(\mathbf{X})] = \int_{\mathbb{A}} g(\mathbf{x})f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (2.74)$$

Es entspricht Gl. (2.1), wobei hier zur Simulation keine Gleichverteilung verwendet wird. Bei der Lösung des Integrals soll nun die Dichtefunktion  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$  eliminiert werden.

Man definiert einen erweiterten Raum  $\mathbb{C} = \mathbb{A} \times \mathbb{B}$ , und für einen Punkt  $\mathbf{z} \in \mathbb{C}$  schreibt man  $\mathbf{z} = [\mathbf{x}\mathbf{y}]$ , quasi sind  $\mathbf{x} \in \mathbb{A}$  und  $\mathbf{y} \in \mathbb{B}$  Komponenten des Ortsvektors  $\mathbf{z}$ . Es muß sich hierbei jedoch nicht um kartesische Koordinaten handeln. Die Beziehung zwischen den Volumenelementen  $d\mathbf{x}$ ,  $d\mathbf{y}$  und  $d\mathbf{z}$  ist durch

$$J(\mathbf{z}) = J(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{d\mathbf{x}d\mathbf{y}}{d\mathbf{z}} \quad (2.75)$$

gegeben. Außerdem benötigt man auf  $\mathbb{C}$  eine beliebige Wahrscheinlichkeitsdichte  $h_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) = h_{\mathbf{X}, \mathbf{Y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq 0$  und eine beliebige reellwertige Funktion  $r(\mathbf{z}) = r(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  mit  $R(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{B}} r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \neq 0$ .

Mit Hilfe der sogenannten Wichtungsfunktion

$$w(\mathbf{z}) = \frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})J(\mathbf{z})r(\mathbf{z})}{h_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})R(\mathbf{x})} \quad (2.76)$$

leiten Hammersley und Handscomb [36] die folgende Beziehung her:

$$\begin{aligned}\theta &= E_f[g(\mathbf{X})] \\ &= \int_{\mathbb{C}} g(\mathbf{X})w(\mathbf{Z})h_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) d\mathbf{Z} \\ &= E_h[g(\mathbf{X})w(\mathbf{Z})]\end{aligned}\tag{2.77}$$

Speziell seien  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = h_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0)$  die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte von  $h_{\mathbf{Z}}$  für gegebenes  $\mathbf{y}_0$  und  $\eta_{\mathbf{Y}}(y)$  die Dichte von  $\mathbf{Y}$ , wenn  $\mathbf{Z} = (\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  der Dichte  $h_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})$  folgt. Damit ist

$$h_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})d\mathbf{z} = h_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0)\eta_{\mathbf{Y}}(y)d\mathbf{X}d\mathbf{Y} = f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})\eta_{\mathbf{Y}}(y)d\mathbf{X}d\mathbf{Y}\tag{2.78}$$

Vergleich mit Gl. (2.75) und Einsetzen für ein bestimmtes  $\mathbf{y}_0$  ergibt

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0) = \frac{h_{\mathbf{X}\mathbf{Y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0)}{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})\eta_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}_0)}\tag{2.79}$$

Damit läßt sich die Dichtefunktion  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$  in Gl. (2.76) eliminieren:

$$w(\mathbf{z}) = \frac{h_{\mathbf{X}\mathbf{Y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0)J(\mathbf{x}, \mathbf{y})r(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{h_{\mathbf{X}\mathbf{Y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})J(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0)\eta_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}_0)R(\mathbf{x})}\tag{2.80}$$

So läßt sich Gl. (2.77) durch Simulation von Zufallsvektoren  $\mathbf{z}_i$  nach der Dichte  $h_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})$  schätzen als

$$\bar{\theta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(\mathbf{x}_i)w(\mathbf{z}_i)\tag{2.81}$$

Man braucht also nicht mehr die originale Dichtefunktion  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$  zu generieren. Der erweiterte Raum  $\mathbb{C}$  ist ebenso willkürlich wählbar wie die Funktion  $r(\mathbf{z})$ . Letztere kann man deshalb zur weiteren Varianzminderung einsetzen, ähnlich Abschnitt 2.5.

Das Verfahren soll durch einen einfachen Spezialfall weiter veranschaulicht werden.  $\mathbf{x}$  sei ein  $n$ -dimensionaler Vektor, dargestellt in kartesischen Koordinaten.  $y$  sei eine weitere Dimension im  $n + 1$ -dimensionalen kartesischen Koordinatensystem, damit ist  $d\mathbf{z} = d\mathbf{x}dy$ . Außerdem seien  $\mathbf{X}$  und  $Y$  voneinander unabhängig, deshalb ist  $h_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) = h_{\mathbf{X}\mathbf{Y}}(\mathbf{x}, y) = f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \cdot \eta_Y(y)$ . Die reellwertige Funktion  $r$  wird gewählt als  $r(\mathbf{x}, y) = 1 = \text{const.}$  und  $R(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{B}} dy = \text{const.} = R$ . Nach Einsetzen in Gln. 2.80 und 2.77 gibt Gl. (2.82) das zu lösende Integral an.

$$\begin{aligned}\theta &= E_h \left[ g(\mathbf{X}) \frac{1}{\eta_Y(Y)R} \right] \\ &= \int_{\mathbb{A}} \int_{\mathbb{B}} g(\mathbf{x}) \frac{1}{\eta_Y(y)R} h_{\mathbf{X}Y}(\mathbf{x},y) d\mathbf{X}dY\end{aligned}\quad (2.82)$$

Ein ganz ähnliches Konzept, allerdings im Zusammenhang mit Linearisierungsverfahren, verfolgen Wen und Chen [90]. Gl. (2.82) läßt sich mittels Reduzierung der Dimension nach Abschnitt 2.8 sehr einfach wieder auf die Ausgangsgleichung (2.74) zurückführen.

Ouypornprasert *et al.* [61] führen als zusätzliche Variable die Grenzzustandsfunktion  $g(\mathbf{X})$  selbst ein, mit folgender Modifikation: Die neue Zufallsvariable sei  $W = -g(\mathbf{X})$ , wenn  $g(\mathbf{X}) \leq 0$ , sonst  $W = 0$ . So ist die Dichtefunktion von  $W$  gleich Null, wenn eine Realisation des Vektors der Basisvariablen im sicheren Bereich liegt. Bei der Simulation wird damit erreicht, daß alle Realisationen im Versagensbereich liegen. Im Rahmen der Simulationsprozedur werden alle Variablen bis auf eine (beliebige) zufällig generiert, die verbleibende Variable muß aus der Realisation der anderen Variablen und der zusätzlichen Variable ermittelt werden, so daß  $g(\mathbf{x}_i) = w_i$  erfüllt ist. Das ist nur bei sehr einfacher Form der Grenzzustandsfunktion (z.B. auch einer Näherung durch das Antwortflächenverfahren) möglich.

## 2.11 Verwendung orthonormaler Funktionen

Dieses Verfahren, von Rubinstein [71] als „zufällige Quadratur“ bezeichnet, zielt auf eine Approximation des Integranden durch einen System orthonormaler Funktionen ab.

Ist für  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  ein System von Funktionen  $\phi_i(\mathbf{x})$ ,  $i = 1, \dots, n$  gegeben, die im Integrationsbereich  $\mathbb{D}$  orthonormal sind, das heißt

$$\int_{\mathbb{D}} \phi_i(\mathbf{x})\phi_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } i = j \\ 0, & \text{wenn } i \neq j \end{cases}\quad (2.83)$$

dann kann man zu einer Funktion  $f(\mathbf{x})$  eine Interpolationsfunktion  $\bar{f}(\mathbf{x})$  finden, so daß an diskreten Stützstellen  $\bar{f}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$  ist. Die Interpolation ergibt sich aus folgender Reihenentwicklung:

$$\bar{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n c_i \phi_i(\mathbf{x})\quad (2.84)$$



Das Gleichungssystem für die Koeffizienten  $c_i$  wird dargestellt durch die Determinante

$$\omega = \begin{vmatrix} \phi_1(\mathbf{x}_1) & \phi_2(\mathbf{x}_1) & \dots & \phi_n(\mathbf{x}_1) \\ \phi_1(\mathbf{x}_2) & \phi_2(\mathbf{x}_2) & \dots & \phi_n(\mathbf{x}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1(\mathbf{x}_n) & \dots & \dots & \phi_n(\mathbf{x}_n) \end{vmatrix} \quad (2.85)$$

Nach der Cramer'schen Regel ergibt sich  $c_1$  mit

$$\omega_1 = \begin{vmatrix} f(\mathbf{x}_1) & \phi_2(\mathbf{x}_1) & \dots & \phi_n(\mathbf{x}_1) \\ f(\mathbf{x}_2) & \phi_2(\mathbf{x}_2) & \dots & \phi_n(\mathbf{x}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(\mathbf{x}_n) & \dots & \dots & \phi_n(\mathbf{x}_n) \end{vmatrix} \quad (2.86)$$

zu

$$c_1 = \frac{\omega_1}{\omega} \quad (2.87)$$

Nach Hammersley und Handscomb [36] läßt sich damit das folgende Integral durch  $\omega$  ausdrücken:

$$\begin{aligned} \theta &= \int_{\mathbb{D}} f(\mathbf{x}) \phi_1 d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{D}} \frac{\omega_1}{\omega} \frac{\omega^2}{n!} d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{D}} c_1 \frac{\omega^2}{n!} d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (2.88)$$

Hierbei erfüllt der Ausdruck  $\omega^2/n!$  die Kolmogorow'schen Axiome einer Wahrscheinlichkeitsdichte, daß heißt  $\omega^2/n! \geq 0$  und  $\int_{\mathbb{D}} (\omega^2/n!) d\mathbf{x} = 1$ . Deshalb kann man das Integral Gl. (2.88) durch Simulation berechnen. Hierzu müssen  $N$  Zufallsvektoren nach der Verteilung  $h_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \omega^2/n!$  generiert werden. Der statistische Schätzer für das Integral Gl. (2.88) ist gegeben durch

$$\bar{\theta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\omega_1(\mathbf{x}_i)}{\omega(\mathbf{x}_i)} \quad (2.89)$$

Für die Varianz des Schätzers läßt sich eine Schranke angeben:

$$\begin{aligned} \text{var}[\bar{\theta}] &= \int_{\mathbb{D}} f^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \sum_{i=1}^n \left( \int_{\mathbb{D}} f(\mathbf{x}) \phi_i d\mathbf{x} \right)^2 \\ &= \inf_{\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \left( f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^n c_i \phi_i \right)^2 d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (2.90)$$

Die Varianz wird zu Null, wenn  $f(\mathbf{x})$  eine Linearkombination der  $\phi_i(\mathbf{x})$  ist.

Mit diesem Verfahren soll nun wiederum das Standardbeispiel Gl. (2.1) berechnet werden. Um auf die Form der Gl. (2.88) zu kommen, setzt man  $f(x) = g(x)/\phi(x)$  und erhält

$$\theta = \int_{\mathbb{D}} g(x) dx = \int_{\mathbb{D}} f(x) \phi(x) dx \quad (2.91)$$

Für diesen einfachen eindimensionalen Fall hat man nur eine Funktion  $\phi_1(x) = \phi(x)$ , die so gewählt wird, daß sie die Orthonormalitätsbedingung  $\int_{\mathbb{D}} \phi^2(x) dx = 1$  erfüllt. Die Determinanten ergeben sich zu  $\omega = \phi(x)$  und  $\omega_1 = f(x)$ . Der statistische Schätzer für dieses Integral ist nach Gl. (2.89)

$$\begin{aligned} \bar{\theta} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\omega_1(x_i)}{\omega(x_i)} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f(x_i)}{\phi(x_i)} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{g(x_i)}{\phi^2(x_i)} \end{aligned} \quad (2.92)$$

wobei die Zufallszahlen  $x_i$  nach der Verteilung  $h_X(x) = \omega^2/n! = \phi^2(x_i)$  zu simulieren sind.

Dieses Verfahren ist auf beliebige Dimensionen anwendbar, wobei ein System von  $n$  Funktionen, die über den Integrationsbereich  $\mathbb{D}$  orthonormal sind, zu finden ist. Dies kann zum Beispiel durch eine Fourierreihenentwicklung erfolgen.

# 3

## Simulation stochastischer Prozesse

### 3.1 Grundlagen

Für das Verständnis der folgenden Abschnitte ist es notwendig, den Begriff des Zufallsprozesses und einiger seiner Charakteristika festzulegen. Das geschieht hier ohne weitere Herleitung. Zur Theorie stochastischer Prozesse wird auf die einschlägigen Lehrbücher verwiesen, z.B. Papoulis [62], Soong und Grigoriu [80].

Ein skalarer Zufallsprozeß  $X(t)$  wird angesehen als eine Zeitreihe, deren Wert zu jedem beliebigen Zeitpunkt zufällig ist. Betrachtet man  $n$  beliebige, diskrete Zeitpunkte, so ist die Verteilung  $n$ -ter Ordnung eines reellwertigen skalaren Prozesses

$$F_n(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) = P[X(t_1) \leq x_1 \cap \dots \cap X(t_n) \leq x_n] \quad (3.1)$$

Die Ableitung der Verteilung ist die Dichtefunktion  $n$ -ter Ordnung

$$f_n(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) = \frac{\partial^n F_n(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n} \quad (3.2)$$

Viele Entwicklungen beziehen sich auf die Charakterisierung eines Prozesses durch seine statistischen Momente erster und zweiter Ordnung, z.B. der Mittelwerts- und Autokorrelationsfunktion. Diese sind definiert als

$$\mu_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) f_1(x, t) dx \quad (3.3)$$

$$r_{XX}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t_1)x_2(t_2)f_2(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2 \quad (3.4)$$

Die Autokovarianzfunktion ist  $c_{XX}(t_1, t_2) = E[(X(t_1) - \mu_X(t_1))(X(t_2) - \mu_X(t_2))]$  und ist identisch der Autokorrelationsfunktion, wenn die Mittelwertfunktion konstant gleich

Null ist. Dann ist in Gl. (3.4) auch die Varianz des Prozesses  $\sigma_X^2(t) = c_{XX}(t, t)$  enthalten. Folgt  $X(t)$  der Gauß – Verteilung, ist der Prozeß durch Mittelwerts- und Korrelationsfunktion vollständig beschrieben.

Für einen Vektorprozeß  $\mathbf{X}(t) = [X_1(t), X_2(t), \dots]^T$  gelten obige Definitionen für skalare Prozesse sinngemäß, indem sie auf jede einzelne Komponente angewendet werden. Die Mittelwertsfunktion wird dann ein Vektor, während die Korrelationsfunktion matrixwertig ist, da paarweise Korrelationen aller Komponenten zu betrachten sind. Ein komplexwertiger Prozeß  $X(t) = \text{Re}(X(t)) + i \text{Im}(X(t))$  kann als ein spezieller zweidimensionaler Vektorprozeß, mit Real- und Imaginärteil als Komponenten, angesehen werden (Soong, Grigoriu [80]).

Ein Prozeß ist stationär, wenn die Verteilungen beliebiger Ordnung — und damit auch alle statistischen Momente — von der Zeit unabhängig sind. Ist dies nur für die statistischen Momente bis zur Ordnung 2 der Fall, spricht man von einem im *erweiterten Sinne stationären* Prozeß (WSS – Prozeß). Das heißt, ein WSS – Prozeß hat eine endliche und konstante Mittelwertsfunktion, und seine Korrelationsfunktion hängt nicht vom Bezugszeitpunkt, sondern nur von der Zeitdifferenz ab:  $r_{XX}(t_1, t_2) = r_{XX}(\tau)$ , mit  $\tau = t_2 - t_1$ . Für Gauß–verteilte Prozesse ist das gleichbedeutend mit Stationarität im strengen Sinn.

Zur Beschreibung eines WSS – Prozesses mit Mittelwert gleich Null wird oft das Leistungsspektrum verwendet. Das Leistungsspektrum ist definiert als die Fourier – Transformation der Autokorrelationsfunktion:

$$s_{XX}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} r_{XX}(\tau) d\tau \quad (3.5)$$

Die Umkehrung der Transformation ist

$$r_{XX}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} s_{XX}(\omega) d\omega \quad (3.6)$$

Gln. (3.5) und (3.6) bilden ein Fourier – Paar und werden als die Wiener – Khintchine – Beziehungen bezeichnet. Einige Eigenschaften der Korrelationsfunktion und des Leistungsspektrums eines WSS – Prozesses, die später verwendet werden, werden im folgenden angeführt.

Ist  $X(t)$  reellwertig, dann ist  $r_{XX}(\tau)$  eine gerade Funktion. Für einen komplexwertigen WSS – Prozeß ist  $r_{XX}(\tau) = r_{XX}^*(-\tau)$ , bzw.  $r_{XX}(t_1, t_2) = r_{XX}^*(t_2, t_1)$  für instationäre Prozesse. Hierin bezeichnet der Stern die konjugiert Komplexe einer Größe. Die Korrelationsfunktion ist positiv definit, daraus folgt, daß das Leistungsspektrum  $s_{XX}(\omega) \geq 0 \forall \omega$  ist. Papoulis [62, Abschnitt 10-3] gibt noch einen anderen Beweis für diese Eigenschaft des Spektrums. Sie ist umgekehrt eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine gegebene Funktion eine Korrelationsfunktion ist. Das heißt, man

kann einen WSS – Prozeß konstruieren, dessen Korrelationsfunktion einer vorgegebenen Funktion  $g(\tau)$  entspricht, wenn ihre Fourier–Transformation nichtnegativ ist. Die Varianz eines WSS – Prozesses ist gegeben durch  $\sigma_X^2 = r_{XX}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{XX}(\omega) d\omega \geq 0$ .

Ableitungen und Integrale von Zufallsprozessen sind im allgemeinen im Sinne des quadratischen Mittels zu verstehen. Die Definitionen und besonderen Eigenschaften werden hier nicht wiedergegeben, sie haben Analogien zu den Ableitungen und Integralen deterministischer Funktionen, vgl. Lin, 1976 [49] und Soong, Grigoriu [80]. Eine wichtige und hier oft genutzte Eigenschaft ist die, daß die Erwartungswertbildung, selbst definitionsgemäß eine Integration über eine Potenz des Zufallsprozesses multipliziert mit der an sich deterministischen Dichtefunktion, jeweils kommutativ zur Ableitung bzw. Integration des Zufallsprozesses ist. So gilt z.B.  $E[\int f X(t) dt] = \int E[X(t)] dt$ .

Eine wichtige Eigenschaft von Prozessen, die auch bei der Monte Carlo Simulation ausgenutzt wird, ist die Ergodizität. Ein Prozeß ist ergodisch, wenn eine einzelne Realisation des Prozesses die gesamte Information des Ensembles beinhaltet. Man spricht von Ergodizität bezüglich einer statistischen Eigenschaft des Prozesses, wenn diese mit Wahrscheinlichkeit 1 als arithmetisches Mittel aus einer Zeitreihe berechnet werden kann (Soong, Grigoriu [80]). Zum Beispiel ergeben sich Mittelwerts- und Korrelationsfunktion auf diese Weise zu

$$\mu_X = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (3.7)$$

$$r_{XX}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T - \tau} \int_0^{T-\tau} x(t)x(t + \tau) dt \quad (3.8)$$

Notwendige, aber nicht hinreichende Voraussetzung für Ergodizität ist die Stationarität des Prozesses bezüglich der betrachteten Eigenschaft.

Ein vielfach verwendeter, spezieller Zufallsprozeß ist das Weiße Rauschen. Es ist definitionsgemäß ein Prozeß, dessen Leistungsspektrum über den gesamten Frequenzbereich von  $\omega = -\infty$  bis  $\infty$  konstant ist. Aus der Fouriertransformation, Gl. (3.6), ergibt sich, daß die Korrelationsfunktion eine Dirac–Delta Funktion ist:  $r_{XX}(\tau) = 2\pi s_{XX} \delta(\tau)$ . Alle  $X_j, X_k, j \neq k$  sind unkorreliert, und die Varianz geht gegen unendlich. Der Parameter  $I = 2\pi s_{XX}$  wird als Intensität des weißen Rauschens bezeichnet. Ein nicht–weißer Prozeß wird oft als Antwort eines linearen Systems auf weißes Rauschen als Erregung modelliert, was sowohl im Zeit- als auch im Frequenzbereich möglich ist. Hierbei ist die Übertragungsfunktion des Systems so zu bestimmen, daß die Antwort ein vorgegebenes Leistungsspektrum aufweist.

Eine große Gruppe nicht – Gauß’scher Prozesse, der sogenannten Translationsprozesse, lassen sich mit Hilfe ihrer Randverteilung und Kovarianzfunktion aus Gauß–verteilten Prozessen erzeugen (Grigoriu, 1984 [29] und 1996 [34]). Ausgegangen wird von einem stationären Prozeß  $U(t)$ , welcher der Standardnormalverteilung  $\Phi(u)$  (mit

$\mu_U = 0, \sigma_U^2 = 1$ ) folgt. Aus der Transformation  $F_X^{-1}(\Phi(U(t)))$  ergibt sich ein stationärer Prozeß  $X(t)$  mit der Verteilung  $F_X(x)$ . Die Transformationsbeziehung  $U(t) \rightarrow X(t)$  ist monoton steigend. Deshalb sind auch oben erwähnte Bedingungen für die Korrelationsfunktion von  $X(t)$  erfüllt. Bei der umgekehrten Transformation  $X(t) \rightarrow U(t)$  kann dagegen die Forderung der positiven Definitheit verletzt werden, was durch formale Bildung des Leistungsspektrums mittels Fouriertransformation leicht überprüft werden kann (Macke, 1996 [53]). Über die umgekehrte Transformation läßt sich die Kovarianz- bzw. Korrelationsfunktion des Gauß-Prozesses  $U(t)$  so kalibrieren, daß  $X(t)$  eine vorgegebene Kovarianzfunktion  $c_{XX}(\tau)$  besitzt. Auch hierbei ist es möglich, daß keine Lösung existiert, oder das Ergebnis  $c_{UU}(\tau)$  keine gültige Kovarianzfunktion darstellt. Die positive Definitheit von  $c_{UU}(\tau)$  ist wiederum zu prüfen. Eine iterative Anpassung von Verteilungsfunktion und Leistungsspektrum wurde 1988 von Yamazaki und Shinozuka [95] vorgeschlagen, der Algorithmus ist aber nicht unbedingt konvergent und kann wiederum Eigenschaften des Ausgangsprozesses verändern.

Während ein stationärer, normalverteilter Prozeß bekanntlich durch Mittelwertfunktion und Leistungsspektrum vollständig beschrieben ist, verwenden Peinelt und Bucher [63] zur Beschreibung nicht-normalverteilter Prozesse Momentenfunktionen höherer Ordnung bzw. die sich daraus durch mehrdimensionale Fourier-Transformation ergebenden Spektren. Cai *et al.* [14] gehen von einer Itô – Differentialgleichung (s. Lin, Cai [50]) aus. Drift- und Diffusionskoeffizienten können abhängig von einem vorgegebenen Leistungsspektrum und einer Dichtefunktion iterativ bestimmt werden. Zur Simulation ist die Differentialgleichung im Zeitbereich zu lösen.

Die Darstellungen in den folgenden Abschnitten sind auf Gauß – verteilte Prozesse beschränkt, wie sie auch in den Berechnungsbeispielen zur Anwendung kommen.

## 3.2 Darstellung im Zeitbereich

Die Simulation eines Prozesses im Zeitbereich erfordert zunächst immer die Diskretisierung der Zeitachse. Man kann zum Beispiel die Antwort eines Systems auf zufällige Erregung direkt simulieren, wenn hierfür eine stochastische Differentialgleichung in der Itô – Form vorliegt, wie von Soong, Grigoriu [80, Abschnitt 8.4] beschrieben. Durch Diskretisierung der Zeitachse wird die Differentialgleichung als Ausdruck finiter Differenzen schrittweise gelöst. Da diese Vorgehensweise nicht immer möglich bzw. praktikabel ist, wird hierauf nicht weiter eingegangen. Generell kann die Antwort einer mechanischen Struktur durch die Finite Elemente Methode berechnet werden, wobei die Lösung der (i.a. nichtlinearen) Bewegungsgleichung schrittweise im Zeitbereich erfolgt. In diesem Abschnitt sollen zwei gängige Modelle zur Simulation des Erregungsprozesses im Zeitbereich vorgestellt werden, das *Autoregressive* (AR) und das *Moving Average* (MA) – Modell.

Ein  $AR(m)$  – Prozeß besteht aus einem gewichteten Mittel aus  $m$  Werten vergangener Zeitpunkte plus einem addierten zufälligen Anteil. Aufgrund der diskretisierten

Zeitachse wird der Prozeß als eine Folge von Zufallsvariablen  $X_t$ ,  $t \in \mathbb{N}$  angeschrieben.

$$X_t = b_0 U_t + \sum_{j=1}^m a_j X_{t-j} \quad (3.9)$$

Hierbei ist  $U_t$  eine Sequenz unabhängiger identisch verteilter Zufallsvariablen, mit  $\mu_U = 0$ ,  $\sigma_U = 1$ . Ist  $U_t$  normalverteilt, gilt dies auch für  $X_t$ . Für  $t < m$  existieren nicht alle Summanden. Daraus folgt, daß der Prozeß zunächst instationär ist, er strebt aber asymptotisch gegen einen stationären Zustand. Für den stationären Zustand ergibt sich die Korrelationsfunktion  $r_{XX}(k) = E[X_t X_{t+k}]$  aus den Yule – Walker – Gleichungen

$$\begin{aligned} r_{XX}(0) &= b_0 + \sum_{j=1}^m a_j r_{XX}(j) \\ r_{XX}(k) &= \sum_{j=1}^m a_j r_{XX}(j-k) \quad , \quad k \geq 1 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Umgekehrt kann man aus gegebenen Daten, z.B. Meßwerten oder einem vorgegebenen Leistungsspektrum, Werte der Korrelationsfunktion bestimmen und erhält so ein Gleichungssystem zur Bestimmung der Koeffizienten  $a$  und  $b$ .

Ein MA – Prozeß  $n$ -ter Ordnung ist ein gleitender Mittelwert über  $n$  Werte  $U_t$  mit Gewichtungsfaktoren  $b$

$$X_t = \sum_{j=0}^n b_j U_{t-j} \quad (3.11)$$

Der Prozeß ist normalverteilt, wenn  $U_t$  normalverteilt ist. Er besitzt die Korrelationsfunktion

$$r_{XX}(k) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{n-k} b_j b_{j+|k|} & , \quad |k| \leq n \\ 0 & , \quad |k| > n \end{cases} \quad (3.12)$$

und das Leistungsspektrum

$$s_{XX}(\omega) = \left| \sum_{j=0}^n b_j e^{-ij\omega} \right|^2 \quad (3.13)$$

wobei  $i$  die imaginäre Einheit,  $i = \sqrt{-1}$  ist. Unter bestimmten Voraussetzungen, s. Papoulis [62, Abschnitt, 12-1], kann ein für diskrete Frequenzen gegebenes Spektrum

faktoriert werden, in der Form

$$s_{XX}(\omega) = |l(\omega)|^2$$

$$l(\omega) = \sum_{j=0}^n b_j e^{-ij\omega} \quad (3.14)$$

und man erhält wiederum ein Gleichungssystem für die unbekanntenen Koeffizienten.

Oft werden beide Modelle, Gln. (3.9) und (3.11) kombiniert zum *Autoregressive Moving Average* (ARMA) – Modell. Ein ARMA( $m, n$ ) – Prozeß hat die Form

$$\sum_{j=0}^m a_j X_{t-j} = \sum_{k=0}^n b_k U_{t-k} \quad (3.15)$$

mit  $a_0 = 1$ . Die Korrelationsfunktion des ARMA – Prozesses ergibt sich aus

$$\sum_{l=0}^m a_l r_{XX}(k-l) = 0 \quad , \quad k > m \quad (3.16)$$

Das bedeutet, in der Zeitspanne, innerhalb der die zufälligen Summanden Einfluß haben, sind die Werte von  $X_t$  unkorreliert. Aus Gl. (3.16) lassen sich nur die Koeffizienten  $a$  bestimmen. Papoulis [62, Abschnitt, 13-3] zeigt eine Möglichkeit zur Bestimmung der Koeffizienten  $b$ . Hierbei wird der ARMA – Prozeß durch ein lineares System so gefiltert, daß die AR – Anteile wegfallen. Der gefilterte Prozeß ist ein MA – Prozeß, so daß man wie oben beschrieben die Koeffizienten  $b$  bestimmen kann, nachdem man das Leistungsspektrum des gefilterten Prozesses bestimmt hat.

In Anwendungen liegen oft mehr Daten vor, als zur Bestimmung des gewählten ARMA( $m, n$ ) – Modells nötig sind. Eine allgemeinere, wenn auch nur näherungsweise Möglichkeit zur Bestimmung der Koeffizienten ergibt sich aus einer Fehlerquadrat – Minimierung, wie sie von Friot und Bouc [26] beschrieben wird. Das ARMA – Modell wird als linearer Filter des weißen Rauschens  $U_t$  interpretiert. Die Übertragungsfunktion im Frequenzbereich lautet

$$H(\omega) = \frac{\sum_{j=0}^n b_j e^{-ij\omega}}{\sum_{k=0}^m a_k e^{-ik\omega}} = \frac{N(\omega)}{M(\omega)} \quad (3.17)$$

Das faktorisierte Leistungsspektrum  $l(\omega)$ , Gl. (3.14), entspricht der Transferfunktion



$H(\omega)$  bis auf einen Fehlerterm  $\varepsilon$ , der wie folgt ermittelt wird:

$$\varepsilon^2 = \int_0^{2\pi} |I(\omega)M(\omega) - N(\omega)|^2 d\omega \quad (3.18)$$

Die Koeffizienten  $a$ ,  $b$  werden aus der Bedingung bestimmt, daß der Fehler minimal wird.

Für eine bessere Anpassung an ein vorgegebenes Leistungsspektrum schlagen Friot und Bouc [26] eine Wichtung des Fehlers  $\varepsilon$  vor, wodurch besonders Spitzen des Spektrums betont werden. Außerdem wird erläutert, wie zur effizienten Faktorisierung des Spektrums und zur Berechnung der Koeffizienten die schnelle Fouriertransformation (FFT) verwendet werden kann.

Eine direktere Methode, einen Prozeß zu simulieren, der ein vorgegebenes Leistungsspektrum aufweisen soll, besteht darin, zunächst ein weißes Rauschen mit der Intensität  $I$  zu erzeugen und dieses als Erregung eines linearen Systems zu verwenden. Wenn die Übertragungsfunktion  $H(\omega)$  des Systems der Bedingung

$$\frac{I}{2\pi} |H(\omega)|^2 = s_{xx}(\omega) \quad (3.19)$$

genügt, dann ist das Leistungsspektrum der Antwort  $X(t)$  des linearen Systems  $s_{xx}(\omega)$ . Diese Vorgehensweise erfordert mehr Rechenzeit als die Anpassung des ARMA – Modells vor der Simulation, da zusätzlich das lineare System für jeden Zeitschritt gelöst werden muß. Dafür ist eine genaue Anpassung an das vorgegebene Spektrum möglich.

Aus Gl. (3.11) ff. ist offensichtlich, daß ein MA(0) – Prozeß ein diskretes weißes Rauschen darstellt. Soll das weiße Rauschen eine bestimmte Intensität  $I$  besitzen, dann bestimmt sich der Koeffizient  $b_0$  nach Gl. (3.13) aus

$$b_0^2 = s_{XX} = \frac{I}{2\pi} \quad (3.20)$$

Simulation eines Prozesses basierend auf seiner Darstellung im Zeitbereich hat den Vorteil, daß lediglich die Parameter gespeichert werden müssen — im Gegensatz zu Modellen im Frequenzbereich, die im folgenden Abschnitt erläutert werden, für welche die gesamte Zeitreihe im Speicher gehalten werden muß, als Eingang des zu untersuchenden Systems. Vorteilhaft ist auch, daß die Zeitreihe beliebig lang sein kann. Die Größe des Arbeitsspeichers dürfte allerdings auf modernen Rechnerarchitekturen kein Problem darstellen.

## 3.3 Darstellung im Frequenzbereich

### 3.3.1 Herleitung der spektralen Repräsentation

Oft ist ein zu simulierender Prozeß durch sein Leistungsspektrum charakterisiert, deshalb erscheint es sinnvoll, die Simulation von einer Darstellung im Frequenzbereich abzuleiten, so daß sich die Parameter des Simulationsmodells direkter und einfacher bestimmen lassen. Im Hinblick auf varianzmindernde Verfahren und Reduktion der Zahl der Basisvariablen wird in Kapitel 4 die spektrale Darstellung gewählt, deshalb erfolgt hier eine ausführlichere Herleitung. Ausgangspunkt ist eine zeitunabhängige Darstellung des Prozesses, die sich aus einer Integraltransformation, hier durch Fouriertransformation, ergibt.

Eine beliebige, komplexwertige deterministische Funktion  $x(t)$  kann unter bestimmten Voraussetzungen durch das Fourier – Integral dargestellt werden. Die Fourier – Darstellung von  $x(t)$  heiße  $y(t)$  und ist gegeben durch (Bronstein [10])

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \tilde{x}(\omega) d\omega \quad (3.21)$$

$$\tilde{x}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} x(t) dt \quad (3.22)$$

$y(t)$  ist quasi eine Darstellung von  $x(t)$  durch eine Fourierreihe mit unendlich vielen Summanden und stetig variierender Frequenz  $\omega$ .  $\tilde{x}(t)$  ist die Fourier – Transformation von  $x(t)$  und  $y(t)$  die Umkehrung der Transformation. Voraussetzung für die Gültigkeit der Transformationsbeziehungen ist, daß  $x(t)$  die Dirichlet’schen Bedingungen erfüllt, also in beliebige viele endliche Intervalle teilbar ist, in denen  $x(t)$  stetig und monoton ist; an Unstetigkeitsstellen müssen  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t - \varepsilon)$  bzw.  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t + \varepsilon)$  definiert sein. Als weitere Voraussetzung muß das Integral  $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt$  existieren. Dann ist  $y(t)$  identisch  $x(t)$ .

#### Gültigkeit der Fouriertransformation von Zufallsprozessen

Die Gültigkeit obiger Beziehungen im Sinne des quadratischen Mittels soll nun für Zufallsprozesse bewiesen werden. Zu zeigen ist, daß für zwei Zufallsprozesse  $X(t)$  und  $Y(t)$ ,

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \tilde{X}(\omega) d\omega \quad (3.21a)$$

$$\tilde{X}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} X(t) dt \quad (3.22a)$$

die Mittelwertfunktionen  $E[Y(t)] = E[X(t)]$  und daß der Erwartungswert des Fehlerquadrats

$$\begin{aligned} E[|X(t) - Y(t)|^2] &= 0 \\ E[X(t)X^*(t) + Y(t)Y^*(t) - X^*(t)Y(t) - X(t)Y^*(t)] &= 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

ist. Der Stern bezeichnet die konjugiert Komplexe einer Größe.  $i$  ist die imaginäre Einheit,  $i = \sqrt{-1}$ . Die Äquivalenz der Mittelwertfunktionen ergibt sich einfach durch Erwartungswertbildung der Gleichungen (3.21a) und (3.22a), sie werden damit zur Fouriertransformation und ihrer Umkehrung der deterministischen Funktion  $E[X(t)]$ . In Papoulis [62, Abschnitt 12-3] finden sich Hinweise zum Beweis von Gl. (3.23) für die diskrete Karhunen – Loève – Reihenentwicklung von  $X(t)$ . Der Beweis wird hier für den speziellen Fall der Fourier – Reihe ausführlicher dargestellt, daraus werden die Parameter der Fourier – Koeffizienten hergeleitet.

Für den Beweis wird hier  $X(t)$  zunächst durch eine diskrete Reihenentwicklung dargestellt.

$$Y_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{X}_n \phi_n(t) \quad (3.24)$$

mit

$$\tilde{X}_n = \int_{-T/2}^{T/2} X(t) \phi_n(t) dt \quad (3.25)$$

und den Ansatzfunktionen

$$\phi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{i\omega_n t} \quad (3.26)$$

$X(t)$  und  $Y(t)$  seien im endlichen Intervall  $(-T/2; T/2)$  definiert. Anschließend wird der Grenzübergang für  $T \rightarrow \infty$  betrachtet.

Die Ansatzfunktionen sind im Intervall  $(-T/2; T/2)$  orthonormal

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{i\omega_m t} e^{-i\omega_n t} dt = \delta_{mn} \quad (3.27)$$

und es gilt die Integralgleichung

$$\int_{-T/2}^{T/2} r_{XX}(t_1, t_2) e^{i\omega t_2} dt_2 = \lambda e^{i\omega t_1} \quad ; \quad t_1 \in (-T/2; T/2) \quad (3.28)$$

und außerdem

$$r_{XX}(t, t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n |e^{i\omega_n t}|^2 = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n \quad ; \quad t \in (-T/2; T/2) \quad (3.29)$$

Nun wird  $\frac{1}{T} = \frac{\Delta\omega}{2\pi}$  gesetzt, für  $T \rightarrow \infty$  wird  $\Delta\omega \rightarrow d\omega$  und die Summation Gl. (3.24) wird ein Integral über  $d\omega$ :

$$Y(t_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t_1} \int_{-\infty}^{\infty} X(t_2) e^{i\omega t_2} dt_2 d\omega \quad (3.24a)$$

Aus Gl. (3.29) wird

$$r_{XX}(t, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\omega) d\omega \quad (3.29a)$$

und Gl. (3.28) bleibt bis auf die Integrationsgrenzen unverändert:

$$\int_{-\infty}^{\infty} r_{XX}(t_1, t_2) e^{i\omega_n t_2} dt_2 = \lambda(\omega) e^{i\omega_n t_1} \quad (3.28a)$$

Für die Ansatzfunktionen gilt außerdem (Lin, 1976 [49])

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_1 t} e^{-i\omega_2 t} dt = 2\pi \delta(\omega_2 - \omega_1) \quad (3.30)$$

Unter Ausnutzung der Beziehungen Gln. (3.28a), (3.29a), (3.30) lassen sich die folgen-

den Erwartungswerte herleiten:

$$\begin{aligned}
 E[\tilde{X}(\omega_1)\tilde{X}^*(\omega_2)] &= E\left[\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(t_1) e^{-i\omega_1 t_1} X^*(t_2) e^{i\omega_2 t_2} dt_1 dt_2\right] \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} r_{XX}(t_1, t_2) e^{-i\omega_1 t_1} e^{i\omega_2 t_2} dt_1 dt_2 \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \lambda(\omega_2) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_1 t_1} e^{i\omega_2 t_1} dt_1 \\
 &= \frac{1}{2\pi} \lambda(\omega_2) \delta(\omega_1 - \omega_2)
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned}
 E[X(t_1)\tilde{X}^*(\omega)] &= E\left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(t_1) X^*(t_2) e^{i\omega t_2} dt_2\right] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r_{XX}(t_1, t_2) e^{i\omega t_2} dt_2 \\
 &= \frac{1}{2\pi} \lambda(\omega) e^{i\omega t_1}
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned}
 E[X^*(t_1)\tilde{X}(\omega)] &= E\left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(t_1) X(t_2) e^{-i\omega t_2} dt_2\right] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r_{XX}^*(t_1, t_2) e^{-i\omega t_2} dt_2 \\
 &= \frac{1}{2\pi} \lambda(\omega) e^{-i\omega t_1}
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

Damit kann man die Terme der ausmultiplizierten Gl. (3.23) ermitteln:

$$E[X(t)X^*(t)] = r_{XX}(t, t) \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned}
E[Y(t)Y^*(t)] &= E\left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_1 t} \tilde{X}(\omega_1) e^{-i\omega_2 t} \tilde{X}^*(\omega_2) d\omega_1 d\omega_2\right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\omega_2) \delta(\omega_1 - \omega_2) e^{i\omega_1 t} e^{-i\omega_2 t} d\omega_1 d\omega_2 \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\omega) d\omega \\
&= r_{XX}(t, t)
\end{aligned} \tag{3.35}$$

$$\begin{aligned}
E[X^*(t)Y(t)] &= E\left[\int_{-\infty}^{\infty} X^*(t) \tilde{X}(\omega) e^{i\omega t} d\omega\right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\omega) e^{-i\omega t} e^{i\omega t} d\omega \\
&= r_{XX}(t, t)
\end{aligned} \tag{3.36}$$

$$\begin{aligned}
E[X(t)Y^*(t)] &= E\left[\int_{-\infty}^{\infty} X(t) \tilde{X}^*(\omega) e^{-i\omega t} d\omega\right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\omega) e^{i\omega t} e^{-i\omega t} d\omega \\
&= r_{XX}(t, t)
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Der Beweis von Gl. (3.23) ist erbracht, wenn man die Terme der Gleichungen (3.34) bis (3.37) einsetzt.

Bisher wurden keine Annahmen zur Stationarität von  $X(t)$  getroffen, das heißt auch für instationäre Prozesse ist prinzipiell eine Darstellung durch das Fourier – Integral möglich. Im weiteren wird  $X(t)$  als ein im erweiterten Sinn stationärer Prozeß angesehen, d.h. es seien  $E[X(t)] = \mu_X = \text{const}$  und  $E[X(t)X^*(t + \tau)] = r_{XX}(\tau)$ . Damit folgt aus Gl. (3.28a) ebenso wie aus Gl. (3.29a)

$$\lambda(\omega) = 2\pi s_{XX}(\omega) \tag{3.38}$$

Mittelwerts- und Autokorrelationsfunktion von  $\tilde{X}(\omega)$  ergeben sich aus den Gleichungen (3.22a) und (3.31) wie folgt.

$$E[\tilde{X}(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \mu_X \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dt = \mu_X \delta(\omega) \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} E[\tilde{X}(\omega_1) \tilde{X}^*(\omega_2)] &= \frac{1}{2\pi} \lambda(\omega_2) \delta(\omega_1 - \omega_2) \\ &= s_{XX}(\omega_2) \delta(\omega_1 - \omega_2) \end{aligned} \quad (3.40)$$

Das bedeutet, daß die  $\tilde{X}(\omega)$  für verschiedene  $\omega$  paarweise unkorreliert sind und ihre Varianzen  $\sigma_{\tilde{X}}^2(\omega) = s_{XX}(\omega) \delta(0)$  vom Leistungsspektrum des Prozesses  $X(t)$  abhängen. Hieraus begründet sich der Begriff der „spektralen Darstellung“ von  $X(t)$ .

Ist  $X(t)$  nun ein im erweiterten Sinn stationärer, reellwertiger Prozeß mit Mittelwert  $\mu_X = 0$ , dann ist seine spektrale Darstellung

$$\begin{aligned} \tilde{X}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(t) \cos \omega t dt - i \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(t) \sin \omega t dt \\ &= \operatorname{Re}(\tilde{X}(\omega)) + i \operatorname{Im}(\tilde{X}(\omega)) \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} Y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} [\cos \omega t + i \sin \omega t] [\operatorname{Re}(\tilde{X}(\omega)) + i \operatorname{Im}(\tilde{X}(\omega))] d\omega \\ &= \int_0^{\infty} A(\omega) \cos \omega t d\omega + \int_0^{\infty} B(\omega) \sin \omega t d\omega \end{aligned} \quad (3.42)$$

wobei berücksichtigt wurde, daß das Integral von  $-\infty$  bis  $+\infty$  über ein Produkt aus einer in  $\omega$  geraden und einer ungeraden Funktion gleich Null ist. Die Integrationsgrenzen können geändert werden, weil  $\operatorname{Re}(\tilde{X}(\omega)) \cos \omega t$  und  $\operatorname{Im}(\tilde{X}(\omega)) \sin \omega t$  gerade bezüglich  $\omega$  sind. In Gl. (3.42) sind

$$A(\omega) = 2 \operatorname{Re}(\tilde{X}(\omega)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(t) \cos \omega t dt \quad (3.43)$$

$$B(\omega) = -2 \operatorname{Im}(\tilde{X}(\omega)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(t) \sin \omega t dt \quad (3.44)$$

mit den statistischen Momenten

$$E[A(\omega)] = \frac{1}{\pi} \mu_X \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega t \, dt = 0 \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} E[A(\omega_1)A(\omega_2)] &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} r_{XX}(t_2 - t_1) \cos \omega_1 t_1 \cos \omega_2 t_2 \, dt_1 \, dt_2 \\ &= 2 \operatorname{Re} (E[\tilde{X}(\omega_1)\tilde{X}^*(\omega_2)]) + 2 \operatorname{Re} (E[\tilde{X}(\omega_1)\tilde{X}^*(-\omega_2)]) \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$E[B(\omega)] = \frac{1}{\pi} \mu_X \int_{-\infty}^{\infty} \sin \omega t \, dt = 0 \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} E[B(\omega_1)B(\omega_2)] &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} r_{XX}(t_2 - t_1) \sin \omega_1 t_1 \sin \omega_2 t_2 \, dt_1 \, dt_2 \\ &= 2 \operatorname{Re} (E[\tilde{X}(\omega_1)\tilde{X}^*(\omega_2)]) - 2 \operatorname{Re} (E[\tilde{X}(\omega_1)\tilde{X}^*(-\omega_2)]) \end{aligned} \quad (3.48)$$

Aus Gl. (3.31) ist ersichtlich, daß  $E[\tilde{X}(\omega_1)\tilde{X}^*(-\omega_2)] = 0$  für  $\omega_1, \omega_2 \neq 0$ . In diesem Fall werden die Autokorrelationsfunktionen zu

$$E[A(\omega_1)A(\omega_2)] = E[B(\omega_1)B(\omega_2)] = 2s_{XX}(\omega_2) \delta(\omega_1 - \omega_2) \quad (3.49)$$

und die Kreuzkorrelationsfunktion von  $A(\omega), B(\omega)$  ist

$$\begin{aligned} E[A(\omega_1)B(\omega_2)] &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(t_1)X(t_2) \cos \omega_1 t_1 \sin \omega_2 t_2 \, dt_1 \, dt_2 \\ &= 2 \operatorname{Im} (E[\tilde{X}(\omega_1)\tilde{X}^*(\omega_2)]) + 2 \operatorname{Im} (E[\tilde{X}(-\omega_1)\tilde{X}^*(\omega_2)]) \\ &= 0 \quad \forall \omega_1, \omega_2 \end{aligned} \quad (3.50)$$

Die letzte Zeile von Gl. (3.50) folgt aus Gl. (3.40) und der Tatsache, daß  $s_{XX}(\omega)$  reell ist.

Ist der Prozeß  $X(t)$  normalverteilt, dann sind das auch  $A(\omega)$  und  $B(\omega)$ , da die Integrationen in Gln.(3.43), (3.44) eine Summe normalverteilter Zufallsvariablen darstellen. Somit sind alle  $A(\omega), B(\omega)$  identisch verteilt und alle  $A(\omega_1), A(\omega_2 \neq \omega_1)$ , ebenso  $B(\omega_1), B(\omega_2 \neq \omega_1)$  und  $A(\omega_1), B(\omega_2)$  paarweise unkorreliert (und wegen der Normalverteilung auch voneinander unabhängig). Da  $Y(t)$  stets einen Mittelwert von Null hat, muß dies auch von  $X(t)$  gefordert werden, damit die spektrale Darstellung  $Y(t)$  den Originalprozeß  $X(t)$  eindeutig repräsentiert. Ist  $\mu_X \neq 0$ , so ist vor Ermittlung des Spektrums  $s_{XX}(\omega)$  der Mittelwert abzuziehen. Zur rechten Seite von Gl. (3.42) wird dann  $\mu_X$  wieder hinzuaddiert, zur Ermittlung von  $E[Y(t)Y^*(t)]$ , Gl. (3.35) ist  $\mu_X^2$  zu addieren.



Aus den bisherigen Ausführungen wird deutlich, daß die spektrale Darstellung  $Y(t)$  eines Prozesses  $X(t)$  selbst zufällige Parameter besitzt. Sie kann also nicht mit einer Hin- und Rücktransformation einer deterministischen Funktion verglichen werden. Vielmehr stellen  $Y(t)$  und  $X(t)$  Zufallsprozesse dar, die in den statistischen Momenten bis zur zweiten Ordnung äquivalent sind. Im Falle normal verteilter Prozesse haben  $Y(t)$  und  $X(t)$  identische statistische Eigenschaften.

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz der Fourier – Transformaten von  $X(t)$ ,  $\tilde{X}(\omega)$  ist die Integrierbarkeit von Gl. (3.31), es muß gelten  $E[\tilde{X}(\omega_1)\tilde{X}^*(\omega_2)] < \infty$ . Lin (1976) [49] zeigt, daß diese Bedingung für stationäre Prozesse nicht erfüllt ist, wenn die Integrationsgrenzen in Gl. (3.31)  $\pm\infty$  sind. Er schlägt vor, die Korrelationsfunktion auf die Länge des Integrationsbereichs zu normieren. Damit ergibt sich für die Varianz von  $\tilde{X}(\omega)$  z.B.  $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\pi}{T} E[|\tilde{X}(\omega)|^2] = s_{XX}(\omega)$ . Hier wurde das Integral Gl. (3.31) durch die Einführung der Dirac’schen Deltafunktion formal gelöst, wodurch die weiteren Entwicklungen möglich wurden. Es ist jedoch zu beachten, daß  $\tilde{X}(\omega)$ ,  $A(\omega)$  und  $B(\omega)$  nach wie vor unendliche Varianzen aufweisen.

### Fourier – Stieltjes Transformation

Eine andere in der Literatur häufig anzutreffende Darstellung eines mittelwertfreien WSS – Prozesses  $X(t)$  ist das Fourier – Stieltjes – Integral

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ(\omega) \quad (3.51)$$

Stieltjes – Integrale sind insofern allgemeiner als die bisher verwendeten Riemann – Integrale, als daß  $Z(\omega)$  nicht differenzierbar sein muß. Ein weiterer Vorteil dieser Darstellung ist hier, daß die Dirac’sche Deltafunktion entfällt und ein einfacherer Übergang zur Simulationsformel möglich ist. Ist  $Z(\omega)$  differenzierbar, folgt aus

$$dZ(\omega) = \tilde{X}(\omega) d\omega \quad (3.52)$$

die Gleichung Gl. (3.21a), bzw. es gilt

$$Z(\omega) = \int_0^{\omega} \tilde{X}(w) dw \quad (3.53)$$

Mit Gl. (3.39) ergibt sich der Mittelwert von  $Z(\omega)$  zu

$$\begin{aligned}
 E[Z(\omega)] &= E\left[\int_0^{\omega} \tilde{X}(w) dw\right] \\
 &= \int_0^{\omega} \mu_X \delta(w) dw \\
 &= \mu_X \omega \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

Die Kovarianz von  $Z(\omega)$  läßt sich mit Hilfe von Gl. (3.40) herleiten, zunächst für den Fall  $0 \leq \omega_1 \leq \omega_2$ :

$$\begin{aligned}
 E[Z(\omega_1)Z^*(\omega_2)] &= E\left[\int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_2} \tilde{X}(w_1)\tilde{X}(w_2) dw_1 dw_2\right] \\
 &= \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_2} s_{XX}(w_1) \delta(w_2 - w_1) dw_1 dw_2 \\
 &= \int_0^{\omega_2} s_{XX}(w_2) (H(w_2) - H(w_2 - \omega_1)) dw_2 \\
 &= \int_0^{\omega_2} s_{XX}(w_2) dw_2 - \int_{\omega_1}^{\omega_2} s_{XX}(w_2) dw_2 \\
 &= \int_0^{\omega_1} s_{XX}(w_2) dw_2
 \end{aligned} \tag{3.55}$$

Hierin ist  $H(\cdot)$  die Heaviside – Funktion. Betrachtet man analog den Fall  $0 \leq \omega_2 \leq \omega_1$ , ergibt sich insgesamt, wegen  $s_{XX}(w_1) \delta(w_2 - w_1) = s_{XX}(w_2) \delta(w_1 - w_2)$

$$E[Z(\omega_1)Z^*(\omega_2)] = \int_0^{\min(\omega_1, \omega_2)} s_{XX}(w) dw \tag{3.56}$$

Für die Ermittlung der Momente von  $dZ(\omega)$  wird  $dZ(\omega) = Z(\omega + d\omega) - Z(\omega)$  gesetzt. Damit sind

$$E[dZ(\omega)] = E[Z(\omega + d\omega) - Z(\omega)] = 0 \tag{3.57}$$

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}[dZ^*(\omega_1)dZ(\omega_2)] \\
&= \mathbb{E}[(Z(\omega_1 + d\omega) - Z(\omega_1))(Z^*(\omega_2 + d\omega) - Z^*(\omega_2))] \\
&= \mathbb{E}[Z(\omega_1 + d\omega)Z^*(\omega_2 + d\omega) - Z(\omega_1 + d\omega)Z^*(\omega_2) \\
&\quad - Z(\omega_1)Z^*(\omega_2 + d\omega) + Z(\omega_1)Z^*(\omega_2)] \\
&= \begin{cases} 0, & \text{wenn } \omega_1 \neq \omega_2 \text{ und } \omega_1 + d\omega < \omega_2 \\ \int_0^{\omega+\Delta\omega} s_{XX}(w) dw - \int_0^{\omega} s_{XX}(w) dw \approx s_{XX}(\omega) \Delta\omega, & \text{wenn } \omega_1 = \omega_2 \end{cases} \quad (3.58)
\end{aligned}$$

Aufgrund dieser Eigenschaft, daß die Varianz von  $dZ(\omega)$  nur ungleich Null ist wenn  $\omega_1 = \omega_2$  ist, bezeichnet man  $Z(t)$  als einen Prozeß mit orthogonalen Inkrementen.

Ist  $X(t)$  ein reellwertiger Prozeß, dann gibt es eine Fourier – Stieltjes – Darstellung analog Gl. (3.42)

$$Y(t) = \int_0^{\infty} \cos \omega t dU(\omega) + \int_0^{\infty} \sin \omega t dV(\omega) \quad (3.59)$$

Sind  $dU(\omega)$  und  $dV(\omega)$  differenzierbar, dann sind

$$dU(\omega) = A(\omega)d\omega \quad (3.60)$$

$$dV(\omega) = B(\omega)d\omega \quad (3.61)$$

mit  $A(\omega)$  und  $B(\omega)$  aus Gln. (3.43), (3.44). Analog der Herleitung der statistischen Momente von  $dZ(\omega)$  mit Hilfe von  $X(\omega)$  lassen sich die Parameter von  $dU(\omega)$ ,  $dV(\omega)$  aus  $A(\omega)$ ,  $B(\omega)$  herleiten.

$$\mathbb{E}[dU(\omega)] = \mathbb{E}[dV(\omega)] = 0 \quad (3.62)$$

$$\mathbb{E}[dU^2(\omega)] = \mathbb{E}[dV^2(\omega)] = 2s_{XX}(\omega)d\omega \quad (3.63)$$

$$\mathbb{E}[dU(\omega_1)dU(\omega_2)] = \mathbb{E}[dV(\omega_1)dV(\omega_2)] = 0, \quad \omega_1 \neq \omega_2 \quad (3.64)$$

$$\mathbb{E}[dU(\omega_1)dV(\omega_2)] = 0 \quad \forall \omega \quad (3.65)$$

Wenn  $X(t)$  normalverteilt ist, sind ebenso wie  $A(\omega)$  und  $B(\omega)$  auch  $dU(\omega)$  und  $dV(\omega)$  normalverteilt. Daraus und aus obigen Mittelwerten und Kovarianzen ist ersichtlich, daß alle  $dU(\omega)$ ,  $dV(\omega)$  paarweise unabhängig und identisch verteilt sind.

Während also in der Darstellung mit Riemann – Integralen, Gln. (3.21a), (3.42), die Momente der Fouriertransformierten  $X(\omega)$  bzw.  $A(\omega)$  und  $B(\omega)$  die Dirac – Delta – Funktion beinhalten, tritt an deren Stelle der Differentialausdruck  $d\omega$  bei der Ermittlung der Momente von  $dZ(\omega)$ ,  $dU(\omega)$  und  $dV(\omega)$  in der Fourier – Stieltjes Darstellung. Für die Simulation werden die Differentialausdrücke näherungsweise durch Differenzenausdrücke ersetzt, wie im folgenden Abschnitt gezeigt wird.

In der praktischen Anwendung der spektralen Darstellung von Prozessen wird oft das sogenannte einseitige Leistungsspektrum

$$g_{XX}(\omega) = 2s_{XX}(\omega) \quad , \quad \omega > 0 \quad (3.66)$$

verwendet, weil negative Frequenzen keine physikalische Bedeutung haben.

### 3.3.2 Simulation im Frequenzbereich

#### Herleitung der Simulationsmodelle

Gegeben sei ein stationärer, reellwertiger und normalverteilter Prozeß  $X(t)$  mit Mittelwert  $\mu_X = 0$  und vorgegebenem einseitigen Leistungsspektrum  $g_{XX}(\omega)$ . Das Modell für die Simulation dieses Prozesses ergibt sich aus einer näherungsweise, diskreten Darstellung des Fourier – Stieltjes Integrals Gl. (3.59). Eine Näherung besteht in der Beschränkung des Integrationsbereichs. Die obere „Trennfrequenz“  $\hat{\omega}$  wird so gewählt, daß die Varianz von  $X(t)$  möglichst erhalten bleibt.

$$\int_0^{\hat{\omega}} g_{XX}(\omega) d\omega \approx r_{XX}(0) \quad (3.67)$$

Der nächste Schritt ist die Diskretisierung des betrachteten Frequenzbereichs in  $n$  nicht überlappende Bänder beliebiger Breite  $\Delta\omega_k$ , so daß  $\hat{\omega} = \sum_{k=1}^n \Delta\omega_k$ , und die Auswahl einer repräsentativen Frequenz  $\omega_k$  für jedes Frequenzband, z.B. die jeweils mittlere Frequenz. Die minimale Frequenz  $\omega_1$  muß  $\omega_1 > 0$  sein. Damit werden aus den Differentialausdrücken  $dU(\omega)$ ,  $dV(\omega)$  Differenzen  $\Delta U_k$ ,  $\Delta V_k$  und das Integral Gl. (3.59) wird zur Summation von Sinus- und Kosinustermen

$$Y_n(t) = \sum_{k=1}^n \Delta U_k \cos \omega_k t + \Delta V_k \sin \omega_k t \quad (3.68)$$

Entsprechend Gln. (3.62) ff. sind alle  $\Delta U_k$ ,  $\Delta V_k$  paarweise voneinander unabhängig und normalverteilt mit

$$E[\Delta U_k] = E[\Delta V_k] = 0 \quad (3.69)$$

$$E[\Delta U_k^2] = E[\Delta V_k^2] = \sigma_k^2 \quad (3.70)$$

wobei der Parameter  $\sigma_k^2$  der Fläche unter dem Leistungsspektrum im Frequenzband  $k$  entspricht:

$$\sigma_k^2 = \int_{\Delta\omega_k} g_{XX}(\omega) d\omega \approx g_{XX}(\omega_k) \Delta\omega_k \quad (3.71)$$

Üblicherweise werden  $\Delta U_k$ ,  $\Delta V_k$  als Produkt ihrer Standardabweichung  $\sigma_k$  mit *standardnormal* – verteilten Variablen  $A_k$ ,  $B_k$  (d.h.  $\mu_{A_k} = \mu_{B_k} = 0$ ,  $\sigma_{A_k} = \sigma_{B_k} = 1$ ) erzeugt, vgl. Soong, Grigoriu [80, Abschnitt 8.2.2]. Alle  $A_k$ ,  $B_k$  sind wiederum paarweise voneinander unabhängig. Mit

$$\Delta U_k = \sigma_k A_k \quad (3.72)$$

$$\Delta V_k = \sigma_k B_k \quad (3.73)$$

folgt

$$Y_n(t) = \sum_{k=1}^n \sigma_k (A_k \cos \omega_k t + B_k \sin \omega_k t) \quad (3.74)$$

Gleichung (3.74) kann äquivalent umgeformt werden zu

$$Y_n(t) = \sum_{k=1}^n C_k \cos(\omega_k t + \Psi_k) \quad (3.75)$$

Hierbei folgen  $C_k = \sqrt{\Delta U_k^2 + \Delta V_k^2}$  und  $\tan \Psi_k = \Delta U_k / \Delta V_k$  aus einer Transformation von  $\Delta U_k$  und  $\Delta V_k$  in Polarkoordinaten. Daraus läßt sich zeigen (vgl. Plate [64, S. 205ff.]), daß die  $C_k$  der Rayleigh – Verteilung folgen mit

$$E[C_k] = \sigma_k \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (3.76)$$

$$E[C_k^2] = \sigma_k^2 \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \quad (3.77)$$

und die Phasenwinkel  $\Psi_k$  gleichverteilt sind über das Intervall  $[-\pi, \pi)$ . Die Amplituden und Phasenwinkel sind untereinander und voneinander paarweise unabhängig.

Ein anderes Simulationsmodell erhält man, indem man  $dU_k$  und  $dV_k$  in Gl. (3.59) definiert als (Shinozuka, 1972, [75])

$$dU(\omega) = \sqrt{2g_{XX}(\omega)} d\omega \cos \Psi \quad (3.78)$$

$$dV(\omega) = \sqrt{2g_{XX}(\omega)} d\omega \sin \Psi \quad (3.79)$$

wobei die Winkel  $\Psi$  gleichverteilt sind über das Intervall  $[0, 2\pi)$ . Die statistischen Momente erster und zweiter Ordnung nach Gln. (3.62) ff. sind mit dieser Definition erfüllt. Bei der Diskretisierung für die Simulation verwendet man, mit dem Parameter  $\sigma_k$  aus Gl. (3.71), die Variablen  $\Delta U_k$  und  $\Delta V_k$  nach Gln. (3.80) und (3.81).

$$\Delta U_k = \sqrt{2}\sigma_k \cos \Psi_k \quad (3.80)$$

$$\Delta V_k = \sqrt{2}\sigma_k \sin \Psi_k \quad (3.81)$$

Die Simulationsformel ist damit

$$\begin{aligned} Z_n(t) &= \sqrt{2} \sum_{k=1}^n \sigma_k (\cos \omega_k t \cdot \cos \Psi_k + \sin \omega_k t \cdot \sin \Psi_k) \\ &= \sqrt{2} \sum_{k=1}^n \sigma_k \cos(\omega_k t + \Psi_k) \end{aligned} \quad (3.82)$$

Dieses Modell hat also nur noch zufällige Phasenwinkel, aber deterministische Amplituden. Es erfordert deshalb die Generierung von nur halb so viel Zufallsvariablen wie Modell  $Y_n(t)$ .

### Diskussion der Simulationsmodelle

Beide Simulationsmodelle, Gln. (3.74) bzw. (3.75) und Gl. (3.82), werden bereits 1944 bei Rice [70] erwähnt. Ihre statistischen Eigenschaften werden u.a. von Shinozuka und Jan, 1972 [79], Shinozuka und Deodatis, 1991 [78] und Grigoriu, 1993 [32] behandelt. Yang, 1973 [96] und Grigoriu, 1986 [30] beschäftigen sich mit der Genauigkeit der simulierten Prozesse. Die Eigenschaften der beiden Modelle werden im folgenden zusammengefaßt wiedergegeben.

$Y_n(t)$  und  $Z_n(t)$  haben die gleichen Mittelwerts- und Korrelationsfunktionen. Ihre Herleitung erfolgt unter Ausnutzung der Unabhängigkeit der Zufallsvariablen und einiger Eigenschaften trigonometrischer Funktionen.

$$E[Y_n(t)] = E[Z_n(t)] = 0 \quad (3.83)$$

$$E[Y_n(t)Y_n(t + \tau)] = E[Z_n(t)Z_n(t + \tau)] = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2 \cos \omega_k \tau \quad (3.84)$$

Shinozuka und Deodatis [78] zeigen, daß die Korrelationsfunktion für  $n \rightarrow \infty$  gegen die des Originalprozesses  $X(t)$  strebt. Das wird deutlich, betrachtet man die Wiener – Khintchine – Beziehungen unter Ausnutzung der Tatsache, daß  $s_{XX}(\omega)$  reell und gerade ist

$$r_{XX}(\tau) = \int_0^{\infty} g_{XX}(\omega) \cos \omega \tau \, d\omega \quad (3.85)$$

und setzt man die Definition von  $\sigma_k$  aus Gl. (3.71) in Gl. (3.84) ein. Das Konvergenzverhalten hängt von der Diskretisierung des Spektrums ab. Konvergenzkriterium sei die

Differenz der Korrelationsfunktionen des Originalprozesses mit einem bei  $\hat{\omega}$  beschnittenen Leistungsspektrum zur Korrelationsfunktion des simulierten Prozesses.

$$\varepsilon = \int_0^{\hat{\omega}} 2s_{XX}(\omega) \cos \omega \tau d\omega - \sum_{k=1}^n 2s_{XX}(\omega_k) \cos \omega_k \tau \Delta\omega_k \quad (3.86)$$

Wird das Spektrum gleichmäßig diskretisiert mit  $\Delta\omega = const$  und  $\omega_k = k \cdot \Delta\omega$ , ist diese Differenz proportional  $1/n$ . Bei einer Diskretisierung  $\omega_k = k \cdot \Delta\omega - \Delta\omega/2$  dagegen ist die Differenz proportional  $1/n^2$ . Die zweite Variante hat aber den entscheidenden praktischen Nachteil, daß die Verwendung der schnellen Fouriertransformation, s. Seite 60, nicht möglich ist.

$Y_n(t)$  stellt eine Summe normalverteilter Zufallsvariablen dar und ist deshalb selbst normalverteilt. Für  $Z_n(t)$  kann die Normalverteilung nur im Sinne des zentralen Grenzwertsatzes für  $n \rightarrow \infty$  angenommen werden (Shinozuka und Deodatis, 1991 [78]). Viele statistische Eigenschaften, z.B. die Verteilung, Konvergenzverhalten, lassen sich nur unter Annahme der Normalverteilung angeben. Yang (1973 [96]) schlägt ein numerisches Verfahren vor, um die Konvergenz gegen die Normalverteilung zu studieren, das von Shinozuka und Deodatis [78] aufgegriffen wurde. Hierfür wird die charakteristische Funktion des simulierten Prozesses  $Z_n(t)$  verwendet, die einerseits definiert ist als

$$\zeta(\mathbf{v}) = E[e^{i\mathbf{v}Z_n(t)}] \quad (3.87)$$

Die charakteristische Funktion kann wegen der Gleichverteilung und Unabhängigkeit der Zufallsvariablen in Gl. (3.82) als explizite Formel angeschrieben werden. Sie hängt von der Zahl der Variablen  $n$  ab. Andererseits stellt sie eine Fouriertransformation der Dichtefunktion  $f_{Z_n}(z)$  dar. Durch Vorgabe von  $n$  lassen sich diskrete Werte der charakteristischen Funktion berechnen und durch inverse Fourier – Transformation erhält man Werte der Dichtefunktion. Auf diese Weise wurden von Shinozuka und Deodatis [78] Werte der Verteilungsfunktion  $1 - F_{Z_n}(z)$  bestimmt und der Gauß – Verteilung gegenübergestellt. Es zeigt sich, daß die Konvergenz mit  $n \uparrow$  für größere Werte  $z$  langsamer ist als für  $z \rightarrow 0$ , wobei gerade die Randbereiche für Zuverlässigkeitsbeurteilungen von Interesse sind.

Ein weiterer Nachteil des Modells Gl. (3.84), der bei Erstüberschreitensproblemen relevant ist, besteht in der Beschränktheit des Wertebereichs von  $Z(t)$ . Nach Soong, Grigoriu [80] ist

$$Z_n(t) \leq \sqrt{2} \sum_{k=1}^n \sigma_k \quad (3.88)$$

Die Wertebereichsgrenze ist bei gleichmäßiger Diskretisierung des Spektrums  $\Delta\omega = const$  proportional  $\sqrt{n}$ .

Grigoriu, 1986 [30] stellt Betrachtungen der Genauigkeit des simulierten Prozesses

anhand von spektralen Momenten an. Ein spektrales Moment ist definiert als

$$\lambda_m = \int_0^{\infty} \omega^m g_{XX}(\omega) d\omega \quad , \quad l \geq 0 \quad (3.89)$$

Beispielsweise ist die Varianz das spektrale Moment der Ordnung  $m = 0$ . Betrachtet werden mittlere Überschreitensraten über vorgegebene Schranken  $\hat{z}$  für verschiedene vorgegebene Fehler in den spektralen Momenten. Die Abweichungen zwischen den simulierten und exakten Überschreitensraten wachsen überlinear mit der Schranke  $\hat{z}$  an und werden hauptsächlich von Fehlern in der Varianz beeinflusst. Dient der simulierte Prozeß als Anregung eines Einmassenschwingers und betrachtet man die mittleren Überschreitensraten der Strukturantwort, gibt es weitere Einflußgrößen. Die Abweichungen wachsen mit der Dämpfung des Systems (die eine größere Bandbreite der Strukturantwort bewirkt) und mit dem Diskretisierungsparameter  $\Delta\omega$ . Bei letzterem Kriterium kommt es auch darauf an, wie nah die Anregungsfrequenzen an der Resonanzfrequenz des Systems liegen.

Modell  $Z_n(t)$  ist ergodisch bezüglich der Mittelwerts- und der Korrelationsfunktion. Das bedeutet, diese Funktionen können aus einer Realisation des Prozesses der Länge  $T$  als arithmetisches Mittel über alle Zeitpunkte geschätzt werden, vgl. Gln. (3.7), (3.8) und Abschnitt 3.4. Über die Ergodizität bezüglich höherer Momente bzw. der Verteilung ist in der zitierten Literatur nichts ausgesagt. Für Zuverlässigkeitsaussagen müssen auch höhere Momente des Prozesses ermittelt werden, um die Verteilung auch in den Randbereichen zu beschreiben. Auch muß der Datenumfang, also die Zahl der Zeitschritte genügend groß sein, um eine Schätzung mit akzeptabler Konfidenz zu ergeben. Da der entscheidende Aufwand in der Strukturanalyse liegt, dürfte der Vorteil der Ergodizität des Eingangsprozesses nicht entscheidend sein.

Modell  $Y_n(t)$  hat nicht diese Ergodizitätseigenschaften. Bildet man den Gln. (3.74) bzw. (3.75) entsprechende Schätzer für  $Y_n(t)$  und setzt darin Gl. (3.68) ein, verbleiben die zufälligen Amplituden, die zeitunabhängig, aber für jede Realisation des Prozesses verschieden sind. Grigoriu, 1993 [32] führt ein weiches Kriterium der Ergodizität ein. Ist der aus der Zeitreihe gewonnene Schätzer erwartungstreu und ist seine Varianz gleich Null, liegt quasi eine Ergodizität in Wahrscheinlichkeit vor. Die Varianz des Schätzers für den Mittelwert ist gleich Null, wenn der Integrationsbereich einer Periode des Prozesses  $Y_n(t)$  entspricht oder unendlich ist. Für Varianz und Korrelationsfunktion von  $Y_n(t)$  wird die Varianz des Schätzers nie gleich Null, strebt aber gegen Null für  $n \rightarrow \infty$  und  $T \rightarrow \infty$ .

Aus den vorstehend beschriebenen Eigenschaften ergeben sich gewisse Vor- und Nachteile beider Simulationsmodelle, so daß keins grundsätzlich vorzuziehen oder abzulehnen ist. Es scheint zunächst, daß Modell  $Z_n(t)$  mit den zufälligen Phasenwinkeln weniger Aufwand erfordert, da es bei gleicher Diskretisierung des Leistungsspektrums des Originalprozesses nur halb soviel Zufallsvariablen hat. Dieser Vorteil wird aber



relativiert, da man die Zahl der diskreten Frequenzbänder insbesondere bei Erstüberschreitensproblemen ausreichend hoch setzen muß, um den gewünschten Wertebereich abzudecken. Modell  $Y_n(t)$  bietet den Vorteil, daß es normalverteilt und im Wertebereich unbeschränkt ist, unabhängig von der Zahl der Variablen. Dafür muß man wegen der schlechteren Ergodizitätseigenschaften entsprechenden Aufwand treiben, d.h. entweder auch hier die Zahl der Variablen genügend hoch wählen, oder genügend viele Realisationen des Prozesses simulieren, um statistische Eigenschaften über das Ensemble zu ermitteln. Für Erstüberschreitensprobleme erscheint Modell  $Y_n(t)$  insgesamt geeigneter, denn wegen seines unbeschränkten Wertebereichs hat man auch mit relativ wenigen Variablen — unabhängig von der Genauigkeit des simulierten Prozesses — die Chance, Stichproben in den Extrembereichen der Verteilung zu generieren. Die zufälligen Amplituden hierin eröffnen darüber hinaus die Möglichkeit, varianzmindernde Verfahren wie z.B. *Importance Sampling* einzuführen, was bei Modell  $Z_n(t)$  nicht möglich ist.

### Anwendung der Diskreten Fouriertransformation

Die Simulation von Zeitreihen nach Gln. (3.74), (3.75) oder (3.82) erfolgt durch Generierung von Stichproben der jeweiligen Zufallsvariablen, also Amplituden oder Phasenwinkel. Daraus werden die Zeitreihen durch inverse Fouriertransformation aufgestellt, wie im folgenden erläutert wird. Die diskrete Fouriertransformation einer Zeitreihe und ihre Umkehrung sind nach Newland [58]

$$\tilde{x}_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{l=0}^{n-1} x_l \cdot e^{-i2\pi kl/n} \quad (3.90)$$

$$x_l = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{x}_k \cdot e^{i2\pi kl/n} \quad (3.91)$$

Hierbei ist  $x_l$  eine Folge zu diskreten Zeitpunkten  $t_l = l \cdot \Delta t$ ,  $\Delta t = \frac{T}{n}$ .  $\tilde{x}_k$  ist definiert bei diskreten Frequenzen  $\omega_k = k \cdot \Delta\omega$ ,  $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{n \cdot \Delta t}$ . Diese diskrete Darstellung entspricht einer abgeschnittenen Fourier – Reihenentwicklung von  $x(t)$ , wobei zur Ermittlung der Koeffizienten  $\tilde{x}_k$ , vgl. Gl. (3.22), das Integral näherungsweise durch die Trapezformel ersetzt wurde. Also hat Gl. (3.91) die äquivalente Darstellung

$$x_l = a_0 + \frac{2}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cos \frac{2\pi kl}{n} + b_k \sin \frac{2\pi kl}{n} \quad (3.92)$$

Gl. (3.92) entspricht dem Simulationsmodell  $Y_n(t_l)$  nach Gl. (3.74) zu diskreten Zeitpunkten  $t_l$ , mit  $a_0 = 0$ ,  $a_k = \sigma_k A_k$ ,  $b_k = \sigma_k B_k$  und einem zusätzlichen Vorfaktor  $\sqrt{n}/2$ . Setzt man dagegen  $a_0 = 0$ ,  $a_k = C_k \sin \Psi_k$ ,  $b_k = -C_k \cos \Psi_k$  und führt wiederum den

Faktor  $\sqrt{n}/2$  ein, folgt Gl. (3.75):

$$\begin{aligned} Y_n(t_l) &= \sum_{k=1}^{n-1} C_k \sin \Psi_k \cos \frac{2\pi kl}{n} - C_k \cos \Psi_k \sin \frac{2\pi kl}{n} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} C_k \cos \left( \frac{2\pi kl}{n} + \Psi_k \right) \end{aligned} \quad (3.93)$$

Ganz analog erhält man  $Z_n(t_l)$ , Gl. (3.82), mit  $a_0 = 0$ ,  $a_k = \sqrt{2}\sigma_k \sin \Psi_k$ ,  $b_k = -\sqrt{2}\sigma_k \cos \Psi_k$  und dem gleichen Vorfaktor.

Für die Durchführung der Simulation auf dem Rechner empfiehlt sich die Verwendung der Schnellen Fouriertransformation (abgekürzt FFT von *Fast Fourier Transform*), wodurch die Effizienz besonders bei hoher Zahl  $n$  an Zufallsvariablen wesentlich gesteigert wird. FFT ist heutzutage ein Standardalgorithmus, siehe z.B. Newland [58], Clough und Penzien [15]. Der Rechenzeitbedarf bei Verwendung von FFT ist proportional  $n \cdot \log n$ . Zum Vergleich: In Gln. (3.92), (3.93) sind für jede Frequenz  $\omega_k$  und jeden Zeitschritt  $t_l$  die trigonometrischen Funktionen auszuwerten, somit ist der Aufwand proportional  $n^2$ .

Für die Simulation verwendet man die inverse Fouriertransformation. Es sind also  $a_0$  und jeweils  $n - 1$  Reihenglieder  $a_k$  und  $b_k$  einzugeben, aus denen man eine Realisation der Zeitreihe erhält. Eine Besonderheit des FFT – Algorithmus liegt darin, daß die Zahl der Zeitschritte sich zu  $m = 2(n - 1)$  ergibt. Das Zeitintervall wird zu  $\Delta t = \frac{2\pi}{m \cdot \Delta \omega}$  gesetzt. Hiermit werden automatisch auch numerische Verfälschungen der Zeitreihe (sog. *aliasing*, vgl. Newland [58]) vermieden. Die Zeitreihe muß nun mit dem Vorfaktor  $\sqrt{m}/2$  skaliert werden, damit man z.B. die Form Gl. (3.93) erhält.

Der Ablauf der Simulation eines Zufallsprozesses ist — für das Simulationsmodell  $Y_n(t_l)$  nach Gl. (3.93) — zusammengefaßt wie folgt:

1. Nicht–weiße Prozesse werden oft durch ihr Leistungsspektrum charakterisiert, weißes Rauschen durch seine Intensität. Aus der Intensität ergibt sich das konstante Leistungsspektrum des weißen Rauschens zu  $g_{XX} = I/\pi$ .
2. Wahl der oberen Trennfrequenz  $\hat{\omega}$  und Diskretisierung des Leistungsspektrums. Bei Verwendung von FFT muß  $\Delta \omega = \text{constant}$  sein.
3. Aus diesen Vorgaben ergeben sich die Parameter  $\sigma_k^2$ , Gl. (3.71), womit die zufälligen Amplituden und Phasenwinkel definiert werden, Gln. (3.76) ff.
4. Simulation einer Stichprobe der Zufallsvektoren  $\{a_k\}_j$  und  $\{\psi_k\}_j$  vom Umfang  $N_{sim}$ .
5. Die Produkte  $\{a_k \cos \psi_k\}_j$  und  $\{-a_k \sin \psi_k\}_j$  finden Eingang in die inverse Fourier – Transformation, man erhält eine Stichprobe des diskreten Prozesses  $\{y_n(t_l)\}_j$ .

6. Die simulierten Zeitreihen dienen z.B. als Erregung eines mechanischen Systems, welches im Zeitbereich zu berechnen ist. Ergebnis wäre dann ein Stichprobe von Zeitreihen der Strukturantwort. Diese können dann statistisch ausgewertet werden, z.B. können daraus Zeitreihen oder Erstüberschreitenswahrscheinlichkeiten für Zuverlässigkeitsaussagen geschätzt werden, vgl. Abschnitt 3.4.

### 3.4 Auswertung der Strukturantwort

Die durch Monte Carlo Simulation generierte Stichprobe von Strukturantworten soll statistisch ausgewertet werden. Zum einen interessieren für eine globale Betrachtung des Systemverhaltens, etwa für Sensitivitätsuntersuchungen, die Verteilung der Strukturantwort oder deren statistische Momente. Zum anderen soll für Zuverlässigkeitsbetrachtungen die Wahrscheinlichkeit der ersten Überschreitung einer Schranke innerhalb eines bestimmten Zeitintervalls ermittelt werden.

Durch die Monte Carlo Simulation wird zunächst eine Stichprobe von Zeitreihen  $\{x_n(t_l)\}_j$ , z.B. nach den Modellen Gln. (3.74), (3.75) oder (3.82) generiert. Die Zeitreihe liegt nur zu diskreten Zeitpunkten  $t_l$  vor. Die Zahl der Zeitpunkte sei  $L$ , bzw. die Länge der Zeitreihe ist  $T = \sum_{l=1}^L t_l - t_{l-1}$  und hängt bei Simulationsmodellen basierend auf der spektralen Darstellung des Prozesses unter Verwendung von FFT von der Zahl der Zufallsvariablen  $n$  ab. Der Stichprobenumfang sei  $N$ , der Index  $j = 1, \dots, N$  bezeichnet jeweils eine Realisation der Zeitreihe. Die generierten Zeitreihen dienen als dynamische Erregung einer mechanischen Struktur, z.B. Bodenbeschleunigung. Ergebnis der Strukturanalyse ist eine Stichprobe von Strukturantworten  $\{y(t_l)\}_j$ .

Ist der Prozeß  $Y(t)$  ergodisch (und damit auch stationär), kann man, wie in Abschnitt 3.1 bereits erwähnt, statistische Parameter als arithmetisches Mittel über eine einzelne realisierte Zeitreihe schätzen. Der Schätzer für den Mittelwert ergibt sich aus der einfachen Formel

$$\bar{\mu}_j = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L y_j(t_l) \quad (3.94)$$

und die Varianz der Zeitreihe wird ermittelt aus

$$\bar{\sigma}_j^2 = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L (y_j(t_l) - \bar{\mu}_j)^2 \quad (3.95)$$

Formeln für andere statistische Momente ergeben sich analog.

Ein mit  $T \rightarrow \infty$  asymptotisch erwartungstreuer Schätzer für das Leistungsspektrum

von  $Y(t)$  ist das Periodogramm, das nach Papoulis [62, Abschnitt 13-2] definiert ist als

$$s_j(\omega) = \frac{1}{T} \left| \int_0^T y_j(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2 \approx s_{YY}(\omega) \quad (3.96)$$

Es wird für die diskrete Zeitreihe  $\{y(t_l)\}_j$  näherungsweise mit Hilfe von FFT ermittelt.

Zur Ermittlung der Verteilung von  $Y(t)$  wird für diskrete Werte  $\hat{y}$  die Wahrscheinlichkeit der Überschreitung ermittelt. Dafür wird ein Indikator eingeführt, wie folgt:

$$J_j(\hat{y}, t_l) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } y_j(t_l) \leq \hat{y} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.97)$$

Der Schätzer nach Grigoriu, 1993 [32] für die Verteilungsfunktion zum Wert  $\hat{y}$  ist damit

$$F_{Y_j}(\hat{y}) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L J_j(\hat{y}, t_l) \quad (3.98)$$

Auch wenn das Simulationsmodell einen stationären und ergodischen Erregungsprozeß erzeugt, ist im allgemeinen die Strukturantwort, z.B. bei hysteretischem Materialverhalten, nicht stationär. In den meisten Fällen genügt es, eine hinreichend lange Zeitreihe bis zum Erreichen des stationären Zustands zu erzeugen, und nur den stationären Teil auszuwerten. Auch die Ergodizität ist in diesem Fall in Frage gestellt. Deshalb ist es grundsätzlich notwendig, nicht nur eine Realisation der Strukturantwort zu erzeugen, sondern eine Stichprobe vom Umfang  $N$ . Die statistischen Momente oder auch die Werte der Verteilung werden zunächst wie beschrieben aus jeder Realisation der Zeitreihe ermittelt, sodann wird das arithmetische Mittel aus der Stichprobe gebildet, z.B. für die Verteilung:

$$\bar{F}_Y(\hat{y}) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N F_{Y_j}(\hat{y}) \quad (3.99)$$

Ähnlich Gl. (2.7) kann für den Schätzer nach Gl. (3.99) eine Varianz ermittelt werden zu

$$\overline{\text{var}}[\bar{F}_Y(\hat{y})] = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N F_{Y_j}^2(\hat{y}) - \left( \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N F_{Y_j}(\hat{y}) \right)^2 \quad (3.100)$$

Auch die Erstüberschreitenswahrscheinlichkeit kann nicht aus einer einzelnen Realisation bestimmt werden. Wie in Abschnitt 1 erläutert, ist ein Maß für das Versagensrisiko die Wahrscheinlichkeit, daß die maximale Strukturantwort im betrachteten Zeitraum über der zulässigen Schranke liegt. Betrachtet man nur eine Komponente der

Strukturantwort, ist

$$P_F(T) = P\left[\max_{t \in [0, T]} Y(t) \geq \hat{y}\right] \quad (3.101)$$

Zu ihrer Ermittlung wird wiederum eine Indikatorfunktion eingeführt:

$$I_j(\hat{y}) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } y_j(t_l) \geq \hat{y} \wedge y_j(t_{l-1}) < \hat{y}, t_l \in (0, T] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.102)$$

Der Schätzer für die Versagenswahrscheinlichkeit ist das arithmetische Mittel aus der Stichprobe

$$\bar{P}_F = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N I_j(\hat{y}) \quad (3.103)$$

Die Varianz des Schätzers berechnet sich näherungsweise analog Gl. (2.7) zu

$$\overline{\text{var}}[\bar{P}_F] = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N I_j^2(\hat{y}) - \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N I_j(\hat{y})\right)^2 \quad (3.104)$$

### 3.5 Testbeispiele

Die Eigenschaften der verschiedenen Simulationsmodelle sollen hier anhand einfacher Beispiele verdeutlicht werden. Sie entstammen einem *Benchmark – Test*, der vom Institut für Mechanik der Universität Innsbruck 1994 ausgeschrieben wurde. Die Ergebnisse wurden in [73] veröffentlicht. Bei diesen Beispielen handelt es sich um Einmassenschwinger mit konservativ – nichtlinearem Systemverhalten. Für solche Systeme unter weißem Rauschen als Erregung gibt es nach Lin, 1976 [49] eine exakte Lösung für die Verteilung der Strukturantwort. Die Annäherung der exakten Strukturantwort durch die Simulation soll hier für verschiedene Parameter des Erregungsprozesses untersucht werden.

Beide Systeme haben eine Bewegungsgleichung der Form  $m\ddot{X} + c\dot{X} + k(X)X = F(t)$ , mit  $m = 1,0 \cdot 10^6 \text{ kg}$ ,  $c = 0,438 \cdot 10^6 \text{ kg} \cdot \text{s}$ . Die Steifigkeit  $k(x)$  ist eine bilineare Funktion der Verschiebung  $x$ . Bei Beispiel 1 ist  $k(x) = k_0 = 30,0 \cdot 10^6 \text{ N/m}$  für  $|x| \leq x_1 = 0,01 \text{ m}$  und  $k(x) = k_1 = 54,0 \cdot 10^6 \text{ N/m}$  für  $|x| > x_1$ . Die Anregung des Systems ist  $F(t) = mW(t)$ , wobei  $W(t)$  ein normalverteiltes weißes Rauschen mit der Intensität  $I_W = 2\pi s_{WW} = 0,0036 \text{ m}^2/\text{sec}^3$  ist. Bei Beispiel 2 ist  $k_1 = 0$ , die Intensität des Erregungsprozesses ist  $I_W = 0,0015 \text{ m}^2/\text{sec}^3$ . Alle anderen Parameter sind gleich denen aus Beispiel 1.

Für die Herleitung der Verteilung  $F_X(x)$  der Verschiebung wird die Bewegungsglei-

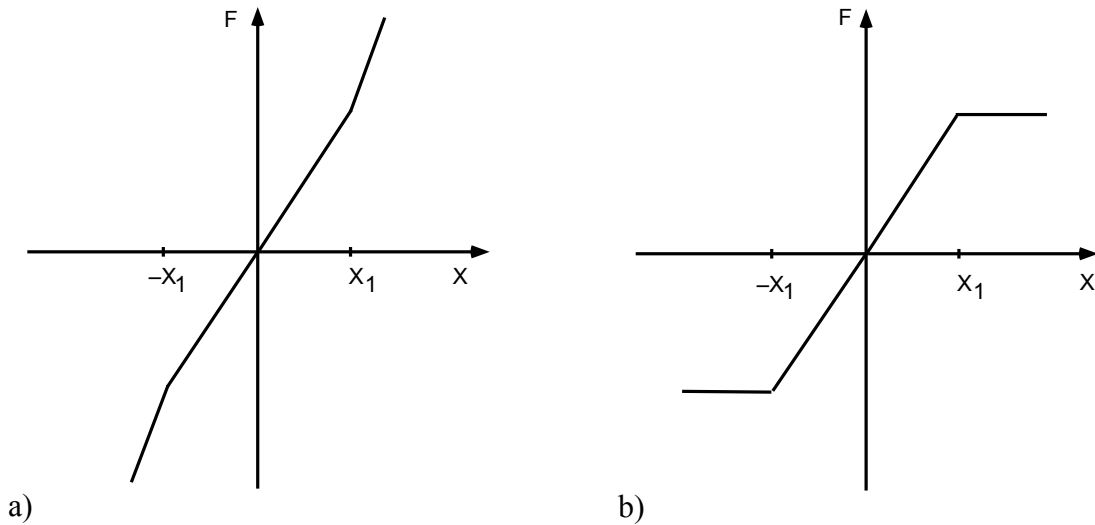


Bild 3.1: Schematische Darstellung der bilinearen Steifigkeit in a) Beispiel 1 und b) Beispiel 2.

chung umgeschrieben in der Form

$$\ddot{X} + \frac{c}{m}\dot{X} + h(X) = W(t) \quad (3.105)$$

mit

$$h(x) = \begin{cases} h_0 = \frac{k_0}{m}x & , 0 \leq x \leq x_1 \\ h_1 = \frac{k_0}{m}x_1 + \frac{k_1}{m}(x - x_1) & , x > x_1 \end{cases}$$

Nach Lin [49, Gl.(8-32)] ergibt sich die Dichtefunktion der Strukturantwort zu

$$f_X(x) = C_n \cdot \exp\left(-A \int_0^x h(\xi) d\xi\right) \quad (3.106)$$

wobei

$$A = \frac{c}{m\pi s_{WW}} = \frac{2c}{mI_W}$$

ist.  $C_n$  ist ein nachträglich zu bestimmender Normalisierungsfaktor. Für  $x \leq x_1$  liegt ein lineares System vor. Hierfür ist

$$\int_0^x h(\xi) d\xi = \frac{k_0}{2m}x^2 \quad (3.107)$$

und damit

$$f_{X,0}^+(x) = C_n \exp\left(-\frac{ck_0}{m^2 I_W} x^2\right) \quad (3.108)$$

Diese Funktion entspricht bis auf einen Faktor der Gauß'schen Dichte mit  $\mu_0 = 0$  und  $\sigma_0^2 = \frac{m^2 I_W}{2ck_0}$ . Mit  $\Phi(u)$  als der Verteilung einer standardnormal verteilten Zufallsvariablen  $U$  ist die Verteilung der Verschiebung des linearen Systems

$$F_{X,0}^+(x) = C_n \Phi\left(\frac{x}{\sigma_0}\right) \sigma_0 \sqrt{2\pi} \quad (3.109)$$

Das Superskript  $+$  deutet an, daß die Herleitung nur für  $x > 0$  erfolgte. Aus der Definition des Riemann – Integrals und der Tatsache, daß  $h(x)$  eine ungerade Funktion ist, ergibt sich, daß das Integral in negativer  $x$ -Richtung  $\int_0^{-x} h(\xi) d\xi = \int_0^{+x} h(\xi) d\xi$  ist. Deshalb ändern sich Dichte- und Verteilungsfunktion für  $x < 0$  gegenüber Gln. (3.108) bzw. (3.109) nicht.

Für den nichtlinearen Bereich mit  $k_1 \neq 0$  (Beispiel 1) ist das Integral über  $h(x)$

$$\begin{aligned} \int_0^x h(\xi) d\xi &= \int_0^{x_1} h_0(\xi) d\xi + \int_{x_1}^x h_1(\xi) d\xi \\ &= \frac{(k_1 - k_0)x_1^2}{2m} - \frac{(k_1 - k_0)x_1}{m}x + \frac{k_1}{2m}x^2 \\ &=: \alpha - \beta x + \gamma x^2 \end{aligned} \quad (3.110)$$

Die Dichtefunktion

$$f_{X,1}^+(x) = C_n \exp(-A(\alpha - \beta x + \gamma x^2)) \quad (3.111)$$

läßt sich durch eine einfache Erweiterung

$$f_{X,1}^+(x) = C_n \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} \exp\left(-A\gamma\left(x^2 - \frac{\beta}{\gamma}x + \frac{\beta^2}{4\gamma^2}\right)\right) \sigma_1 \sqrt{2\pi} \exp\left(-A\left(\alpha - \frac{\beta^2}{4\gamma}\right)\right) \quad (3.112)$$

auf eine Gauß'sche Dichtefunktion überführen, mit Mittelwert  $\mu_1^+ = \frac{\beta}{2\gamma}$  und Standardabweichung  $\sigma_1 = \sqrt{\frac{1}{2A\gamma}}$ . Die zugehörige Verteilungsfunktion ist dann

$$F_{X,1}^+(x) = C_n \Phi\left(\frac{x - \mu_1^+}{\sigma_1}\right) \sigma_1 \sqrt{2\pi} \exp\left(-A\left(\alpha - \frac{\beta^2}{4\gamma}\right)\right) \quad (3.113)$$

Für negative  $x$  muß wiederum  $\int_0^{-x} h(\xi) d\xi = \int_0^{+x} h(\xi) d\xi$  sein. Deshalb wechselt der lineare Term in Gl. (3.110) sein Vorzeichen. Die Verteilung bleibt prinzipiell gleich, ihr Mittelwert wird zu  $\mu_1^- = -\mu_1^+$ .

Für den Sonderfall  $k_1 = 0$  (Beispiel 2) ist

$$\int_0^x h(\xi) d\xi = \frac{k_0 x_1}{m} x - \frac{k_0 x_1^2}{2m} \quad (3.114)$$

$$=: \delta x - \varepsilon$$

Die Dichtefunktion

$$f_{X,1}^+(x) = C_n \exp(-A(\delta x - \varepsilon))$$

$$= C_n A \delta \exp(-A\delta x) \frac{1}{A\delta} \exp(A\varepsilon) \quad (3.115)$$

entspricht einer Exponentialverteilung. Die Verteilungsfunktion ist für  $x > 0$

$$F_{X,1}^+(x) = C_n \frac{1}{A\delta} \exp(A\varepsilon) (1 - \exp(-A\delta x)) \quad (3.116)$$

Für  $x < 0$  ist entsprechend

$$\int_0^x h(\xi) d\xi = -\delta x - \varepsilon \quad (3.117)$$

$$f_{X,1}^-(x) = -C_n A \delta \exp(A\delta x) \frac{-1}{A\delta} \exp(A\varepsilon) \quad (3.118)$$

$$F_{X,1}^-(x) = C_n \frac{1}{A\delta} \exp(A\varepsilon) \exp(A\delta x) \quad (3.119)$$

Da der Eingangsprozeß mittelwertsfrei ist und  $h(x)$  bzw.  $k(x)$  ungerade Funktionen sind, muß für die Verteilung  $F_X(0) = 0.5$  sein. Daraus ergibt sich der Normalisierungsfaktor  $C_n$ . Da die Verteilungsfunktionen definiert sind als  $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx$ , sind bei der Auswertung außerdem die Wertebereichsgrenzen zu unterscheiden, also zum Beispiel ist  $F_X(0) = F_{X,1}^-(-x_1) + F_{X,0}(0) - F_{X,0}(-x_1)$ . Die einzelnen Verteilungsfunktionen, Gln. (3.109), (3.113), (3.116) und (3.119) wurden ohne Berücksichtigung von  $C_n$  programmiert. So wird zuerst  $F_X(0)$  ermittelt und anschließend werden alle Berechnungsergebnisse mit  $0.5/F_X(0)$  skaliert.

Die Berechnungen wurden mit dem Programmpaket SIANG [42] durchgeführt. Beide Beispiele wurden durch Simulation nach dem Modell mit zufälligen Amplituden, Gl. (3.74) bzw. Gl. (3.75), und mit dem Modell der zufälligen Phasenwinkel, Gl. (3.82) berechnet. Zum Vergleich wurde jeweils auch ein lineares System mit der Steifigkeit



$k_0$  berechnet. Es wurden die obere Trennfrequenz  $\hat{\omega}$  und die Zahl der Zufallsvariablen (und damit der Frequenzschritt  $\Delta\omega$ ) variiert. Der Stichprobenumfang bei allen Simulationen ist  $N = 100000$ . Zur Berechnung der Strukturantwort wurde eigens eine Routine für `SIANG` programmiert. Diese löst die Bewegungsgleichung im Zeitschritt mit dem Runge – Kutta – Verfahren mit der Fehlerordnung 5 [10], hierzu wurde jeder Zeitschritt in 40 Unterschritte geteilt. Ausgewertet wurde die Verteilung der Verschiebung  $x$  entsprechend Gl. (3.98). In den Bildern 3.2 bis 3.9 auf den folgenden Seiten ist jeweils  $1 - F_X(x)$  in logarithmischem Maßstab dargestellt. Der Standardfehler als Maß für die Konfidenz der geschätzten Verteilung ist ebenfalls dargestellt. Er wird aus der Varianz der geschätzten Verteilung, Gl. (3.100), analog Gl. (2.8) berechnet.

Bei Beispiel 1 kann allgemein beobachtet werden, daß die „Qualität“ des Simulationsergebnisses, das ist die Größe des Wertebereichs mit guter Anpassung an die exakte Lösung und niedrigem Standardfehler, für einen bestimmten Parametersatz beim linearen und beim nichtlinearen System ähnlich ist. Das ist vorteilhaft, wenn man Vorstudien für eine Anwendung betreibt, um die optimalen Parameter des Eingangsprozesses zu bestimmen. Diese Aussage kann selbstverständlich nicht auf allgemeine nichtlineare Systeme erweitert werden. Der Effekt ist aber auch bei Beispiel 2, das aufgrund seines Verhaltens im nichtlinearen Bereich schwieriger zu berechnen ist, zu beobachten.

Wie aus allen Ergebnissen zu ersehen ist, ist der entscheidende Parameter zur Steuerung des Modells mit zufälligen Phasenwinkeln die Zahl der Zufallsvariablen. Erhöhung der Zahl der Variablen bewirkt einen größeren Wertebereich für  $x$  bei durchweg besserer Anpassung an die exakte Lösung und geringerem Standardfehler. Erst bei 400 Variablen hat das Simulationsergebnis eine ähnliche Qualität wie die Simulation mit zufälligen Amplituden und nur 15 Zufallsvariablen. Eine Erhöhung der Trennfrequenz  $\hat{\omega}$  bei gleicher Zahl der Zufallsvariablen erzielt keinen signifikanten Effekt.

Im Gegensatz dazu hat die Zahl der Variablen bei gleichbleibendem Frequenzbereich kaum Effekt auf die Simulation mit zufälligen Amplituden. (Es muß dabei eine gewisse Mindestanforderung an die Diskretisierung des Spektrums erfüllt sein.) Erhöhung von  $\hat{\omega}$  und proportional dazu der Zahl der Variablen, so daß die Diskretisierung  $\Delta\omega$  gleich bleibt, bewirkt eine bessere Annäherung an die exakte Lösung. Der Standardfehler bleibt dabei als Absolutwert ungefähr gleich, ist damit in einigen Bereichen relativ zum jeweiligen Wert der Verteilung geringer.

Insgesamt erweist sich das Simulationsmodell mit zufälligen Amplituden als deutlich überlegen. Die benötigte Anzahl an Zufallsvariablen, die für eine gewünschte Qualität der Simulation notwendig ist, ist bei diesem Modell wesentlich geringer. Das erfordert zum einen einen geringeren Speicherbedarf im Rechner. Zum anderen zeigt die Erfahrung, daß varianzmindernde Simulationsverfahren umso erfolgreicher sind, je kleiner die Zahl der Zufallsvariablen ist. Das Modell der zufälligen Phasenwinkel ist aufgrund der Gleichverteilung der Variablen beispielsweise für *Importance Sampling* nicht geeignet. Deswegen ist es zielführend, zur Entwicklung eines varianzmindernden Simulationsverfahrens für Zufallsprozesse das Modell nach Gl. (3.74) bzw. Gl. (3.75) zu wählen.

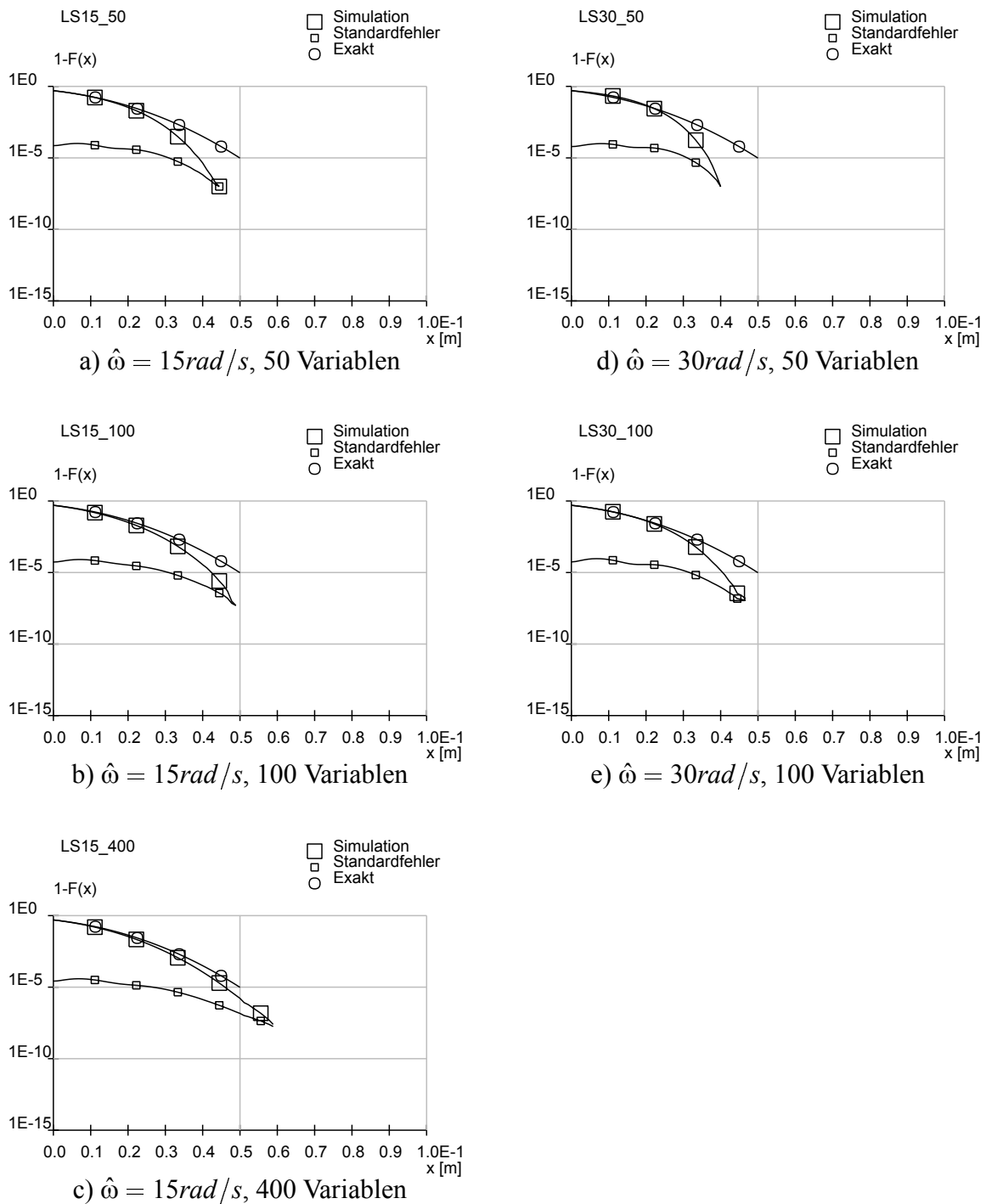


Bild 3.2: Verteilung der Verschiebung ( $1 - F_X(x)$ ) für Beispiel 1, lineares System ( $k_0 = 30.0 \cdot 10^6 \text{ N/m}$ ), Simulationsmodell mit zufälligen Phasenwinkeln nach Gl. (3.82).

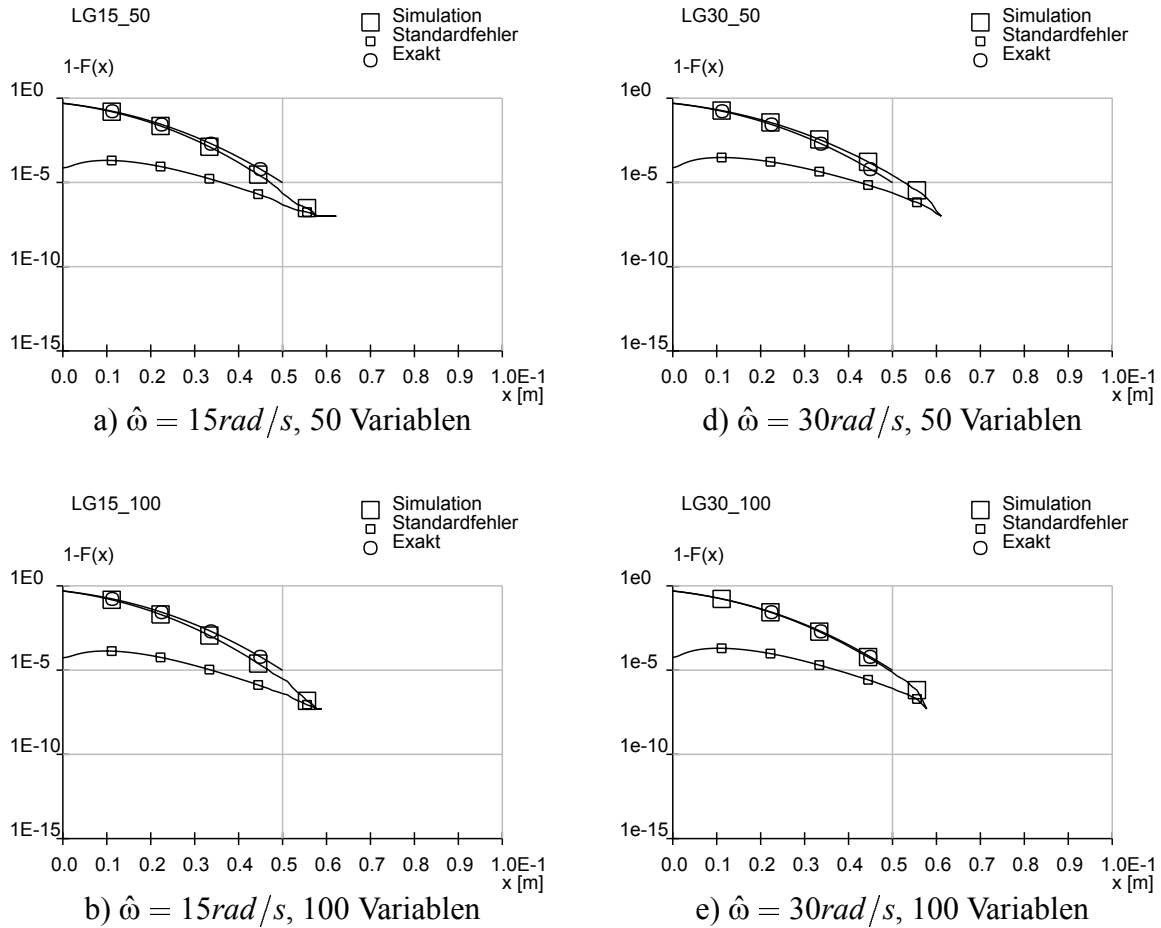


Bild 3.3: Verteilung der Verschiebung ( $1 - F_X(x)$ ) für Beispiel 1, lineares System ( $k_0 = 30.0 \cdot 10^6 \text{ N/m}$ ), Simulationsmodell mit zufälligen Amplituden nach Gl. (3.75).

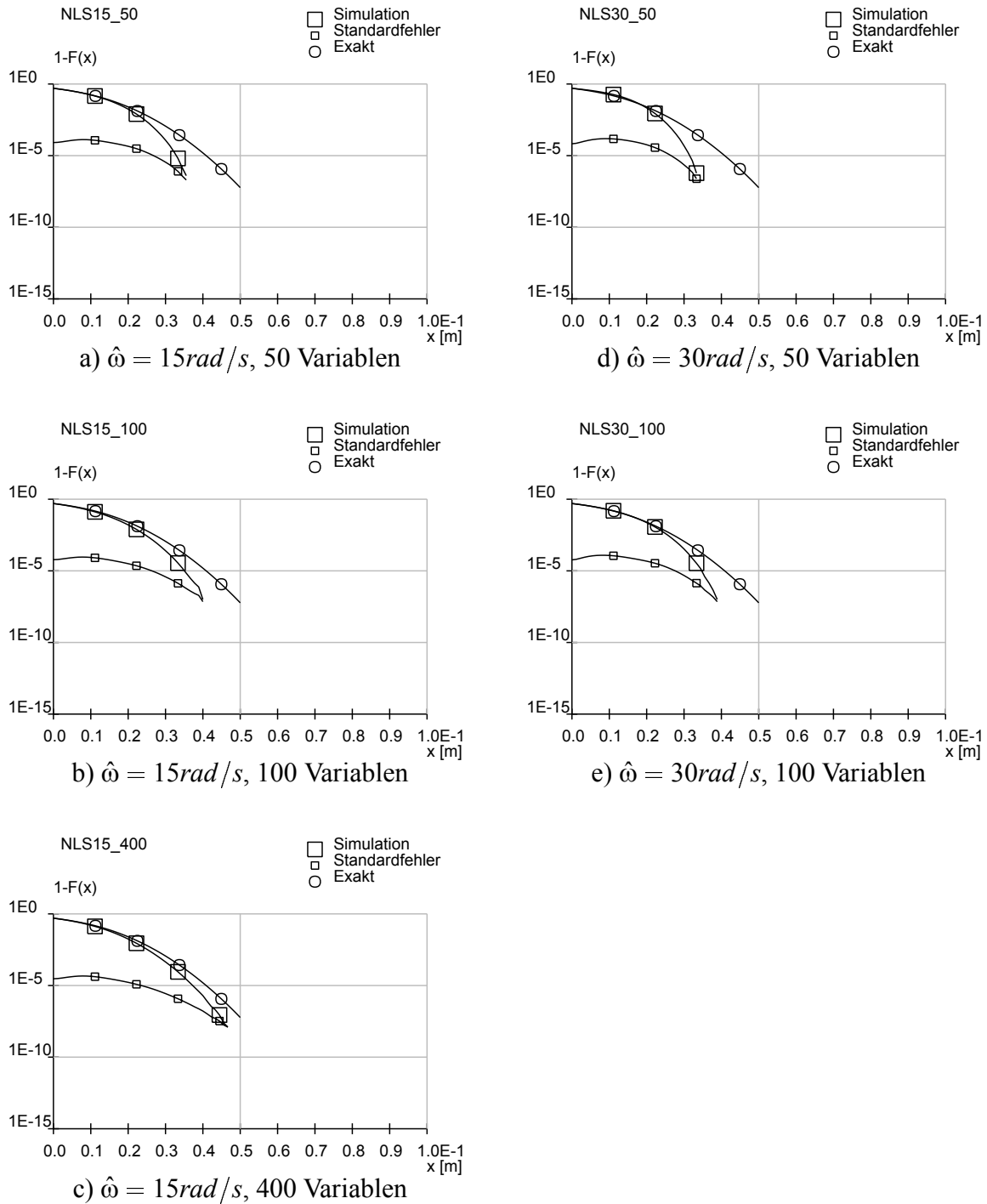


Bild 3.4: Verteilung der Verschiebung  $(1 - F_X(x))$  für Beispiel 1, konservativ nichtlineares System ( $k_0 = 30.0 \cdot 10^6 \text{ N/m}$ ,  $k_1 = 54.0 \cdot 10^6 \text{ N/m}$ ), Simulationsmodell mit zufälligen Phasenwinkeln nach Gl. (3.82).

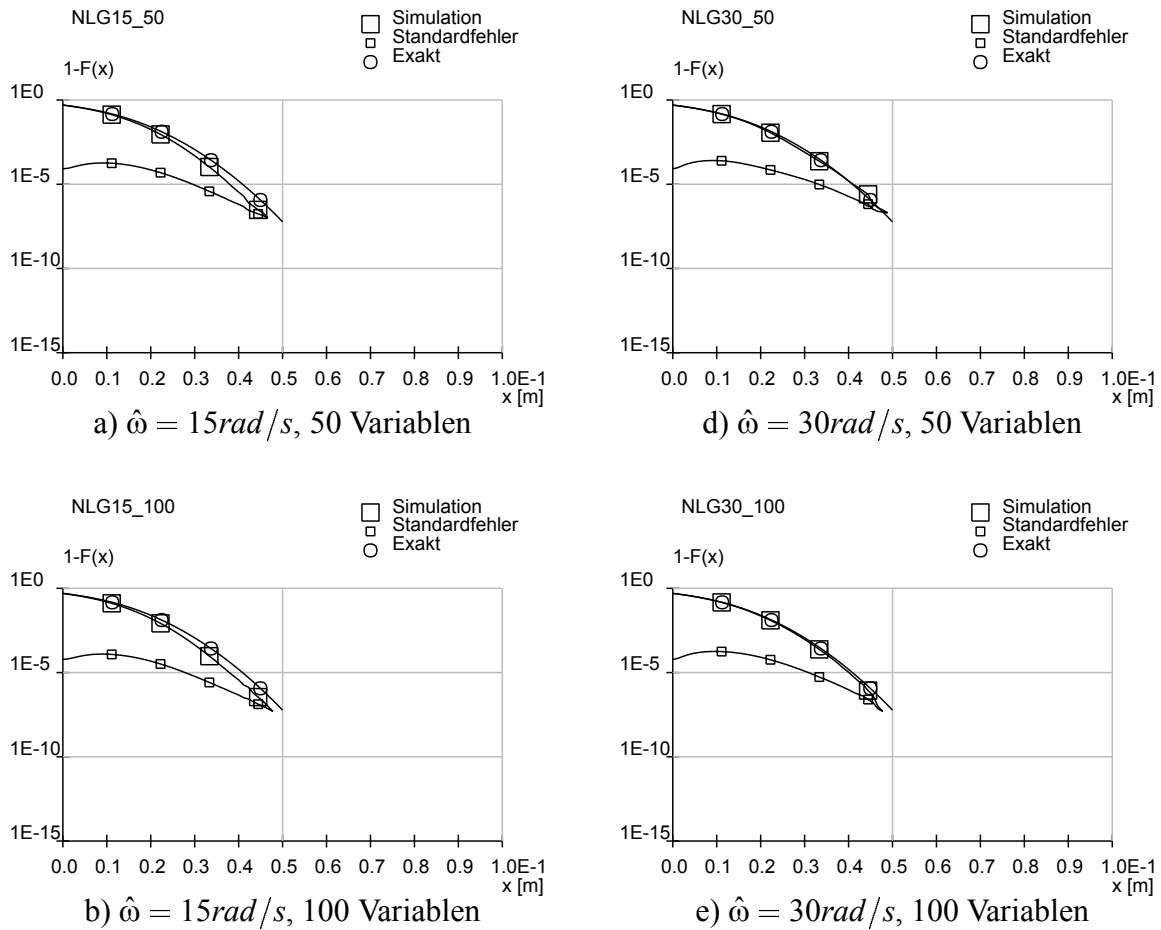


Bild 3.5: Verteilung der Verschiebung  $(1 - F_X(x))$  für Beispiel 1, konservativ nichtlineares System ( $k_0 = 30.0 \cdot 10^6 \text{ N/m}$ ,  $k_1 = 54.0 \cdot 10^6 \text{ N/m}$ ), Simulationsmodell mit zufälligen Amplituden nach Gl. (3.75).

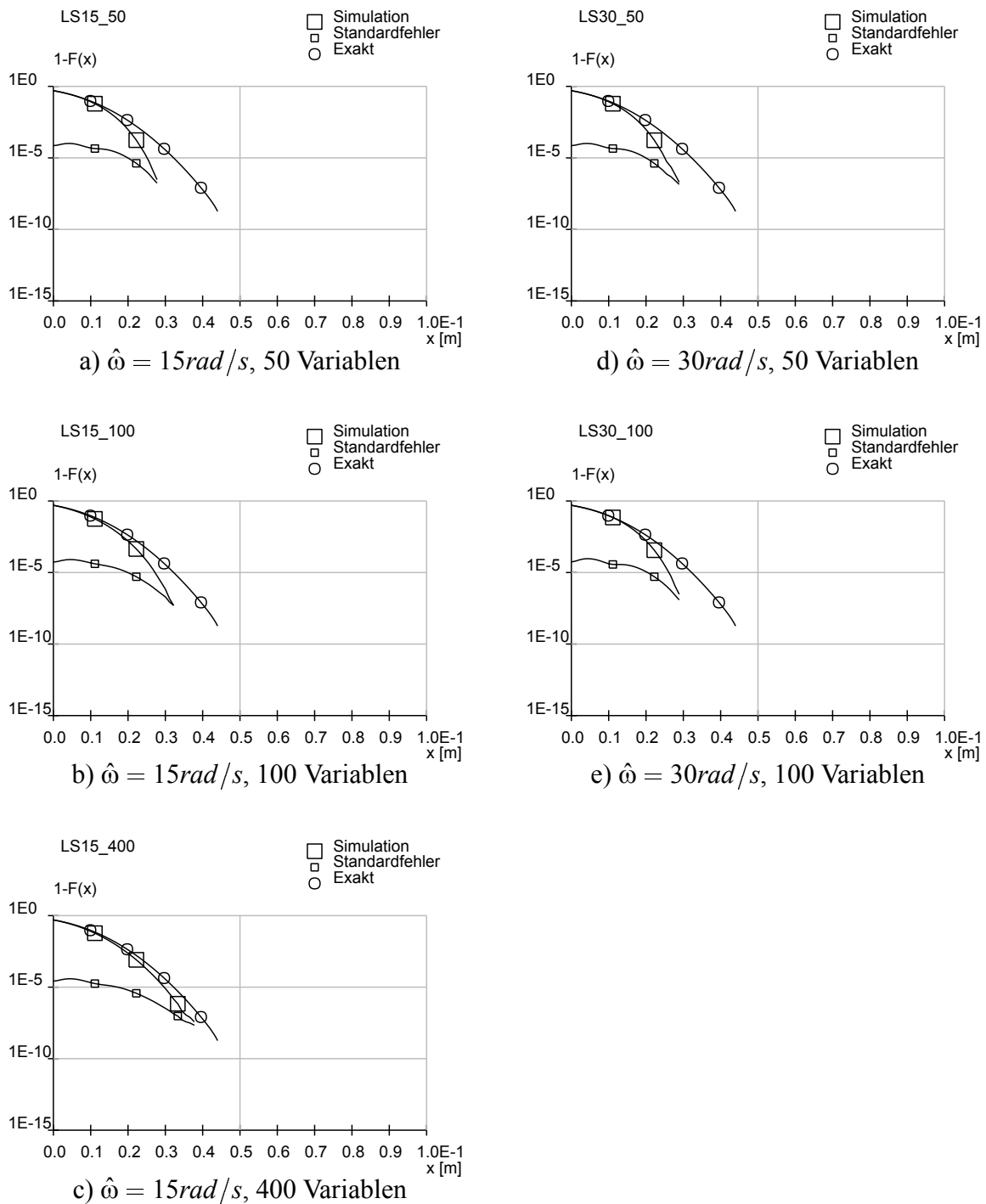


Bild 3.6: Verteilung der Verschiebung ( $1 - F_X(x)$ ) für Beispiel 2, lineares System ( $k_0 = 30.0 \cdot 10^6 \text{ N/m}$ ), Simulationsmodell mit zufälligen Phasenwinkeln nach Gl. (3.82).

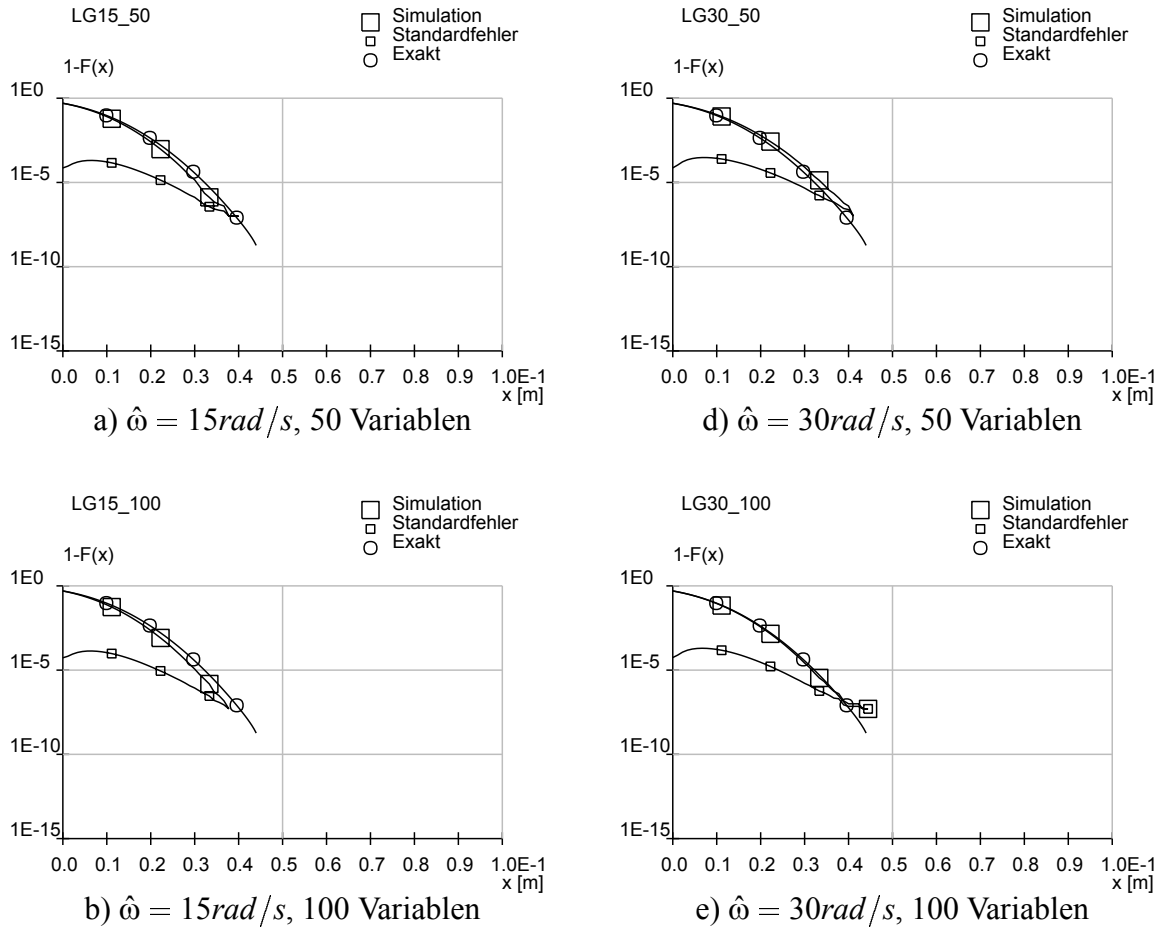


Bild 3.7: Verteilung der Verschiebung ( $1 - F_X(x)$ ) für Beispiel 2, lineares System ( $k_0 = 30.0 \cdot 10^6 \text{ N/m}$ ), Simulationsmodell mit zufälligen Amplituden nach Gl. (3.75).

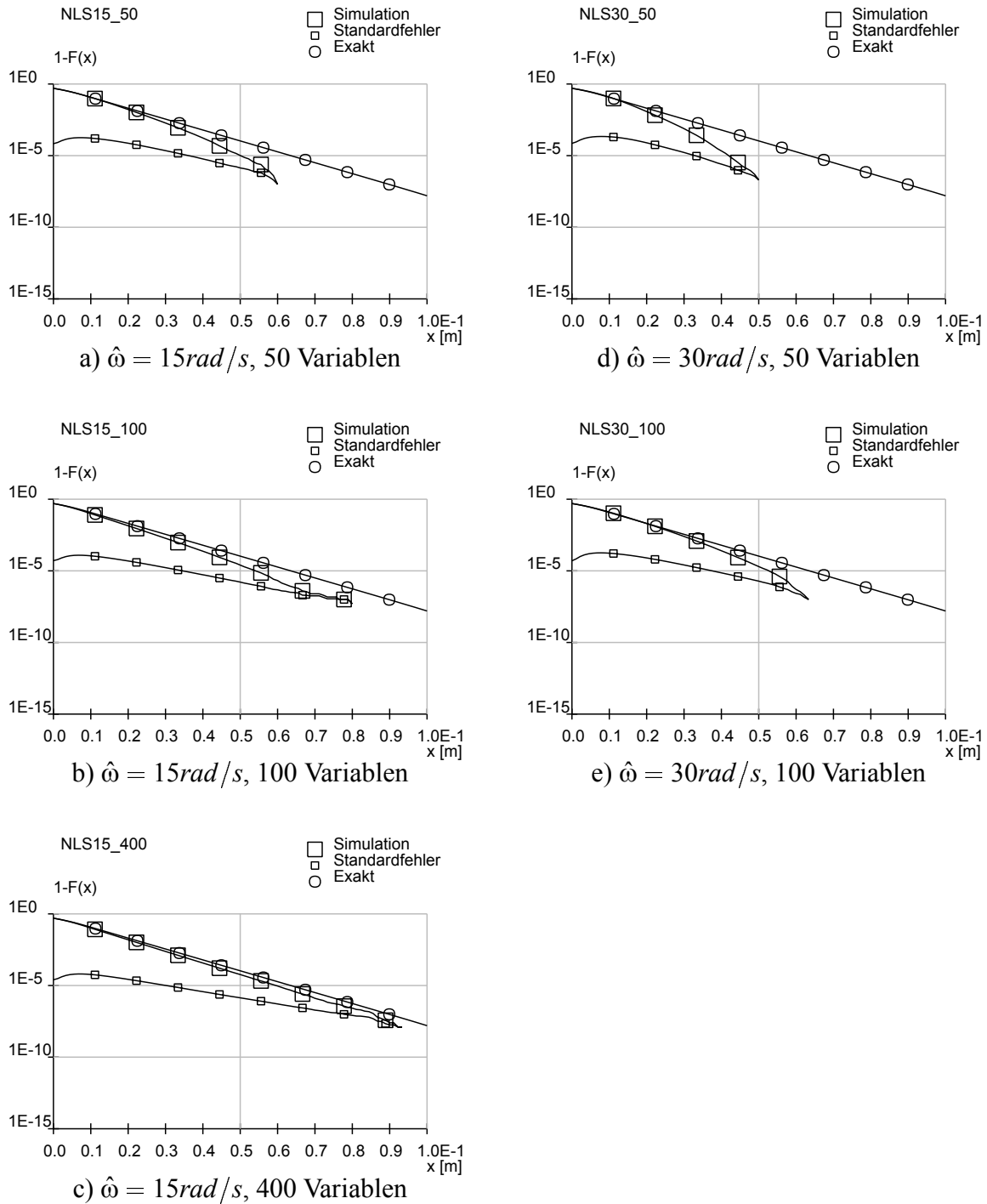


Bild 3.8: Verteilung der Verschiebung  $(1 - F_X(x))$  für Beispiel 2, konservativ nichtlineares System ( $k_0 = 30.0 \cdot 10^6 \text{ N/m}$ ,  $k_1 = 0$ ), Simulationsmodell mit zufälligen Phasenwinkeln nach Gl. (3.82).



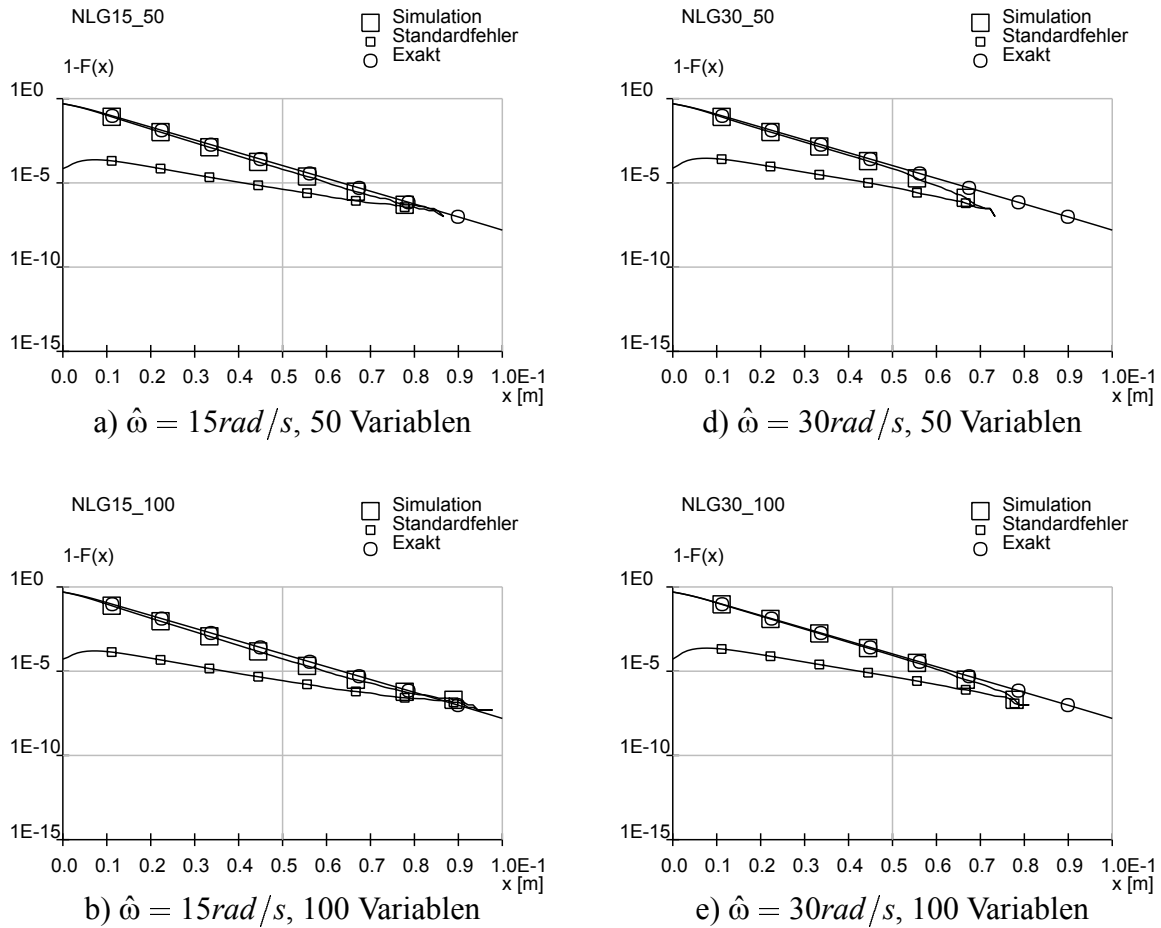


Bild 3.9: Verteilung der Verschiebung  $(1 - F_X(x))$  für Beispiel 2, konservativ nichtlineares System ( $k_0 = 30.0 \cdot 10^6 \text{ N/m}$ ,  $k_1 = 0$ ), Simulationsmodell mit zufälligen Amplituden nach Gl. (3.75).

## 3.6 Varianzmindernde Simulationsverfahren

Die in diesem Kapitel vorgestellten Simulationsmodelle, die auf einem ARMA – Modell oder der spektralen Darstellung eines Prozesses beruhen, sind in der Literatur am häufigsten anzutreffen. Weitere Ansätze, auf die hier nicht weiter eingegangen wird, wurden z.B. von Grigoriu [31], [33], Li und Ghanem [48], Spanos und Zeldin [82], Winterstein [91] und Weba [89] veröffentlicht. Varianzmindernde Simulation von Zufallsprozessen findet sich in der Literatur verhältnismäßig selten. Einige Ansätze hierzu sollen in diesem Abschnitt diskutiert werden.

Als varianzminderndes Verfahren im Rahmen einer Simulation im Zeitbereich ist das *Double & Clump* zu nennen, erstmals veröffentlicht von Pradlwarter [65]. Es beruht auf dem Verfahren des *Russian Roulette and Splitting* (Hammersley & Handscomb [36], Pradlwarter *et al.* [67]).

Das Verfahren besteht im Wesentlichen aus einer Zensur der simulierten Stichprobe, die während der transienten dynamischen Berechnung für die jeweilige Realisation in jedem Zeitschritt durchgeführt wird. Es ist ein Bewertungskriterium zu finden, das vom untersuchten Problem abhängt. In der ersten Entwicklungsstufe des *Double & Clump* ist das Kriterium vom momentanen Energiezustand der Stichprobe abgeleitet. Die Zustandsvektoren eines Systems mit zufälliger dynamischer Anregung haben zwar zufällige Pfade, bei einem gedämpften System streben sie aber im Mittel mit der Zeit gegen einen stationären Zustand (bei freier Schwingung gegen Null). Zustandsvektoren mit hohem Energiegehalt besitzen ein verhältnismäßig größeres Potential, nach außen bzw. in Bereiche mit geringerer Wahrscheinlichkeitsdichte zu wandern. Diese sind zur Berechnung von Erstüberschreitenswahrscheinlichkeiten von Interesse. Jeder Realisation der Stichprobe wird, abhängig vom Bewertungskriterium, eine Überlebenswahrscheinlichkeit zugeordnet. Außerdem besitzt jede Realisation ein Gewicht, daß mit Eins initialisiert wird.

Beim originalen „Russischen Roulette“ wird unter Berücksichtigung der Überlebenswahrscheinlichkeit ein gewisser Anteil an Realisationen zufällig ausgewählt und aus der Stichprobe entfernt. Bei *Double & Clump* werden Paare von Realisationen ausgewählt, das „Verklumpen“ bzw. Zusammenführen geschieht dadurch, daß die beiden Realisationen der Zustandsvektoren eliminiert werden und dafür ein neuer Vektor eingeführt wird, gebildet aus dem gewichteten Mittel der beiden alten Vektoren. Das Gewicht dieser neuen Realisation ist die Summe der Gewichte der eliminierten Realisationen. Voraussetzung ist, daß ein Zustandsvektor vom vorherigen Zustand unabhängig ist. Das ist allerdings nicht für jedes nichtlineare System der Fall.

Auf diese Weise wird der Stichprobenumfang zunächst reduziert. Um die Anzahl Realisationen zu erhalten, wird die gleiche Anzahl an Zustandsvektoren ausgewählt, diesmal diejenigen, welche die höchsten Werte nach dem Bewertungskriterium erhalten. Diese Vektoren werden kopiert, das heißt zwei identische Exemplare sind doppelt in der Stichprobe enthalten. Die zugeordneten Gewichte werden deshalb halbiert. Danach wird die transiente Berechnung der Struktur fortgeführt, so daß nach dem nächsten

Zeitschritt aufgrund der zufälligen Pfade sich wiederum verschiedene Zustandsvektoren ergeben.

Auswertungen der Simulation, z.B. hinsichtlich einer Erstüberschreitenswahrscheinlichkeit, erfolgen als gewichtetes Mittel aus der Stichprobe. Durch die Einführung der Gewichte verändert der zweite Teil der Prozedur nicht die statistischen Eigenschaften der Stichprobe. Der erste Teil erhält zwar den Mittelwert, aber höhere Momente können verändert werden, wodurch ein systematischer Fehler eingeführt wird. Um den Einfluß möglichst gering zu halten, werden im ersten Teil, dem „Verklumpen“, benachbarte Paare von Zustandsvektoren ermittelt. Außerdem erfolgen weitere Korrekturen, die in der zitierten Literatur nicht näher erläutert sind, um die Randverteilungen zu erhalten.

Das Energiekriterium ist zur Bewertung nicht immer anwendbar. Aus diesem Grunde, und um die Beeinflussung der Statistik weiter zu reduzieren, wurde in der zweiten Entwicklungsstufe des *Double & Clump* ein geometrisches Kriterium eingeführt (Pradlwarter *et al.* [66]). Ziel der Maßnahmen ist es hier, die Realisationen möglichst gleichmäßig im Zustandsraum zu verteilen. Hierdurch wird eine Stabilisierung des Verfahrens erreicht. Im ersten Teil der Prozedur, der Zusammenführung von Realisationen, werden aus der gesamten Stichprobe benachbarte Paare von Zustandsvektoren, also diejenigen mit den geringsten Abständen, ausgewählt. Der Stichprobenumfang wird somit halbiert, danach werden alle neuen Realisationen wie oben beschrieben verdoppelt.

Einige Berechnungsbeispiele in der Literatur sind vielversprechend. Die Beeinflussung der statistischen Eigenschaften der Stichprobe ist aber auch bei dieser Variante nicht auszuschließen. Die Prozedur wird nach jedem Zeitschritt, oder in bestimmten Zeitintervallen, wiederholt, was den negativen Effekt verstärkt. Darüber hinaus erfordern die Sortieralgorithmen zum Auffinden benachbarter Paare vermutlich hohen Rechenzeitbedarf.

Das *Double & Clump*, mehr noch das *Russian Roulette & Splitting*, kann als einfachste Form eines genetischen Algorithmus angesehen werden. Johnson *et al.* [43] greifen diese Idee auf, um weiterentwickelte genetische Algorithmen zur Zensurierung der Realisationen in die Monte Carlo Simulation zu implementieren. Das Problem der Beeinflussung der statistischen Eigenschaften bleibt bestehen, außerdem müssen viele Kontrollparameter hinsichtlich Aufwand und Nutzen optimiert werden. Die zitierte Literatur stellt ein Zwischenstadium der Entwicklungen dar.

Hu und Schiehlen [40] arbeiten mit der spektralen Darstellung eines Prozesses. Sie verwenden das Simulationsmodell nach Gl. (3.82) mit deterministischen Amplituden. In Abschnitt 3.3.2 wurden Bemerkungen zur Konvergenz des Simulationsmodells gegen den Originalprozeß in Bezug auf die Korrelationsfunktion gemacht. Im Simulationsmodell wird das Integral der Wiener – Khintchine – Beziehung quasi durch die Rechteckregel angenähert, vgl. S. 56. Hu und Schiehlen entwickeln eine Korrektur für diese numerische Integration und leiten daraus Werte für die ersten zwei Amplituden der Reihenentwicklung ab. Das erwähnte Simulationsmodell bleibt also unverändert,

bis auf

$$a_1 = \sqrt{2(g_{XX}(\Delta\omega) + \frac{2}{3}g_{XX}(0))\Delta\omega} \quad (3.120)$$

und

$$a_2 = \sqrt{2(g_{XX}(2\Delta\omega) - \frac{1}{6}g_{XX}(0))\Delta\omega} \quad (3.121)$$

anstelle von

$$a_{1,2} = \sqrt{2g_{XX}(\omega_{1,2})\Delta\omega}$$

unter der Voraussetzung konstanter Frequenzschritte  $\Delta\omega$ . Für  $g_{XX}(0) = 0$  ist das Modell identisch Gl. (3.82). Durch diese Korrektur soll das Konvergenzverhalten mit der Anzahl an Zufallsvariablen wesentlich verbessert werden, allerdings nur für gewisse Intervalle von  $\tau$  in der Korrelationsfunktion, auch wenn dieses Verfahren keine Varianzminderung darstellt. Es ist auch zu fragen, ob eine gute Annäherung des Leistungsspektrums oder der Korrelationsfunktion von größerem Interesse ist. Interessant wäre eine Übertragung auf das Simulationsmodell mit zufälligen Amplituden, weil dieses Modell Varianzminderung, z.B. durch *Importance Sampling* zuläßt.

Takada [85] verwendet zur Darstellung des Prozesses die Karhunen – Loève – Reihe, die allgemeiner als die Fourier – Reihe ist. Die Reihenentwicklung hat die Form

$$X(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i} B_i \psi_i(t) \quad (3.122)$$

$B_i$  hierin sind unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit Mittelwert Null und Varianz Eins. Soll  $X(t)$  Gauß – verteilt sein, gilt das auch für die  $B_i$ . Die  $\lambda_i$  und  $\psi_i(t)$  sind Eigenwerte bzw. Eigenfunktionen der Integralgleichung

$$\int_0^T r_{XX}(t_1, t_2) \psi_i(t_2) dt_2 = \lambda_i \psi_i(t_1) \quad (3.123)$$

Die Varianz des Prozesses wird durch die Eigenwerte bestimmt. Eine Reduktion der Anzahl der Zufallsvariablen kann erreicht werden durch Auswahl derjenigen Variablen, die den größten Werten  $\lambda_i$  zugeordnet sind. Gl. (3.123) ist oft nicht direkt lösbar. Eine Diskretisierung der Zeitachse in äquidistante Abschnitte  $\Delta t$  führt auf das folgende Eigenwertproblem Gl. (3.124).

$$\Delta t \mathbf{C} \Psi = \Lambda \Psi \quad (3.124)$$

Darin sind  $\Psi$  die Matrix der Eigenvektoren,  $\Lambda$  die Diagonalmatrix mit den Eigenwerten und  $\mathbf{C}$  die Matrix mit den paarweisen Kovarianzen von  $X(t)$  zu allen betrachteten Zeitpunkten (die sich aus dem Beobachtungszeitraum  $T$  und dem Zeitschritt  $\Delta t$  ergeben). Somit werden die Eigenfunktion diskretisiert als Eigenvektoren dargestellt. Dieses Simulationsverfahren entspricht der in Bucher *et al.* [13] beschriebenen Methodik.

Ähnlich dem ISPUD Konzept, s. S. 13, wird *Importance Sampling* zur Varianzminderung eingesetzt. Die Simulationsdichte wird für eine Auswahl von  $M$  Zufallsvariablen eingeführt, für welche die zugeordneten Eigenwerte am größten sind. Der Mittelwertsvektor dieser Variablen wird einem Bemessungspunkt gleichgesetzt, der wie nachfolgend beschrieben ermittelt wird. Bei der Berechnung von Erstüberschreitenswahrscheinlichkeiten über eine zulässige Schranke  $\hat{x}$  mit dem beschriebenen Simulationsmodell ist die Grenzzustandsfunktion linear bezüglich der Basisvariablen.

$$g(\mathbf{B}, t) = \hat{x} - \sum_{i=1}^M \sqrt{\lambda_i} B_i \psi_i(t) \quad (3.125)$$

Der Vektor der Gradienten der Grenzzustandsfunktion ist

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \left\{ \frac{\partial g}{\partial B_i} \right\} = - \left\{ \sqrt{\lambda_1} \psi_1(t), \dots, \sqrt{\lambda_M} \psi_M(t) \right\}^T \quad (3.126)$$

Der minimale Abstand der Grenzzustandsfunktion zum Ursprung im Raum standard-normal – verteilter Variablen wird für einen bestimmten Zeitpunkt berechnet zu

$$\beta(t) = \frac{\hat{x}}{\|\boldsymbol{\gamma}(t)\|} \quad (3.127)$$

Über den gesamten Beobachtungszeitraum ist das Minimum der Abstände zu ermitteln. Es tritt zum Zeitpunkt  $t^*$  auf.

$$\beta(t^*) = \min_{0 < t < T} \beta(t) \quad (3.128)$$

Somit ist der Bemessungspunkt bzw. der Mittelwertsvektor der zur Simulation verwendeten Zufallsvariablen gegeben mit

$$\boldsymbol{\mu}_B = \frac{-\boldsymbol{\gamma}(t^*)}{\|\boldsymbol{\gamma}\|} \beta(t^*) \quad (3.129)$$

Das *Importance Sampling* stellt hier quasi eine konstante Verschiebung der Mittelwertsfunktion des Prozesses dar, so daß diese zum Zeitpunkt  $t^*$  den Bemessungspunkt

berührt. Die Karhunen – Loève – Reihenentwicklung eines Zufallsprozesses ist insofern allgemeiner als die spektrale Darstellung, als sie auch für instationäre Prozesse gültig ist. Durch die oben beschriebene Auswahl der Zufallsvariablen werden einzelne dominante Variablen bestimmt, die am meisten zur Varianz des Prozesses beitragen, im Gegensatz zur spektralen Darstellung, bei der ein begrenzter, aber zusammenhängender Frequenzbereich betrachtet wird. Dadurch ist hier möglicherweise eine stärkere Reduktion der Dimension des Problems möglich. Das Anwendungsbeispiel der zitierten Veröffentlichung bezieht sich nur auf die Simulation eines Prozesses, nicht auf die Berechnung einer Systemantwort infolge einer simulierten Erregung. In letzterem Fall sollte die Ermittlung des Bemessungspunktes an der Systemantwort orientiert werden.

Die Auswahl der Zufallsvariablen allein anhand des Erregungsprozesses birgt allerdings die Gefahr in sich, daß wesentliche Anteile an der Strukturantwort vernachlässigt werden, an anderer Stelle aber Variablen Berücksichtigung finden, deren Beitrag zur Systemantwort vernachlässigbar wäre. Bei einem dynamischen System werden die einzelnen Frequenzanteile unterschiedlich gedämpft, so daß eine Orientierung des Auswahlverfahrens an der Systemantwort vorteilhaft erscheint. Das ist der Fall bei Li und Ghanem [48]. Sie verwenden ebenfalls eine Karhunen – Loève Entwicklung für die Erregung. Die Antwort eines Systems von Differentialgleichungen wird angenähert durch eine sogenannte Chaospolynom – Entwicklung, die hier nicht weiter erläutert wird. Die Auswahl der Variablen orientiert sich an der Genauigkeit der Darstellung höherer statistischer Momente der Systemantwort. Dazu muß aber eine Referenzlösung vorliegen. Sowohl der Auswahlalgorithmus als auch die Anpassung der Koeffizienten der Chaospolynome erscheint bei Systemen mit vielen Freiheitsgraden und bei starker Nichtlinearität, die eine hohe Ordnung der Polynome verlangt, sehr aufwendig.

Auch Tanaka [86] verwendet das Konzept des Bemessungspunktes, übertragen auf dynamische Systeme. Anregung ist hier ein Wiener Prozeß (vgl. [80]). Die Systemantwort ist gegeben durch die Lösung eines Systems von Itô – Differentialgleichungen

$$dX_i = \mu_i(t, \mathbf{X})dt + \sum_{j=1}^p \sigma_{ij}(t, \mathbf{X}) dW_j(t) \quad (3.130)$$

Für die Lösung des Differentialgleichungssystems zu diskreten Zeitpunkten mittels eines Euler – Verfahrens können Inkremente des Wiener Prozesses nach der Formel

$$\Delta W_j(m) = W_j(t_m) - W_j(t_{m-1}) = \Xi_j(m)\sqrt{\Delta t} \quad (3.131)$$

simuliert werden.  $\Xi_j(m)$  sind unabhängige standardnormal verteilte Variablen. Ein Zeitpunkt  $t_m$  ist gegeben durch  $t_m = m \cdot \Delta t$ ,  $m = 1, \dots, M$ , der gesamte Beobachtungszeitraum ergibt sich zu  $T = M \cdot \Delta t$ .

Mit einer Grenzzustandsfunktion  $g(\xi)$ , definiert analog Gl. (1.1), wird ein Punkt auf dem Grenzzustand  $g(\xi) = 0$  bezeichnet als  $\xi(m, m_0)$ . Hier ist  $m$  wiederum der Lauf-

index für die diskreten Zeitpunkte und  $m_0$  ist der Zeitpunkt, zu dem Versagen eintritt. Der Abstand des Grenzzustandspunktes zum Koordinatenursprung wird folgendermaßen berechnet:

$$\beta(m_0) = \sqrt{\sum_{j=1}^p \sum_{m=1}^M \xi_j^2(m, m_0)} \quad (3.132)$$

Zu jedem Zeitpunkt  $m_0$  gibt es einen Punkt auf dem Grenzzustand mit minimalem Abstand zum Ursprung. Aus all diesen „momentanen“ Minima wird der Bemessungspunkt  $\xi^*(m, m^*)$  bestimmt aus

$$\beta^* = \min_{1 < m_0 < M} \beta(m_0) \quad (3.133)$$

Die Ermittlung des Bemessungspunktes erfolgt also sowohl über den Wertebereich von  $\Xi$  als auch über alle Zeitpunkte im Beobachtungszeitraum, da verschiedene Belastungspfade zum Versagen führen können.

Für das *Importance Sampling* wird statt des Wiener Prozesses  $W_j(t)$  folgender Prozeß verwendet:

$$\tilde{W}_j(t) = W_j(t) + \int_0^t u_j(s) ds \quad (3.134)$$

Das bedeutet, daß der originale Prozeß mit der Zeit durch eine deterministische Kontrollfunktion, gegeben durch das Integral in Gl. (3.134), verschoben wird, bzw. daß die Mittelwertfunktion verändert wird. Die Werte des Integranden  $\mathbf{u}(t)$  werden so bestimmt, daß alle Erwartungswerte der Inkremente des Wiener Prozesses Gl. (3.131) entsprechen, wenn man dort den Bemessungspunkt  $\xi^*(m, m^*)$  für  $\Xi$  einsetzt.

$$\mathbf{u}(t_m) = -\frac{\xi^*(m, m^*)}{\sqrt{\Delta t}} \quad (3.135)$$

Die Versagenswahrscheinlichkeit wird aus einer Stichprobe vom Umfang  $N$  berechnet zu

$$\bar{P}_F = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N I_k \mu(\mathbf{W}_k) \quad (3.136)$$

$I$  ist eine vom Versagenskriterium abhängige Indikatorfunktion analog Gl. (3.102) und  $\mathbf{W}_k$  ist eine Realisation des Wiener Prozesses. Der Korrekturterm für das *Importance*

*Sampling* ist hier

$$\mu(\mathbf{W}_k) = \exp \left[ \sum_{j=1}^p \int_0^T u_j(s) dW_{kj}(s) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^p \int_0^T u_j^2(s) ds \right] \quad (3.137)$$

Auch die Berechnung der Systemantwort erfordert eine Korrektur. Das zu lösende Differentialgleichungssystem ist

$$dX_i = \left[ \mu_i(t, \mathbf{X}) - \sum_{j=1}^p \sigma_{ij}(t, \mathbf{X}) u_j(t) \right] dt + \sum_{j=1}^p \sigma_{ij}(t, \mathbf{X}) d\tilde{W}_j(t) \quad (3.138)$$

Der Ansatz von Tanaka ist prinzipiell sehr ähnlich dem vorher diskutierten von Takada, s.S. 78. Die Berechnung der Systemantwort infolge des Erregungsprozesses und auch die Grenzzustandsfunktion sind hier allgemeiner formuliert, während Takada eine zwar näherungsweise, aber weniger aufwendige Darstellung des Prozesses wählt. Ebenso hat der Bemessungspunkt bei Takada nur Komponenten, die den Amplituden zu einer Auswahl an Eigenfunktionen entsprechen. Bei Tanaka legt der Bemessungspunkt eine gesamte Zeitreihe fest. Seine Ermittlung kann hier aus den genannten Gründen wesentlich aufwendiger sein. Soll ein mechanisches Modell untersucht werden, ist dies erst als ein System von Itô – Differentialgleichungen zu formulieren.



## 4

# Ein Importance Sampling – Verfahren für die Simulation von Zufallsprozessen

### 4.1 Konzeption

In der vorliegenden Arbeit wurde ein varianzminderndes Simulationsverfahren entwickelt, daß speziell zur Berechnung von Erstüberschreitenswahrscheinlichkeiten infolge kurzzeitiger dynamischer Anregung, wie zum Beispiel Erdbeben, geeignet ist. Die Entwicklung konzentriert sich auf stationäre, normalverteilte Prozesse. Die Modellierung der Starkbebenphase eines Erdbebens als stationärer Prozeß ist ein nur angenähertes, aber übliches Verfahren (vgl. Soong, Grigoriu [80, Abschnitt 3.1]). Auch in einschlägigen Normen werden Erdbeben durch Leistungsspektren charakterisiert. Die Charakterisierung eines Prozesses durch ein Leistungsspektrum, was gleichbedeutend ist mit einer Charakterisierung im Sinne statistischer Momente bis zur zweiten Ordnung, läßt eine eindeutige Definition nur von stationären, normalverteilten Prozessen zu. Die Thematik nicht-normalverteilter Prozesse wird deshalb ausgeklammert.

Ziel des Simulationsverfahrens ist es, Erstüberschreitenswahrscheinlichkeiten über hohe Schranken zu berechnen, also mit möglichst wenig Aufwand geringe Werte der Wahrscheinlichkeit bei ausreichender Konfidenz zu erreichen. In Kapitel 2 werden verschiedene varianzmindernde Monte Carlo Methoden für die Simulation von Zufallsvariablen vorgestellt. Auch wenn ein Zufallsprozeß zur Simulation auf dem Rechner im Zeit- oder Frequenzbereich diskretisiert und damit durch Zufallsvariablen dargestellt wird, sind nicht alle Verfahren gleichermaßen zur Simulation von Prozessen geeignet. Ansätze aus der Literatur zur varianzmindernden Simulation von Prozessen werden in Abschnitt 3.6 diskutiert. Das universellste varianzmindernde Verfahren ist das *Importance Sampling*, das in der Literatur in vielen Varianten vorkommt und auch zur Simulation von Zufallsprozessen angewendet wird. *Importance Sampling* erscheint als

das geeignetste Verfahren und wird auch in den Entwicklungen der vorliegenden Arbeit verwendet. Bei Simulation mit Klassenunterteilung oder Aufteilung des Integrationsbereichs, Abschnitte 2.3 bzw. 2.7, stellt sich die Frage, welche Bereiche besonders berücksichtigt oder vernachlässigt werden sollen. Die dazu notwendige Information über die Strukturantwort liegt bei nichtlinearen Systemen nicht vor. Die von Li, Ghanem [48] sowie Spanos, Zeldin [82] vorgeschlagenen Simulationsverfahren haben Parallelen zum *Latin Hypercube Sampling*. Sie zielen eher auf eine Reduzierung der Variablen ab, nicht auf Varianzminderung. Reduzierung der Dimension durch *Directional Sampling* wird in Abschnitt 4.6 aufgegriffen, in Kombination mit dem *Importance Sampling* – Verfahren aus Abschnitt 4.3.

Für die Simulation von Zufallsprozessen wird hier die spektrale Darstellung gewählt, wie sie in Abschnitt 3.3.1 hergeleitet wurde. Für die weitere Entwicklung erscheint diese Darstellung vorteilhaft gegenüber Formulierungen im Zeitbereich. Wie bereits erwähnt werden für Erdbebenbelastungen in einigen Normen Standard – Leistungsspektren vorgegeben. Die Parameter der spektralen Darstellung können direkter und einfacher bestimmt werden. Dagegen ist die Anpassung z.B. von ARMA – Modellen an vorgegebene Spektren mitunter mit Schwierigkeiten verbunden. Vor allem erscheint die Implementierung des *Importance Sampling* – Verfahrens bei der spektralen Darstellung einfacher. Alle Parameter, wie z.B. Simulationsdichte für *Importance Sampling*, Zahl der Variablen, usw. werden hier vor der eigentlichen Simulation bestimmt. Korrekturen der Simulationsparameter im Zeitbereich, nach jedem Zeitschritt, erfordern mehr Rechenzeitbedarf und sind schwerer kontrollierbar.

Das in der vorliegenden Arbeit entwickelte Simulationsverfahren wird wegen der Anwendung von *Importance Sampling* auf die spektrale Darstellung des Prozesses *Spectral Importance Sampling* genannt. Die Bestimmung der Simulationsdichtefunktion orientiert sich an der Antwort des untersuchten Systems. Bei der Simulation mittels spektraler Darstellung des Erregungsprozesses wird das System an diskreten Frequenzen angeregt. Ausgewertet wird z.B. die Verschiebung an einer Stelle einer mechanischen Struktur, daraus wird ein Leistungsspektrum geschätzt. Ein Leistungsspektrum ist nur definiert für stationäre Prozesse, bei bestimmten Arten von nichtlinearen Systemen aber kann die Antwort instationär sein (z.B. zunehmender Drift – Anteil in der Verschiebung eines hysteretischen Systems). Dennoch ist der Algorithmus zur Bestimmung des Leistungsspektrums anwendbar. Auch wenn das Ergebnis streng genommen kein Leistungsspektrum darstellt, sind i.d.R. deutliche Spitzen erkennbar. Sie geben eine Information darüber, welche Frequenzbereiche den größten Beitrag zur gesamten Varianz des Prozesses der Systemantwort leisten, bzw. für welche die Anregung am wenigsten gedämpft wird. Durch gezielte Anregung in eben diesen Frequenzbereichen ist es am effektivsten möglich, die Varianz der Systemantwort und damit die Wahrscheinlichkeit der Überschreitung einer Schranke zu erhöhen.

Erste Experimente mit dem *Iterative Fast Monte Carlo* – Verfahren, s.S. 14, stießen auf numerische Schwierigkeiten: Je höher die Dimension des Zufallsvektors, desto ex-

tremere Werte können die Verhältnisse der Dichtefunktionen, Gl. (2.13), annehmen. Bei Zufallsprozessen ist die Zahl der involvierten Zufallsvariablen naturgemäß sehr groß. Deshalb besteht der erste Schritt des hier vorgestellten Simulationsverfahrens aus einer Auswahl der Zufallsvariablen. Das Auswahlverfahren wird in Abschnitt 4.2 vorgestellt. Dann werden die Parameter der so ausgewählten Variablen dem *Importance Sampling* – Konzept entsprechend angepaßt, wie in Abschnitt 4.3 erläutert. Die gesamte Prozedur kann i.d.R. automatisch ohne Benutzerinteraktion ablaufen. Es werden zwei Simulationsläufe mit unterschiedlichem Stichprobenumfang durchgeführt. Anhand der Ergebnisse der ersten „Pilotsimulation“ werden die Auswahl der Variablen und Anpassung der Simulationsdichte vorgenommen, daraufhin wird der zweite Lauf, das eigentliche *Importance Sampling*, gestartet.

Die Pilotsimulation dient also lediglich dazu, das „Leistungsspektrum“ der Systemantwort zu schätzen, das bedeutet eine Beschreibung des Antwortprozesses im Sinne statistischer Momente bis zur zweiten Ordnung. Ein relativ geringer Stichprobenumfang, in der Größenordnung von  $N = 100$ , genügt, um eine ausreichend genaue Schätzung des Leistungsspektrums zu erhalten. Das verwendete Simulationsmodell ist hierfür nicht wesentlich. Das Modell mit zufälligen Phasenwinkeln, Gl. (3.82), erscheint vorteilhaft wegen der geringeren Zahl der Zufallsvariablen.

## 4.2 Auswahl der Variablen

Der erste Schritt des Simulationsverfahrens ist eine Auswahl der Anzahl der Zufallsvariablen, um die oben erläuterten numerischen Probleme bei hoher Dimension zu vermeiden. Dabei soll die Auswahl der Zufallsvariablen die Frequenzbereiche erfassen, für welche die Werte des Leistungsspektrums der Systemantwort am größten sind. So soll die Varianz der Systemantwort im Vergleich zur Anregung durch den Originalprozeß möglichst wenig verändert werden. Hierzu wurden mehrere Ansätze verfolgt und anhand der Testbeispiele, Abschnitt 4.4, beurteilt. Referenz war jeweils eine einfache Monte Carlo Simulation. Die Ergebnisse der Testbeispiele werden später nur für die endgültige Entwicklungsstufe des Simulationsverfahrens dargestellt, nicht für die verworfenen Varianten. Nachfolgend werden die Ansätze im einzelnen erläutert.

Die Generierung der Zeitreihe erfolgt durch diskrete Fouriertransformation aus den simulierten zufälligen Amplituden bzw. Phasenwinkeln, s. S. 59. Die Verwendung des FFT – Algorithmus erfordert dabei einen konstanten Frequenzschritt. Der Verzicht auf FFT bedeutet aber keinen wesentlichen Verlust an Effizienz, berücksichtigt man den Rechenzeitbedarf der Strukturanalyse. Dadurch wird aber eine flexible Diskretisierung des von der Simulation erfaßten Frequenzbereichs möglich. Es wurde ein Algorithmus für eine adaptive Diskretisierung entwickelt. Nach der Pilotsimulation wird das Leistungsspektrum der Systemantwort ermittelt und in eine vorgegebene Anzahl flächengleicher Frequenzbereiche aufgeteilt. Der zweite Simulationslauf erfolgt mit dem Modell der zufälligen Amplituden, Gl. (3.74) bzw. Gl. (3.75). Aus den Teilflächen werden die

statistischen Momente der Amplituden für den zweiten Simulationslauf bestimmt und die entsprechenden Frequenzen zugewiesen. Die Frequenzschritte werden automatisch feiner in den Bereichen der Spitzen des Leistungsspektrums. Jedes der Frequenzbänder hat nun den gleichen Anteil an der Varianz des Prozesses der Systemantwort. Bei einer zu geringen Anzahl an Zufallsvariablen ergab sich eine sehr schlechte Repräsentierung des Prozesses und starke Abweichungen der Erstüberschreitenswahrscheinlichkeiten von der Referenz. Bei höherer Anzahl dagegen geht der Vorteil der Reduzierung der Dimension verloren.

Für die Anwendung des *Importance Sampling* auf das gemischte Simulationsmodell nach Gl. (3.75) sind nur die Amplituden von Bedeutung, die Phasenwinkel müssen gleichverteilt sein im Intervall  $[-\pi, \pi)$ . Aus diesem Gedanken folgt eine weitere Form der adaptiven Diskretisierung. Zunächst wird ein konstanter Frequenzschritt für eine gute spektrale Darstellung des zu simulierenden Prozesses gewählt. Wiederum wird das Leistungsspektrum der Systemantwort nach der ersten Simulation in gleiche Flächen aufgeteilt. Im zweiten Simulationslauf wird die gleichmäßige Diskretisierung und damit die Zahl der Zufallsvariablen für die Phasenwinkel beibehalten. Den zusammengefaßten Frequenzbereichen wird aber die gleiche zufällige Amplitude zugewiesen. Hierdurch ergibt sich eine Reduzierung der Dimension. Ist der Erregungsprozeß ein weißes Rauschen, und werden die Mittelwerte und Standardabweichungen der Amplituden entsprechend einem einzelnen Frequenzband bestimmt wie im ersten Lauf, dann kann gezeigt werden, daß die Mittelwerts- und Korrelationsfunktion des so simulierten Prozesses denen des Prozesses nach Gl. (3.75) identisch sind. Tatsächlich werden aber verschiedene zufällige Ereignisse (mit bestimmten Wahrscheinlichkeiten auftretende Realisationen mehrerer Zufallsvariablen) durch ein Ereignis (einer Amplitude) ersetzt. Die Simulationsergebnisse ergaben sehr starke Abweichungen von der Referenz in den statistischen Momenten höherer Ordnung und in den Erstüberschreitenswahrscheinlichkeiten.

Die beiden bisher beschriebenen Versionen der adaptiven Diskretisierung wurden verworfen. Das nachfolgend beschriebene Auswahlverfahren kommt als Bestandteil des Simulationskonzepts zur Anwendung. In Abschnitt 3.3.2 werden die beiden Simulationsmodelle — das Modell mit zufälligen Phasenwinkeln, Gl. (3.82), und das Modell mit zufälligen Amplituden, Gln. (3.74) bzw. (3.75) — diskutiert. Nur letzteres erlaubt die Anwendung des *Importance Sampling*, außerdem ist der damit simulierte Prozeß streng normalverteilt und damit im Wertebereich unbeschränkt, was für die Berechnung von Erstüberschreitenswahrscheinlichkeiten wichtig ist. Das erste Modell hat den Vorteil, daß es weniger Zufallsvariablen benötigt. Beide Modelle haben einen konstanten Mittelwert von Null und identische Korrelationsfunktion. Im zweiten Simulationslauf wird quasi eine Superposition beider Modelle verwendet. Ausgangspunkt ist wiederum eine ausreichend feine Diskretisierung des berücksichtigten Frequenzbereichs mit konstantem Frequenzschritt. Nach der Pilotsimulation werden die größten Werte des Leistungsspektrums der Systemantwort und die dazugehörigen Frequenzen ermittelt. Die Diskretisierung bleibt im zweiten Simulationslauf erhalten, jedoch werden für eine

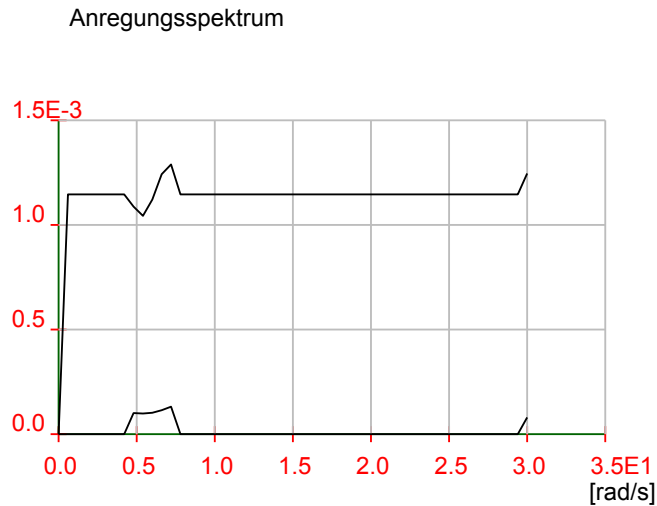


Bild 4.1: Leistungsspektrum eines weißen Rauschens, simuliert nach Gl. (4.1) (obere Kurve) und statistischer Fehler (unten). Zufällige Amplituden im Bereich 4,8 bis 7,2rad/s.

vorgegebene Anzahl derjenigen Frequenzen mit den größten Werten im Leistungsspektrum zufällige Amplituden eingeführt, die übrigen Bereiche werden weiterhin mit dem Modell der zufälligen Phasen simuliert. Sei  $n$  die Gesamtzahl der Frequenzbänder und  $a$  die Zahl der zufälligen Amplituden, wird die Simulationsformel wie folgt angeschrieben:

$$\begin{aligned}
 X_n(t) &= \sum_{i=1}^{n-a} \sqrt{2}\sigma_i \cos(\omega_i t + \Phi_i) \\
 &\quad + \sum_{k=1}^a A_k \cos(\omega_k t + \Phi_k) \\
 \omega_i &\neq \omega_k
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Die Parameter  $\sigma_i$  sind definiert wie in Gl. (3.71), die Amplituden  $A_k$  entsprechen Gln. 3.76 ff., und die Phasenwinkel  $\Phi_{i,k}$  sind gleichverteilt in  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . Alle Zufallsvariablen sind voneinander unabhängig.

Gegenüber dem Modell der zufälligen Phasenwinkel werden hier mit den Amplituden zusätzliche Zufallsvariablen eingeführt. Auf diese Weise bleibt der gesamte Frequenzbereich der Simulation mit der gleichen Diskretisierung erhalten. Nur an denjenigen Frequenzen, für die eine starke Reaktion der Struktur zu erwarten ist, wird durch Anwendung von *Importance Sampling* auf die Amplituden bei der zweiten Simulation besonders stark angeregt. Zur Verdeutlichung ist in Bild 4.1 das Leistungsspektrum für ein willkürliches Beispiel eines simulierten weißen Rauschens abgebildet. Man er-

kennt im Frequenzbereich von 4,8 bis 7,2rad/s die statistische Unsicherheit infolge der zufälligen Amplituden, während in anderen Frequenzbereichen die spektrale Dichte konstant ist, da hier deterministische Amplituden entsprechend der ersten Zeile von Gl. (4.1) eingesetzt wurden. Insgesamt entspricht das Leistungsspektrum der Vorgabe. Zeigt das Leistungsspektrum der Systemantwort nur eine signifikante Spitze, genügt eine einfache Sortierung und Auswahl der größten Werte. Bei mehreren dominanten Frequenzen ist u. U. eine manuelle Auswahl durch den Benutzer erforderlich, um alle relevanten Bereiche zu erfassen. Die Testbeispiele in Abschnitt 4.4 geben weitere Hinweise zur Auswahl der Variablen.

### 4.3 Adaption der Simulationsdichte

Auf Seite 13 wird eine ideale Simulationsdichte gezeigt, für welche die Varianz des Schätzers der Versagenswahrscheinlichkeit zu Null wird. Die meisten *Importance Sampling* – Verfahren bezwecken eine Annäherung dieser idealen Simulationsdichte. Die Simulationsvariablen bilden dann eine Grundgesamtheit mit einer wesentlich höheren Versagenswahrscheinlichkeit im Vergleich zu den originalen Basisvariablen. Das hier entwickelte *Spectral Importance Sampling* verfolgt einen anderen Ansatz. Durch Erhöhung der Varianz des Erregungsprozesses wird auch die Reaktion des untersuchten Systems entsprechend stärker. Dadurch wird die Wahrscheinlichkeit der Überschreitung einer Schranke erhöht. Das Leistungsspektrum der Systemantwort gibt, wie bereits erwähnt, Hinweise auf die Frequenzen, für die eine stärkere Anregung den größten Effekt erzeugt. Deshalb soll hier die Adaption der Simulationsvariablen am Leistungsspektrum orientiert werden. Es werden quasi Resonanzeffekte erzeugt.

Die Adaption erfolgt bei dem zweistufigen Simulationsverfahren wiederum nach dem ersten Lauf, und ggf. nach der Auswahl der Frequenzen, für die zufällige Amplituden eingeführt werden, wie im vorigen Abschnitt dargestellt. Die Simulationsformel für diese Frequenzen entspricht der Gl. (3.75). Programmtechnisch werden alle Zufallsvariablen durch Mittelwerte und Standardabweichungen definiert. Die Adaption der Parameter erfolgt durch additive Terme, die proportional dem Leistungsspektrum der Antwort  $g_{YY}(\omega)$  sind. Für die Amplitude  $A_k$  zur Frequenz  $\omega_k$  werden die Parameter der Variablen, die zur Generierung der Zufallszahlen verwendet werden, wie folgt gesetzt:

$$\mu_{A_k} := \mu_{A_k} + p \cdot g_{YY}(\omega_k) \cdot \frac{\max_{i=1}^n \mu_{A_i}}{\max_{i=1}^n g_{YY}(\omega_i)} \quad (4.2)$$

$$\sigma_{A_k} := \sigma_{A_k} + p \cdot g_{YY}(\omega_k) \cdot \frac{\max_{i=1}^n \sigma_{A_i}}{\max_{i=1}^n g_{YY}(\omega_i)} \quad (4.3)$$

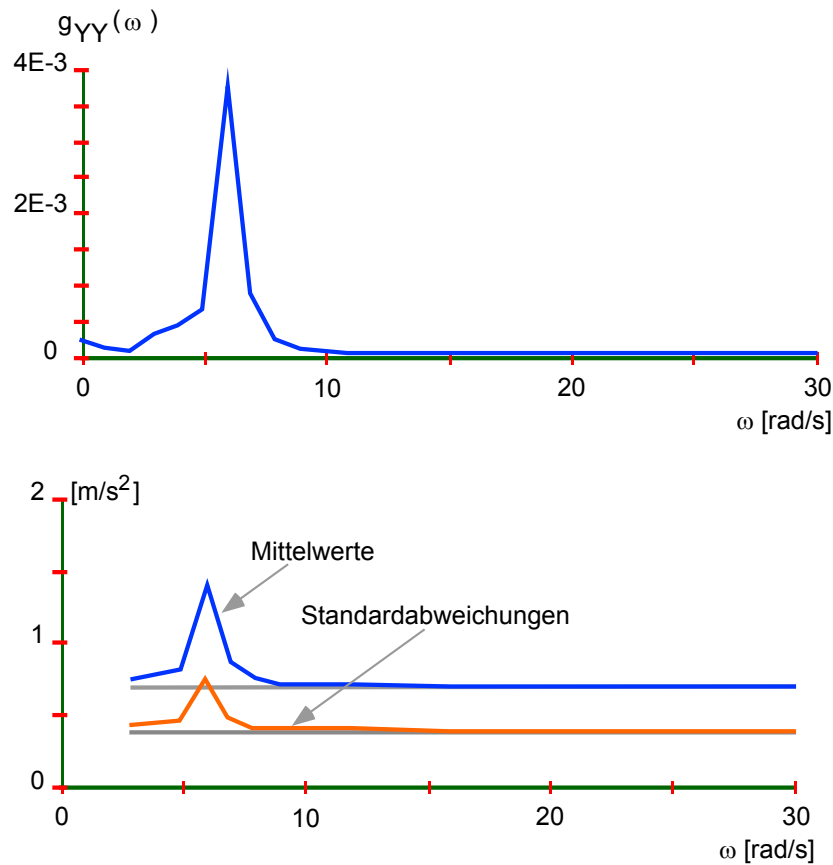


Bild 4.2: Beispiel für ein Leistungsspektrum und schematische Darstellung der Adaption der Parameter für  $p = 1$  in Gln. (4.2) ff. (unten).

Durch die Addition behalten die Mittelwerte und Standardabweichungen mindestens die Werte der Originalvariablen. Multiplikation mit kleinen Faktoren in gewissen Frequenzbereichen würde dagegen zu einer schlechteren Darstellung dieser Frequenzbereiche und des Prozesses insgesamt führen. Die Verhältnisse der Simulationsparameter zu den Originalwerten sind für die Mittelwerte und Standardabweichungen jeweils gleich, also  $\mu_{A_k}^{(Sim.)} / \mu_{A_k}^{(Orig.)} = \sigma_{A_k}^{(Sim.)} / \sigma_{A_k}^{(Orig.)}$ . Das ist gleichbedeutend mit einer Erhöhung der Vorfaktoren  $\sigma_k$  in Gl. (3.74). Dadurch bleibt erstens der simulierte Prozeß normalverteilt, zweitens bewirkt dies eine maximale Vergrößerung der Hüllkurve des Prozesses, weil die Amplituden der cos- und sin- Terme gleichermaßen vergrößert werden. So wird der maximale Effekt des *Importance Sampling* erzielt.

In Gln. (4.2) ff. erkennt man, daß die Inkremente auf den Maximalwert des Leistungsspektrums und die maximalen vorhandenen statistischen Momente (bei nichtweißem Rauschen) bezogen sind. Der Faktor  $p$  legt die maximale Erhöhung der Momente fest. Bild 4.2 zeigt ein typisches Leistungsspektrum eines nichtlinearen Ein-

massenschwingers und schematisch die darauf basierende Adaption der statistischen Momente für  $p = 1$  im Vergleich zu den ursprünglichen Werten. Objektive Kriterien für die Wahl dieses Faktors sind schwer zu finden. In den Testbeispielen des folgenden Abschnitts wurden aber Erfahrungswerte gesammelt, die auf Anwendungen durchaus übertragbar sind.

## 4.4 Testbeispiele zu den Abschnitten 4.2 und 4.3

Das Simulationsverfahren, das sich aus Kombination der Entwicklungen in den Abschnitten 4.2 und 4.3 ergibt, wurde auf kleine Beispiele angewendet. Es wurden zum einen die aus Abschnitt 3.5 bekannten konservativ–nichtlinearen Beispiele berechnet, zum anderen wurde ein drittes nichtlineares Beispiel eingeführt, welches ebenfalls dem *Benchmark – Test* [73] entnommen ist. Die Testbeispiele dienen zum einen dazu, die Leistungsfähigkeit des Simulationsverfahrens zu demonstrieren, zum anderen sollten Kriterien für die optimale Wahl der Zahl der zufälligen Amplituden und des Erhöhungsfaktors  $p$  in Gln. (4.2) ff. gefunden werden.

Das dritte Beispiel ist wiederum ein Einmassenschwinger, diesmal mit hysteretischem Gesetz für die Rückstellkraft. In der Bewegungsgleichung  $m\ddot{X} + c\dot{X} + k(X)X = F(t)$  sind  $m = 1,0 \cdot 10^6 \text{kg}$  und  $c = 0,438 \cdot 10^6 \text{kg} \cdot \text{s}$ . Die Steifigkeit ist gegeben durch

$$k(x) = \alpha \cdot k \cdot x(t) + (1 - \alpha)k \cdot q(t) \quad (4.4)$$

mit

$$\frac{dq}{dt} = \dot{x}(t) \cdot h(q, \dot{x})$$

$$h(q, \dot{x}) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } |q| < q_y \text{ oder } \dot{x}q \leq 0 \\ \frac{|q| - q_p}{q_y - q_p} & \text{wenn } |q| \geq q_y \text{ und } \dot{x}q > 0 \end{cases}$$

Die Größe  $k$  ist daher die Steifigkeit im linearen Bereich,  $kq_y$  ist die Kraft, bei deren Erreichen Fließen einsetzt und  $kq_p$  ist die maximale Kraft. Die Funktion ist in Bild 4.3 dargestellt. Das Verhalten des Einmassenschwingers ähnelt dem speziellen Finiten Element, das zur Schwingungsdämpfung einer Brücke in Kapitel 5 zur Anwendung kommt, s. Anhang C. Die weiteren Parameter des Einmassenschwingers sind hier  $k = 30,0 \cdot 10^6 \text{N/m}$ ,  $q_y = 0,007 \text{m}$ ,  $q_p = 0,01 \text{m}$  und  $\alpha = 0,05$ . Die Anregung ist ein normalverteiltes weißes Rauschen  $F(t) = mW(t)$  mit der Intensität  $I_W = 0,002 \text{m}^2/\text{sec}^3$ . Zur Berechnung der Antwort des Einmassenschwingers wurde wiederum eine eigene Routine in `SLang` programmiert, welche das Runge – Kutta – Verfahren 5. Ordnung anwendet. Die sich aus der Fourier – Transformation ergebenden Zeitschritte wurden in 40 Unterschritte geteilt.

Eine exakte Lösung für die Verteilungsfunktion der Systemantwort ist bei diesem



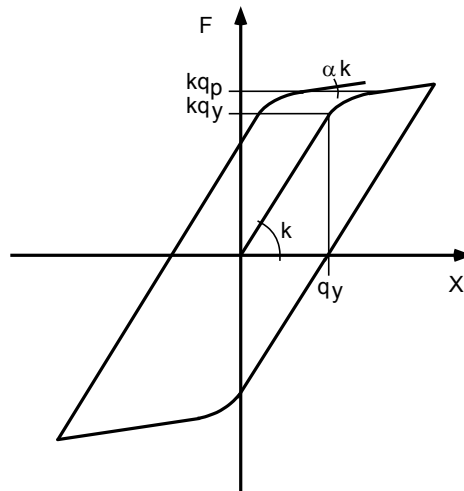


Bild 4.3: Schematische Darstellung des Kraft – Verschiebungs – Gesetzes nach Gl. (4.4).

Beispiel nicht bekannt. Alle drei Testbeispiele wurden, wie es auch Ziel der Entwicklung des Simulationsverfahrens ist, im Hinblick auf Erstüberschreitenswahrscheinlichkeiten ausgewertet. Auch hierfür ist keine exakte Lösung bekannt. Stattdessen wurde als Referenz eine einfache Monte Carlo Simulation durchgeführt. Der Stichprobenumfang der Referenzsimulation ist  $N = 100000$ , in den zwei Läufen des *Spectral Importance Sampling* wurden  $N = 100$  bzw.  $N = 1000$  Realisationen generiert. Der Gesamtaufwand — ausgehend von der Annahme, daß die benötigte Rechenzeit annähernd proportional dem Stichprobenumfang ist — beträgt also mit  $N = 1100$  nur 1,1% dem der einfachen Simulation. Aufgrund der Erfahrungen aus Abschnitt 3.5 wurden die obere Trennfrequenz  $\hat{\omega} = 30 \text{ rad/s}$  und das Frequenzintervall  $\Delta\omega = 30/50 = 0.6 \text{ rad/s}$  gewählt. Aus der inversen FFT ergibt sich die Länge der Zeitreihe zu  $T = 10,5 \text{ s}$  und der Zeitschritt  $\Delta t \approx 0,105 \text{ s}$ . Zur Berechnung der Antwort wurde das betrachtete Zeitintervall  $T$  durch Aneinanderhängen der Erregungszeitreihen verdoppelt, zur Auswertung wurde die zweite Hälfte der Antwort extrahiert. So wurde das Problem der Periodizität des Prozesses vermieden und eine von den Anfangsbedingungen unabhängige Systemantwort ausgewertet. Variiert wurden folgende Parameter:

Zahl der zufälligen Amplituden  $a = 1; 3; 5; 10; 50,$

Erhöhungsfaktor in Gln. (4.2) ff.  $p = 0; 0,5; 1; 1,5; 2.$

Als Auswertung wurde die auf  $T$  bezogene Erstüberschreitenswahrscheinlichkeit über die Schranke  $\hat{x}$  aufgetragen. Für die Einschätzung der „Qualität“ des Ergebnisses erschien eine visuelle Beurteilung der Übereinstimmung mit der Referenzlösung als ausreichend. In den Bildern 4.4 bis 4.6 auf den Seiten 95 ff. sind jeweils ein Beispiel für gute und schlechte Anpassung zu sehen. Zusätzlich sind für die Parameter des gu-

ten Beispiels das Leistungsspektrum und die Mittelwerte und Standardabweichungen der Simulationsdichte im zweiten Lauf abgebildet. Die Verläufe der über die Schranke  $\hat{x}$  aufgetragenen Versagenswahrscheinlichkeiten sind dabei, wie die Referenzlösung zeigt, oberhalb der Grenze  $x_1$  des linearen Verhaltens stetig und ohne Krümmungswechsel. Ist eine Änderung dieser Tendenz im Kurvenverlauf erkennbar, sollten über eine solche Unstetigkeit hinaus die Ergebnisse verworfen werden. Ist der Kurvenverlauf zwar stetig, hat aber eine grundsätzlich andere Tendenz als die Referenz, hat das Simulationsverfahren versagt, denn derartige Fehler sind nur mit Hilfe der Referenzlösung erkennbar, die bei praktischen Anwendungen nicht verfügbar ist. Oft fluktuieren die Kurven stark um die Referenz herum, folgen ihr aber im Trend. Solche Ergebnisse sind noch akzeptabel und eine Folge der numerischen Unsicherheiten beim *Importance Sampling* mit vielen Zufallsvariablen. Eine erfolgreiche Simulation folgt möglichst gut der Referenzlösung und geht unter Umständen über deren Wertebereich hinaus. Eine weitere Beurteilung der Effizienz des *Importance Sampling* – Verfahrens geschah durch Ermittlung der kleinsten erreichten Wahrscheinlichkeit und der größten Schranke  $\hat{x}$  an der Stelle, an welcher der statistische Fehler nach Gl. (2.8) erstmals 100% erreicht.

Darüber hinaus sollten Kriterien gefunden werden, anhand deren ohne großen Berechnungsaufwand, also ohne Strukturanalyse, die zu erwartende Qualität des Ergebnisses oder auch das Versagenspotential einer Realisation des Prozesses abgeschätzt werden kann. Da der hauptsächliche Rechenzeitbedarf in der Strukturanalyse liegt, soll mit dem ersten Kriterium entschieden werden, ob die Simulation, also die reine Generierung der Zufallsprozesse mit eventuell anderen Parametern wiederholt werden soll, um bessere Ergebnisse zu erzielen. Das zweite Kriterium könnte helfen, die einzelnen Realisationen des Prozesses dahingehend zu zensieren, daß nicht für alle generierten Eingangsprozesse eine Strukturanalyse durchgeführt wird, sondern nur für diejenigen, für die der Versagensfall zu erwarten ist. Hiermit könnte weiterer Rechenaufwand gespart werden. Ein strenges Kriterium dieser Art impliziert natürlich das Vorhandensein einer analytischen Lösung, aber ein empirisches, auch nur näherungsweise Kriterium ist denkbar. Folgende Betrachtungen wurden angestellt:

- Plot der Verteilungsfunktion jeder Realisation der Erregung und Markierung derjenigen Realisationen, die zum Versagen führen,
- Plot der aus der gesamten Stichprobe geschätzten Verteilungsfunktion der Erregung im Vergleich zur Referenzsimulation,
- Plot des aus der gesamten Stichprobe geschätzten Leistungsspektrums der Antwort und seines statistischen Fehlers,
- Auswertung von Mittelwert und Variationskoeffizient der *Importance Sampling* – Gewichte  $\frac{f_{\mathbf{x}}(y_i)}{h_{\mathbf{y}}(y_i)}$ , vgl. Gl. (2.13),
- Auftragen jeweils der Varianz und des Maximums der Erregung über dem Versagensindikator  $I(g(\mathbf{x}))$ , vgl. Gl. (2.2).

Für eine Zensierung der simulierten Erregungsprozesse konnte kein brauchbares Kriterium gefunden werden. Die Auswertung der Parameterstudien ergab auch keine allgemeingültigen optimalen Werte für die Zahl der zufälligen Amplituden  $a$  und den Erhöhungsfaktor  $p$ . In allen Beispielen zeigte sich aber, daß bestmögliche Ergebnisse erzielt werden, wenn der Mittelwert der *Importance Sampling* – Gewichte möglichst nahe 1 ist — eine Forderung für die Erwartungstreue des Schätzers — und deren Variationskoeffizient einen Betrag um 3 aufweist. Letzteres ist keine strenge Forderung, sondern mehr ein Erfahrungswert. Ein zu großer Wert für  $p$ , den man möglicherweise wählt um hohe Werte der Strukturantwort zu erreichen, ist nicht zu empfehlen. Diese Größen können vor der Strukturanalyse aus der Stichprobe ermittelt und die Parameter  $a$  und  $p$  gegebenenfalls angepaßt werden.

Die Anwendung des *Spectral Importance Sampling* auf Beispiel 1 ist ausgesprochen erfolgreich. Die Zahl der zufälligen Amplituden ist hier optimal gewählt, wenn die zum Spitzenwert des Leistungsspektrums gehörige Frequenz, welche nah der Eigenfrequenz des linearen Systems liegt, gut erfaßt wird. Wegen der schmalen, stark ausgeprägten Spitze, vgl. Bild 4.4–c genügen hierfür  $a = 3$  bis 5 Zufallsvariablen. Die Anpassung der statistischen Momente ist in Bild 4.4–d für  $a = 3$  und  $p = 1,5$  dargestellt. Die Originalwerte für Mittelwert und Standardabweichung sind jeweils  $\mu_{A_k} = 0,033$  und  $\sigma_{A_k} = 0,017$ . Bild 4.4–a zeigt die Erstüberschreitenswahrscheinlichkeiten für  $a = 3$  und  $p = 1,5$ . Hier ist nicht nur die Übereinstimmung mit der Referenz sehr gut, deren Wertebereich wurde sogar noch weit überschritten. Im Vergleich dazu wird mit  $a = 50$ , Bild 4.4–b, schon bei einer geringeren Schranke  $\hat{x}$  ein Standardfehler von 100% erreicht. Der weitere Kurvenverlauf weicht von der bisherigen Tendenz stark ab (signifikant andere Krümmung), ist also nicht vertrauenswürdig.

Beispiel 2 erwies sich als numerisch schwieriger. Es muß allerdings eingeräumt werden, daß bei realen Anwendungen ein vergleichbares System mit einem weiten Bereich mit Steifigkeit Null kaum vorkommt. Auch wenn die Ergebnisse stärker fluktuieren als die Referenzlösung, ist das Verfahren auch hier erfolgreich anwendbar. Mit  $a = 10$  und  $p = 1$ , Bild 4.5–a wird ein ähnliches Ergebnis erzielt wie mit der wesentlich aufwendigeren „einfachen“ Monte Carlo Simulation. Es gilt auch hier den im Leistungsspektrum besonders ausgeprägten Frequenzbereich zu erfassen, der in Bild 4.5–c erkennbar ist. Da dieser breiter ist als im vorigen Beispiel, vgl. Bild 4.4–c, ist die optimale Zahl der zufälligen Amplituden mit  $a = 10$  gewählt. Eine zu geringe Zahl bringt unter Umständen irreführende Ergebnisse, Bild 4.5–b ist hierfür ein Beispiel. Wegen der etwas höheren Zahl der zufälligen Amplituden ist der optimale Erhöhungsfaktor  $p$  geringer als im vorigen Beispiel, hier mit  $p = 1$  gewählt. Bild 4.5–d zeigt wiederum die Parameter für die ausgewählten Amplituden (Originalwerte:  $\mu_{A_k} = 0,021$  und  $\sigma_{A_k} = 0,011$ ).

Auch für das hysteretische System in Beispiel 3 sind die Parameter vorsichtig zu wählen. Gute Ergebnisse werden erzielt, wenn alle Amplituden als Zufallsvariable eingeführt werden, in Bild 4.6–a z.B. für  $p = 1$ . Die adaptierten statistischen Momente der Amplituden, Bild 4.6–d, streben gegen die Originalwerte in den Bereichen geringer

spektraler Dichte. Mit einer zufälligen Amplitude ist die Übereinstimmung mit der Referenz gut, aber der Effekt des *Importance Sampling* gering. Dagegen können  $a = 3, 5$  und  $10$  irreführende Ergebnisse bewirken, wie in Bild 4.6–b beispielhaft gezeigt. Der Erhöhungsfaktor darf nicht zu hoch gewählt werden. Wie in allen drei Beispielen zeigt die Erfahrung, daß  $p$  am besten so kalibriert wird, daß der Variationskoeffizient der *Importance Sampling* – Gewichte etwa gleich  $3$  ist.

Im Bild des Leistungsspektrums auf S. 100 fällt der hohe Wert bei Frequenz Null auf. Dieser sehr niederfrequente Anteil rührt von allmählich zunehmender bleibender Verschiebung des Systems her. Der Mittelwert des Ensembles der Systemantworten ist tatsächlich annähernd Null. Auch die Nullstellen der Hysterese (Rückstellkraft aufgetragen über der Verschiebung) wurden ausgewertet. Obwohl die Verschiebungen zu den Nullstellen der Rückstellkraft für eine einzelne Realisation einer Systemantwort einen deutlichen Mittelwert haben können, ist der aus dem Ensemble geschätzte Mittelwert gleich Null. Bild 4.6–e zeigt ein typisches Beispiel einer Systemantwort mit bleibender Verschiebung. Der Prozeß der Systemantwort kann also für den hier relativ kurzen Beobachtungszeitraum nicht als stationär angesehen werden. Auch wenn es deshalb streng genommen nicht das Leistungsspektrum ist, das zur Adaption der Variablen ermittelt wird, ist das Simulationsverfahren dennoch unverändert anwendbar. Versuche, zum Beispiel eine Trendbereinigung der Zeitreihe vorzunehmen, brachten keine Veränderung des Ergebnisses.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß das in den vorigen Abschnitten entwickelte Simulationsverfahren sehr gut geeignet ist, um Erstüberschreitenswahrscheinlichkeiten nichtlinearer Systeme unter stationärer zufälliger Erregung zu berechnen. Die hier durchgeführten Testbeispiele liefern Erfahrungswerte für die optimale Wahl der Kontrollparameter. Für Anwendungen mit grundsätzlich anderem Strukturverhalten sollten Vorstudien an kleinen Beispielen wie im vorliegenden Abschnitt durchgeführt werden, um mit geringen Rechenaufwand entsprechende Erfahrungen zu sammeln. Weitere Hinweise hierzu werden im folgenden Abschnitt gegeben.

Bild 4.4: Ausgewählte Ergebnisse für Beispiel 1, konservativ nichtlineares System ( $k_0 = 30.0 \cdot 10^6 N/m$ ,  $k_1 = 54.0 \cdot 10^6 N/m$ ), berechnet mit *Spectral Importance Sampling*. (Prob.: Wahrscheinlichkeit, Std.err.: Standardfehler, PlainMC: einfache Monte Carlo Simulation, I.S.: *Importance Sampling*.)

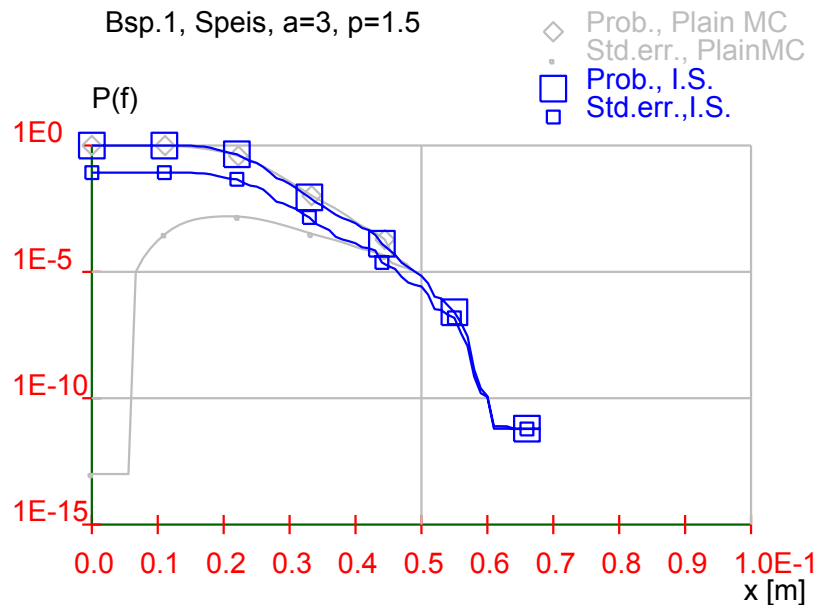


Bild 4.4–a: Erstüberschreitenswahrscheinlichkeit über der Schranke für  $a = 3$ ,  $p = 1,5$ .

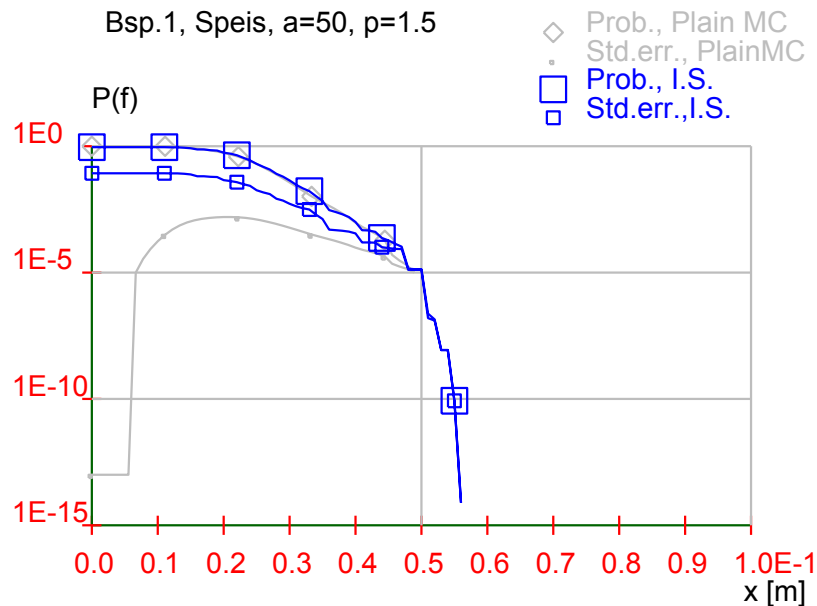


Bild 4.4–b: Erstüberschreitenswahrscheinlichkeit über der Schranke für  $a = 50$ ,  $p = 1,5$ .

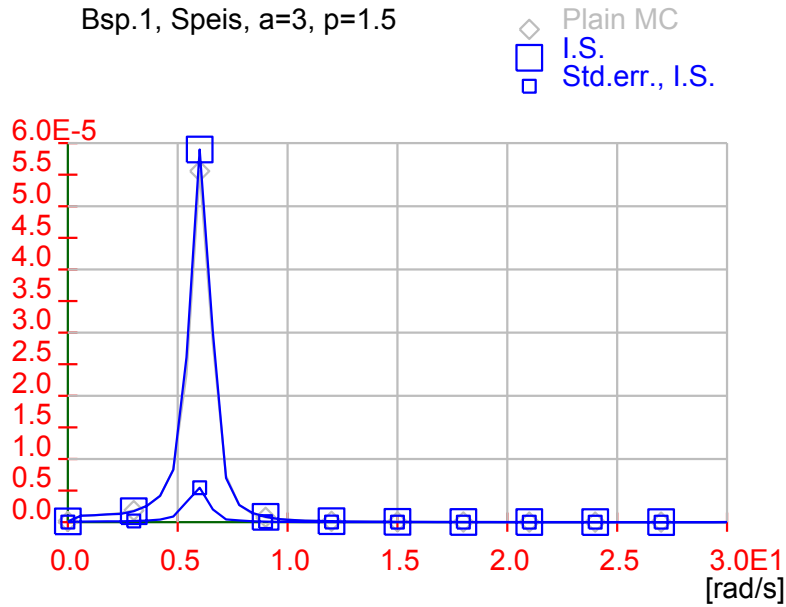


Bild 4.4–c: Leistungsspektrum der Strukturantwort.

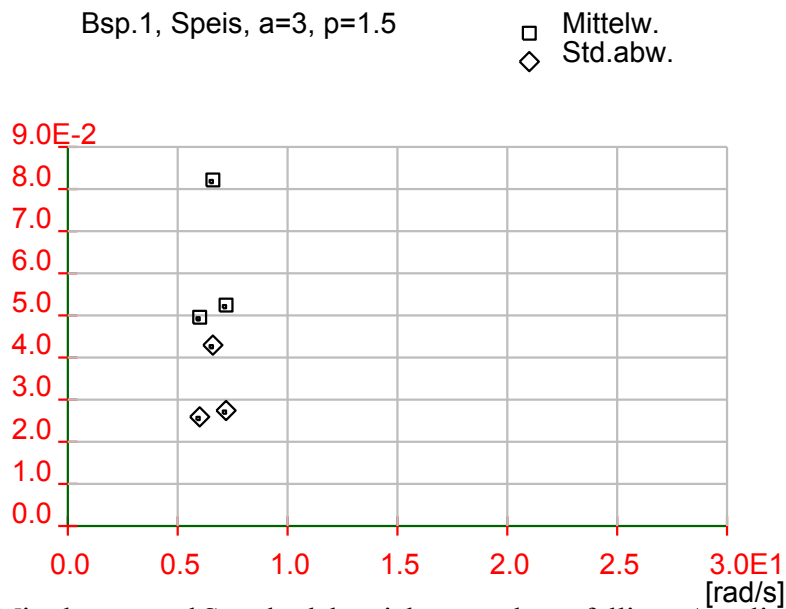


Bild 4.4–d: Mittelwerte und Standardabweichungen der zufälligen Amplituden im 2. Simulationslauf.

Bild 4.5: Ausgewählte Ergebnisse für Beispiel 2, konservativ nichtlineares System ( $k_0 = 30.0 \cdot 10^6 \text{ N/m}$ ,  $k_1 = 0$ ), berechnet mit *Spectral Importance Sampling*. (Prob.: Wahrscheinlichkeit, Std.err: Standardfehler, PlainMC: einfache Monte Carlo Simulation, I.S.: *Importance Sampling*.)

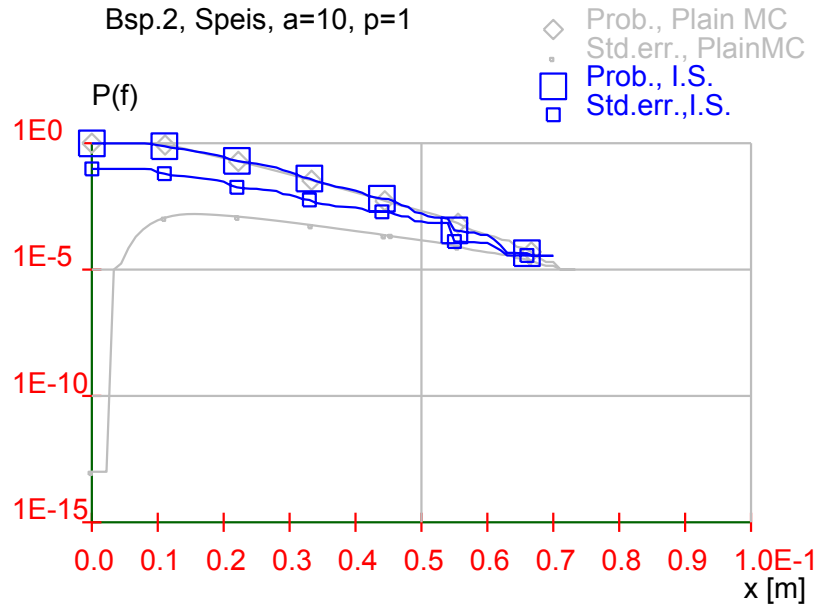


Bild 4.5–a: Erstüberschreitenswahrscheinlichkeit über der Schranke für  $a = 10$ ,  $p = 1$ .

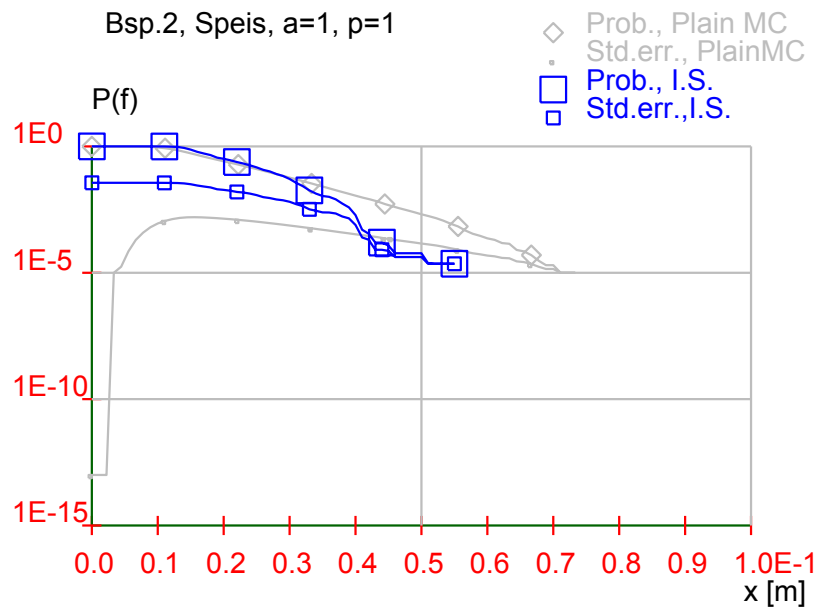


Bild 4.5–b: Erstüberschreitenswahrscheinlichkeit über der Schranke für  $a = 1$ ,  $p = 1$ .

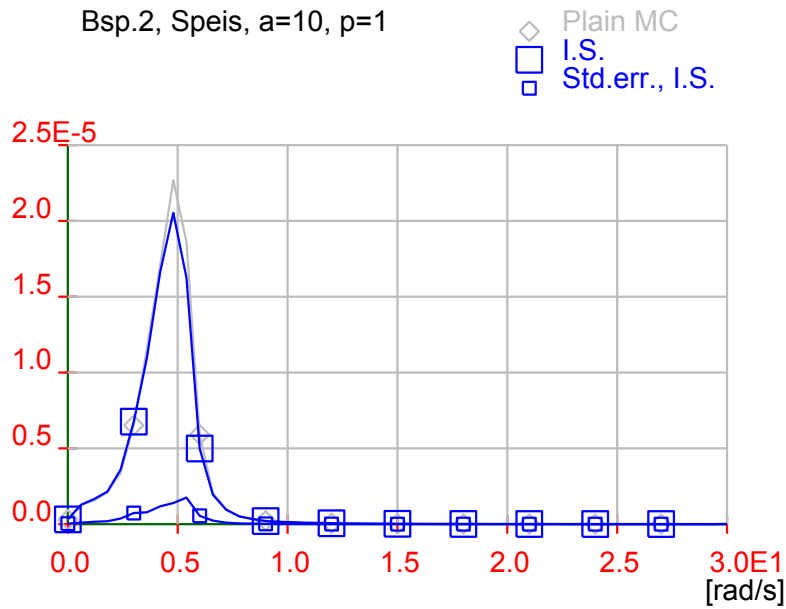


Bild 4.5–c: Leistungsspektrum der Strukturantwort.

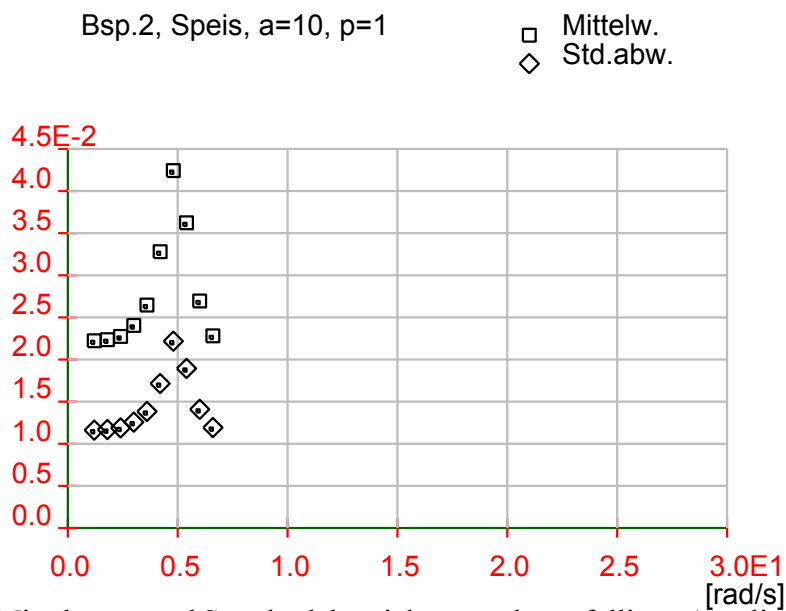


Bild 4.5–d: Mittelwerte und Standardabweichungen der zufälligen Amplituden im 2. Simulationslauf.



Bild 4.6: Ausgewählte Ergebnisse für Beispiel 3, hysteretisches System, berechnet mit *Spectral Importance Sampling*. (Prob.: Wahrscheinlichkeit, Std.err.: Standardfehler, PlainMC: einfache Monte Carlo Simulation, I.S.: *Importance Sampling*.)

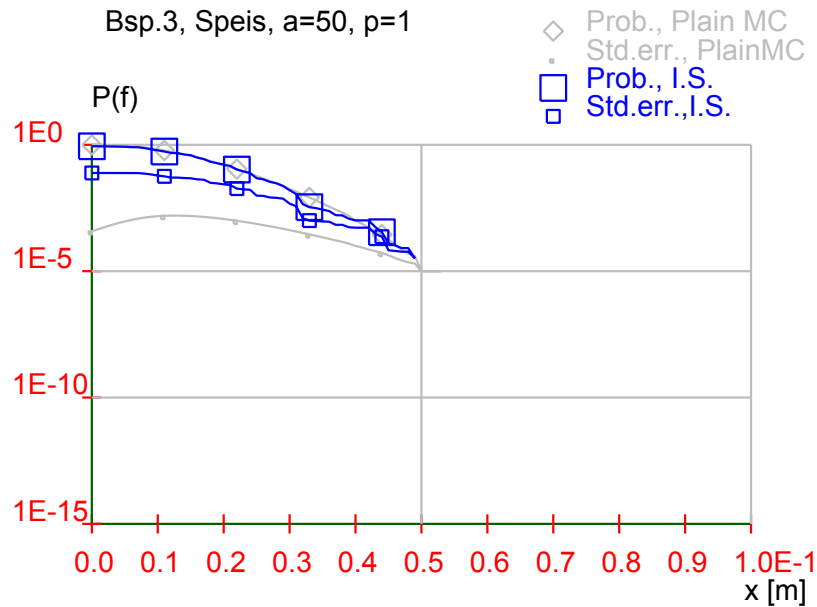


Bild 4.6–a: Erstüberschreitenswahrscheinlichkeit über der Schranke für  $a = 50$ ,  $p = 1$ .

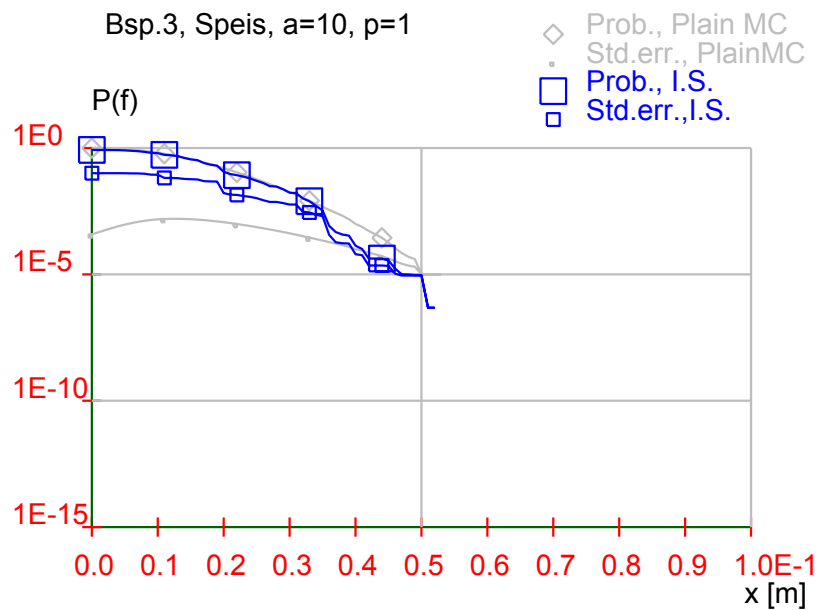


Bild 4.6–b: Erstüberschreitenswahrscheinlichkeit über der Schranke für  $a = 10$ ,  $p = 1$ .

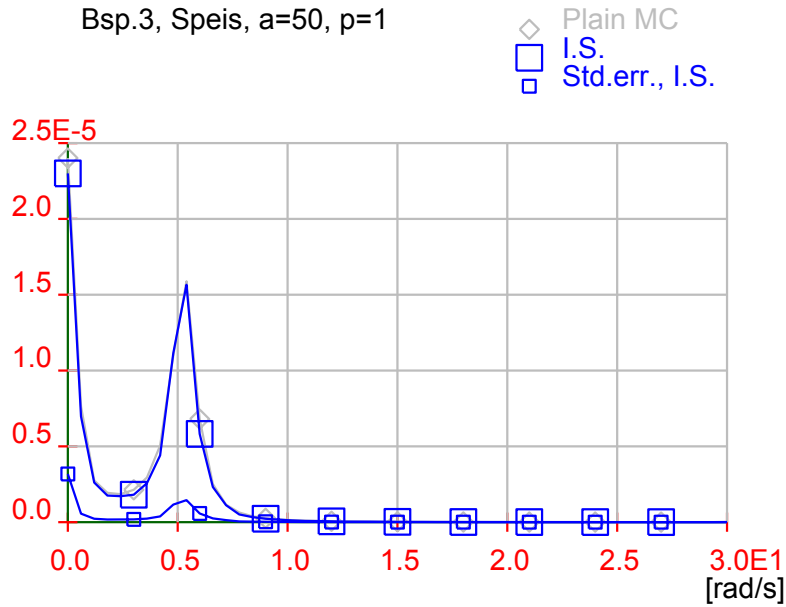


Bild 4.6–c: „Leistungsspektrum“ der Strukturantwort.

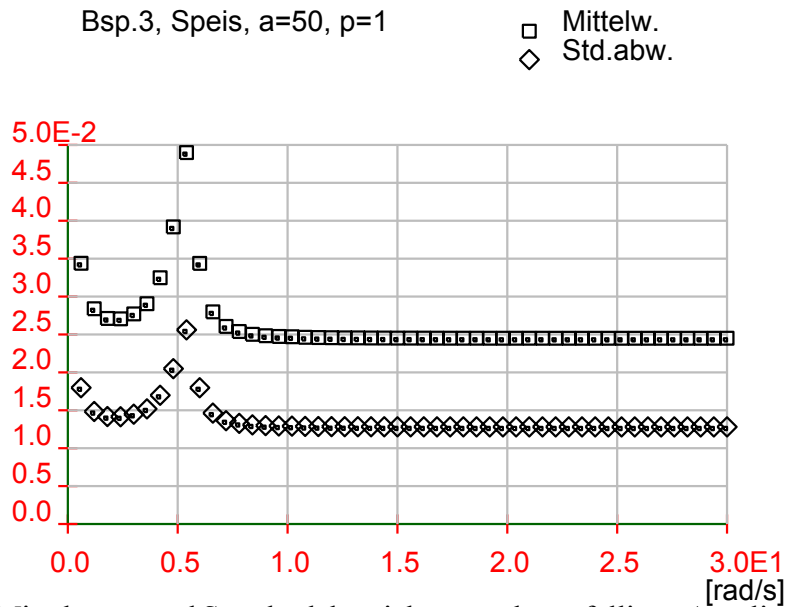


Bild 4.6–d: Mittelwerte und Standardabweichungen der zufälligen Amplituden im 2. Simulationslauf.

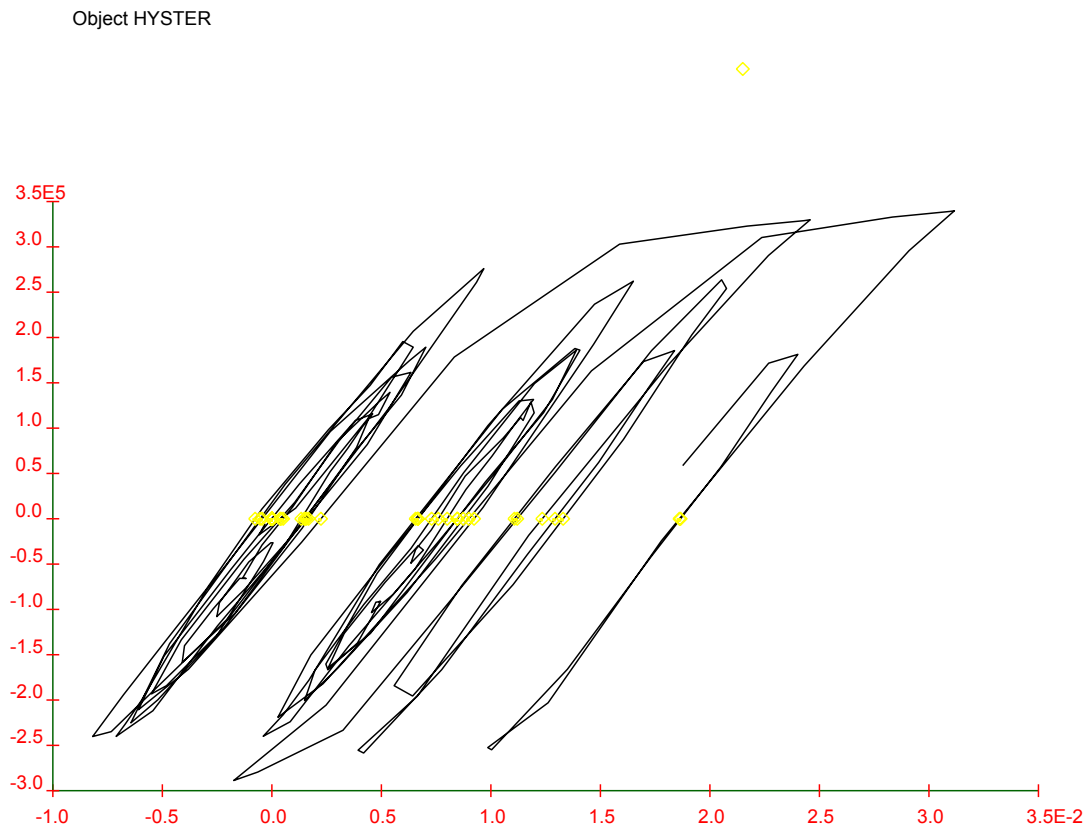
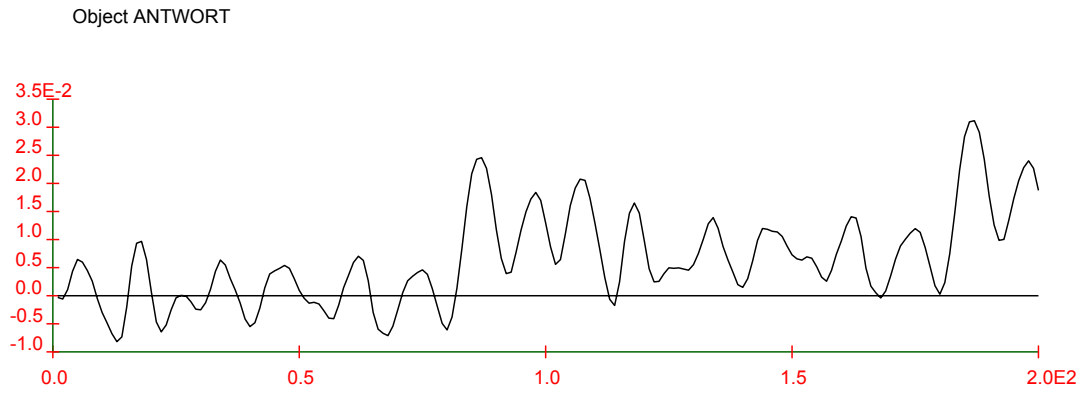


Bild 4.6–e: Verschiebungen (oben) und Hysterese (unten) einer Realisation der Strukturantwort.

## 4.5 Zusammenfassende Beschreibung der Vorgehensweise

Der Ablauf einer Zuverlässigkeitsanalyse mit der in den vorigen Abschnitten entwickelten Simulationsprozedur soll hier noch einmal zusammengefaßt werden. Sodann folgen aufgrund der Erfahrungen mit den Testbeispielen einige Hinweise zur generellen Vorgehensweise und der Wahl der Parameter. Die Simulationsprozedur umfaßt die folgenden Schritte (s. auch S. 60):

1. Bildung des mechanischen Modells und Festlegung des Grenzzustandskriteriums.
2. Festlegung des Leistungsspektrums der Erregung, Wahl der Trennfrequenz  $\hat{\omega}$  und des Frequenzschritts  $\Delta\omega$  für FFT. Die Festlegung dieser Parameter wird auch bestimmt von der gewünschten Länge der Zeitreihe und dem Zeitschritt.
3. Definition der Parameter der Amplituden — sowohl deterministisch für das Simulationsmodell nach Gl. (3.82) als auch als Zufallsvariablen für Modell Gl. (3.75). Definition der zufälligen Phasenwinkel, gleichverteilt im Intervall  $[-\pi, \pi)$ .
4. Erste „Pilotsimulation“: Generierung zufälliger Phasenwinkel. Stichprobenumfang z.B.  $N = 100 \sim 200$ .
5. Für jede Realisation der Zufallsvariablen:
  - a. Generierung einer Zeitreihe nach Gl. (3.82) aus den (vorher deterministisch festgelegten) Amplituden und Phasenwinkeln mit FFT.
  - b. Berechnung der Strukturantwort aus der Zeitreihe.
  - c. Berechnung des Leistungsspektrums, der Erstüberschreitenswahrscheinlichkeiten und andere Auswertungen der Strukturantwort. Sukzessive Summierung der Ergebnisse für die spätere Mittelung erspart Speicherbedarf.
6. Beendigung der Auswertung durch die Rechenschritte, die nicht innerhalb der Schleife (Punkt 5) durchgeführt werden können. (Im einfachsten Fall Division durch  $N$  zur Bildung des arithmetischen Mittels.)
7. Auswahl der Frequenzen, für die zufällige Amplituden eingeführt werden sollen (Abschnitt 4.2).
8. Bestimmung der Parameter der Simulationsdichten der Amplituden (Abschn. 4.3).
9. Zweiter Simulationslauf: Generierung zufälliger Amplituden mit *Importance Sampling* und zufälliger Phasenwinkel, mit größerem Stichprobenumfang (siehe Beispiele im vorigen Abschnitt und in Kapitel 5).

10. Wiederholung der Punkte 5 und 6. Dabei Generierung der Zeitreihen nach Gl. (3.75). Vor der Summation sind die Ergebnisse mit den jeweiligen *Importance Sampling* – Gewichten  $f/h$ , Gl. (2.13), zu multiplizieren.
11. Abschließende Auswertungen und Ausgabe der Ergebnisse.

Die Sicherheitsbeurteilung eines nichtlinearen Systems unter stochastischer Erregung ist eine komplexe Aufgabe, deren Lösung nicht als „black box“ angewendet werden kann. Als Vorstudie zur eigentlichen Anwendung sollte ein einfaches Beispiel mit ähnlichem Systemverhalten untersucht werden, das geringen Rechenaufwand erfordert, z.B. ein Einmassenschwinger. Das dritte, hysteretische Testbeispiel in diesem Kapitel (s. S. 90) dient in diesem Sinne als Vorstudie zu den Untersuchungen in Kapitel 5. Für weitere Kalibrierungen sollte die Antwort der untersuchten Struktur selbst betrachtet werden. Die erste, sogenannte Pilotsimulation ist vom Aufwand her niedriger als die zweite Simulation und es ist daher vertretbar, sie ggf. mit verschiedenen Parametern zu wiederholen.

Anhand der Vorstudien können die Simulationsparameter für die Anwendung festgelegt werden. Die Wahl des in der Simulation berücksichtigten Frequenzbereichs beeinflusst nicht nur die Länge der generierten Zeitreihe, sondern auch die Darstellung des Erregungsprozesses. Die Zeitreihen sollten genügend lang sein, um einen stationären Zustand der Systemantwort zu erreichen. Abschnitt 3.5 gibt darüber hinaus Anhaltspunkte zur Darstellung des Erregungsprozesses. Etwa 50 bis 100 Frequenzen zur Diskretisierung des simulierten Frequenzbereichs sind zu empfehlen. In der Simulation sollen die Frequenzbereiche angeregt werden, die den wesentlichen Anteil zur Varianz der Systemantwort beitragen. Auch nach diesem Kriterium ist die obere Trennfrequenz der Erregung festzulegen.

Für die Auswahl und Adaption der zufälligen Amplituden gibt es keine eindeutigen Kriterien, aber Erfahrungswerte aus den Testbeispielen. Da die Zufallszahlen vor der Strukturanalyse generiert werden, können die Parameter ohne großen Aufwand leicht kalibriert werden, wenn das Leistungsspektrum der Antwort einmal vorliegt. Für die beiden konservativ-nichtlinearen Systeme (Beispiele Eins und Zwei) ist es optimal, wenn durch das Auswahlverfahren mit einigen wenigen Variablen die Bereiche um die signifikanten Spitzen des Spektrums herum erfaßt werden. Für das hysteretische System empfiehlt sich keine Reduzierung der Dimension, stattdessen sollten für alle berücksichtigten Frequenzbänder zufällige Amplituden eingeführt werden. Nach einer Generierung der Zufallszahlen ist es möglich, eine Statistik über die *Importance Sampling* – Gewichte  $f/h$  nach Gl. (2.13) zu ermitteln. Ihr Mittelwert sollte nahe Eins sein ( $\pm 10\%$ ). Optimale Ergebnisse werden erzielt, wenn ihr Variationskoeffizient etwa bei Drei liegt. Nach diesem Kriterium ist der Faktor  $p$  der Gln. (4.2) ff. einzustellen.

## 4.6 Directional Sampling

Das varianzmindernde Simulationsverfahren des *Directional Sampling*, vgl. Abschnitt 2.9, wird hier auf die spektrale Darstellung von Zufallsprozessen angewendet und auch mit dem *Spectral Importance Sampling*, Abschnitt 4.3 kombiniert.

Für die Darstellung des Prozesses wird die Formel nach Gl. (3.74) gewählt. Bei diesem Modell sind alle Zufallsvariablen Amplituden der Reihenentwicklung, nur für diese ist der beim *Directional Sampling* notwendige Inkrementierungsalgorithmus sinnvoll. Eine Auswahl der Variablen wie in Abschnitt 4.2 erfolgt hier nicht. In den bisherigen Testbeispielen wurde die Erstüberschreitenswahrscheinlichkeit über der Schranke  $\hat{x}$  aufgetragen. Für die Vergleichbarkeit der Ergebnisse erfolgt hier keine Iteration zu einem bestimmten Grenzzustand, d.h. eine bestimmte Schranke. Stattdessen werden die simulierten und anschließend normierten Zufallsvektoren in bestimmten Schritten gesteigert und für jede Steigerungsstufe werden die Überschreitungen über verschiedene Schranken  $\hat{x}$  abgefragt. Die folgende Beschreibung des Ablaufs — zunächst ohne zusätzliches *Importance Sampling* — soll die Unterschiede zum „konventionellen“ Simulationsverfahren, vgl. S. 102 verdeutlichen:

1. Simulation der Amplituden als unabhängige, standardnormal verteilte Zufallsvariablen.
2. Normierung der so simulierten Zufallsvektoren auf eine bestimmte Länge, die auch der Schrittweite  $s$  der Inkrementierung entspricht (Das muß nicht die Einheitslänge sein, andernfalls sind aber zusätzliche Skalierungen der Ergebnisse notwendig, s.u.).
3. Für jede Realisation der Zufallsvektoren: Inkrementierung des Vektors mit einer bestimmten Schrittweite  $s$ .
4. Für jedes Inkrement: Generierung der Zeitreihe mittels FFT entspr. Gl. (3.74), Berechnung der Systemantwort. Auswertungen:
  - a. Berechnung der zum jeweiligen Inkrement gehörigen bedingten Versagenswahrscheinlichkeit, Gl. (2.67) ff. (siehe auch nachfolgende Erläuterungen zum *Importance Sampling*).
  - b. Abfrage der Überschreitung über verschiedene Schranken  $\hat{x}$ . Bei Überschreitung: Abspeicherung der bedingten Versagenswahrscheinlichkeit, zugeordnet zur jeweiligen Schranke  $\hat{x}$ . Ist eine Überschreitung in einem vorherigen Inkrement bereits festgestellt worden, darf dieser Schritt nicht wiederholt werden.
  - c. Berechnung der Dichtefunktion des Radius zum aktuellen Inkrement

$$f_R(r) = \frac{2^{1-n} r^{2n-1}}{\Gamma(n)} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) \quad (4.5)$$

Hierin ist die  $n$  die Zahl der Summanden in Gl. (3.74) und damit die Hälfte der Zahl der Zufallsvariablen.

- d. Schätzung z.B. von Periodogramm und Verteilung, s. Abschnitt 3.4. Solche Ergebnisse sind mit  $f_R(r) \cdot s$  zu skalieren.
5. Wiederholung ab 4, bis eine vorher festgelegte maximale Schranke einmal im betrachteten Zeitintervall erreicht oder überschritten wurde.
6. Wiederholung ab 3 für jede Realisation der Zufallsvektoren.
7. Bildung des arithmetischen Mittels der Ergebnisse aus der gesamten Stichprobe.

Die gleichmäßige Inkrementierung der Richtungsvektoren, anstelle einer genauen Ausiterierung eines vorgegebenen Grenzzustands, erlaubt einerseits eine Vergleichbarkeit mit den bisherigen Berechnungen mit anderen Verfahren und einen reduzierten Rechenzeitbedarf. Andererseits führt sie stets zu einer Unterschätzung der bedingten Versagenswahrscheinlichkeiten. Wird für das  $i$ -te Inkrement des Vektors der Amplituden, in Anlehnung an die Nomenklatur in Abschnitt 2.9 mit dem Radius  $r_i$  bezeichnet, Versagen festgestellt, aber noch nicht für das Inkrement  $r_{i-1}$ , dann liegt der tatsächliche Grenzzustand im Intervall  $r^* \in (r_{i-1}, r_i]$ . Bei dieser Betrachtung wird davon ausgegangen, daß der Grenzzustand in jeder Richtung eindeutig ist, was auch eine Voraussetzung des *Directional Sampling* ist. Der Fehler ist maximal, wenn  $r^*$  sehr nah an  $r_{i-1}$  liegt und ist vernachlässigbar, wenn  $r^* \approx r_i$ . Davon ausgehend, daß im Mittel  $r^*$  in der Mitte des Intervalls liegt, wird dieser Wert zur Berechnung der bedingten Versagenswahrscheinlichkeiten herangezogen:  $P_F | \mathbf{a} = 1 - \chi_{2n}^2((r_{i-1} + r_i)^2/4)$ .

Für jede Realisation des Zufallsvektors muß in jedem Inkrement eine dynamische Strukturanalyse durchgeführt werden. Der Rechenzeitbedarf wird als annähernd proportional der Zahl der Strukturanalysen angenommen. Deshalb ist für den Vergleich der Effizienz mit anderen Verfahren hier das Produkt aus dem Stichprobenumfang und der notwendigen Zahl der Inkremente, um eine bestimmte Schranke  $\hat{x}$  zu erreichen, zu betrachten. Die Schrittweite  $s$  beeinflusst sowohl den Aufwand als auch die Genauigkeit der Ergebnisse. Dieser Aspekt wird in den Testbeispielen des folgenden Abschnitts betrachtet.

*Directional Sampling* ist nur im Raum standardnormal verteilter Variablen gültig. Die oben beschriebene Prozedur erfordert keine weiteren Transformationen. Für *Importance Sampling* ist es vorteilhaft, die zufälligen Amplituden mit einer Standardabweichung  $\sigma_k$  entsprechend Gl. (3.74) zu definieren, so daß bei der Summation der Faktor  $\sigma_k$  entfällt. Dann ist aber in Schritt 4 vor der Generierung der Zeitreihe eine Transformation der Amplituden notwendig.

Das *Importance Sampling* – Verfahren ist analog Abschnitt 4.3. Wiederum werden nach einer ersten Simulation das Leistungsspektrum der Systemantwort ermittelt und damit die Anpassung der Simulationsvariablen für den zweiten Lauf vorgenommen. Hier werden lediglich die Standardabweichungen bzw. Faktoren  $\sigma_k$  adaptiert, wie in

Gl. (4.3), nicht die Mittelwerte. Die Berechnung des Mittels der Stichprobe für die verschiedenen Auswertungen (Schritt 7 der Prozedur) muß wie bei *Importance Sampling* üblich analog Gl. (2.13) mit dem Verhältnis der Original- zur Simulationsdichtefunktion gewichtet werden.

## 4.7 Testbeispiele zum Directional Sampling

Die Leistungsfähigkeit des *Directional Importance Sampling* – Verfahrens soll ebenfalls getestet und mit der einfachen Monte Carlo Simulation wie auch dem *Spectral Importance Sampling* verglichen werden. Es wurden wiederum die drei Testbeispiele aus den Abschnitten 3.5 und 4.4 angewendet, mit den dort angegebenen Parametern der mechanischen Systeme und Erregungsprozesse. Der Stichprobenumfang im ersten Simulationslauf — *Directional Sampling* mit gleichverteilten Richtungsvektoren — ist  $N_1 = 20$ , im zweiten Lauf — in Verbindung mit *Importance Sampling* — ist  $N_2 = 100$ . Wichtig für den Vergleich der verschiedenen Verfahren ist die Beurteilung des Rechenzeitbedarfs. Deshalb wurde die Steigerung jedes simulierten Einheitsvektors solange durchgeführt, bis eine maximale Verschiebung  $\hat{x}$ , die dem maximalen Wert der jeweiligen Referenzsimulation entspricht, einmal erreicht wurde. Es kann beim *Directional Sampling* durchaus vorkommen, daß der jeweilige Standardfehler zu dieser maximalen Verschiebung nicht 100% entspricht, das Ergebnis also eine höhere Konfidenz als die Referenzlösung an dieser Stelle aufweist. Die Anzahl der hierfür notwendigen Inkremente wurde über das Ensemble gemittelt. Das Maß für den Rechenzeitbedarf entspricht also dem Stichprobenumfang multipliziert mit der mittleren Anzahl an Inkrementen. Die notwendige Zahl der Steigerungsstufen wird stark beeinflusst von der Größe des Intervalls, d.h. der Länge des simulierten Richtungsvektors, die nicht unbedingt gleich Eins sein muß. Deshalb wurden in dieser Studie die Richtungsvektoren vor Beginn der Inkrementierungsschleife skaliert. Es wurden folgende Parameter variiert:

$$\begin{aligned} \text{Skalierung der Richtungsvektoren} \quad s &= 0,5; 1; 1,5; 2; 3, \\ \text{Erhöhungsfaktor in Gln. (4.2) ff.} \quad p &= 0; 0,5; 1; 1,5; 2. \end{aligned}$$

Es wurden auch hier die Erstüberschreitenswahrscheinlichkeiten ausgewertet wie in Abschnitt 4.4 erläutert. In den Bildern 4.7 ff. sind dargestellt: Die auf das Zeitintervall  $T$  bezogene Erstüberschreitenswahrscheinlichkeit über der Schranke  $\hat{x}$ , jeweils ein Beispiel mit guter und mit schlechter Übereinstimmung mit der Referenzsimulation, das Leistungsspektrum der Strukturantwort und die im 2. Simulationslauf angepaßten Standardabweichungen. Da keine Auswahl der Amplituden vorgenommen wird, erstreckt sich die Darstellung der Standardabweichungen über den gesamten Frequenzbereich. Die Mittelwerte der Amplituden bleiben unverändert gleich Null.

Die Anwendung des *Directional Sampling* – Verfahrens auf Beispiel 1 ist durchaus erfolgreich. Es ist möglich, die Vektoren über die mit einfacher Monte Carlo Simu-



lation erreichten Werte hinaus bis in Bereiche extrem kleiner Wahrscheinlichkeiten zu steigern. Die Kurven der Erstüberschreitenswahrscheinlichkeiten fluktuieren stark, und zwar um so mehr, je größer das Inkrement  $s$  ist. Umgekehrt verbessert ein feineres Inkrement das Ergebnis, das bedeutet, daß man auf einen bestimmten Grenzzustand hin genau ausiterieren kann. Die notwendige Anzahl der Inkremente, um die größte vorgegebene Verschiebung einmal im betrachteten Zeitintervall zu erreichen, nimmt bei gleichem Erhöhungsfaktor  $p$  mit der Größe des Inkrements ungefähr linear zu. Das in Bild 4.7–b dargestellte Ergebnis für  $p = 1$ ,  $s = 2$  entspricht vom Rechenaufwand ungefähr den Berechnungen in Abschnitt 4.4, die mittlere Anzahl an Inkrementierungen ist hier gleich 12. Das Ergebnis für  $s = 0.5$  ist qualitativ sehr gut, aber es benötigte etwa den vierfachen Aufwand.

Die Tatsache, daß in Beispiel 2 die Reststeifigkeit gleich Null ist, bereitet hier Schwierigkeiten. Der Erhöhungsfaktor  $p$  darf nicht zu hoch gewählt werden. Bild 4.8–a zeigt für  $p = 1$  und  $s = 0,5$  ein akzeptables Ergebnis. Dagegen folgt die Kurve der Erstüberschreitenswahrscheinlichkeiten für  $s = 1$  einem grundsätzlich anderen Trend, was ohne Vorhandensein einer Referenzlösung nicht erkennbar ist. Dieser Parametersatz ist damit zu verwerfen.

Auch bei Beispiel 3 ist das *Directional Sampling* nicht erfolgreich. Während mit  $p = 0$  — das entspricht der Simulation gleichverteilter Richtungsvektoren ohne zusätzliches *Importance Sampling* — ein akzeptables Ergebnis erzielt wird, können die Kurven in anderen Fällen einen grundsätzlich anderen Verlauf als Referenzlösung nehmen. Bild 4.9 zeigt ausgewählte Ergebnisse.

Das *Directional Importance Sampling*, so zeigen die Ergebnisse, ist für die Anwendung auf stark nichtlineare Systeme wie in den Beispielen 2 und 3 als nicht geeignet anzusehen. Nach Verbesserungsmöglichkeiten sollte weiter gesucht werden. Dagegen ist es möglich, bei schwach nichtlinearen Systemen extrem kleine Erstüberschreitenswahrscheinlichkeiten sogar bis in Größenordnungen von  $10^{-10}$  zu berechnen. Hier dürfte das Verfahren auch vom Aufwand her konkurrenzfähig zur „konventionellen“ Simulation sein.

Bild 4.7: Ausgewählte Ergebnisse für Beispiel 1, konservativ nichtlineares System ( $k_0 = 30.0 \cdot 10^6 N/m$ ,  $k_1 = 54.0 \cdot 10^6 N/m$ ), berechnet mit *Directional Importance Sampling*. (Prob.: Wahrscheinlichkeit, Std.err: Standardfehler, PlainMC: einfache Monte Carlo Simulation, Dir.I.S.: *Directional Importance Sampling*.)

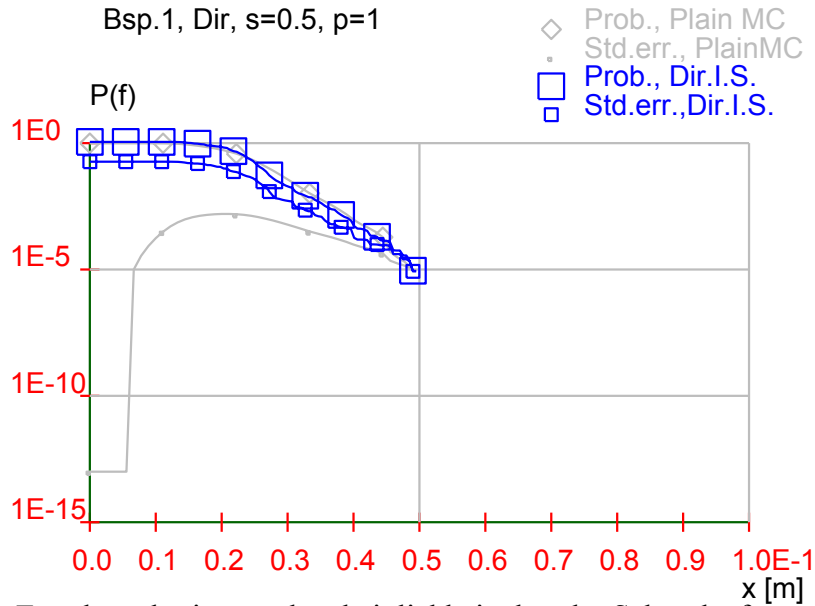


Bild 4.7–a: Erstüberschreitenswahrscheinlichkeit über der Schranke für  $s = 0,5$ ,  $p = 1$ .

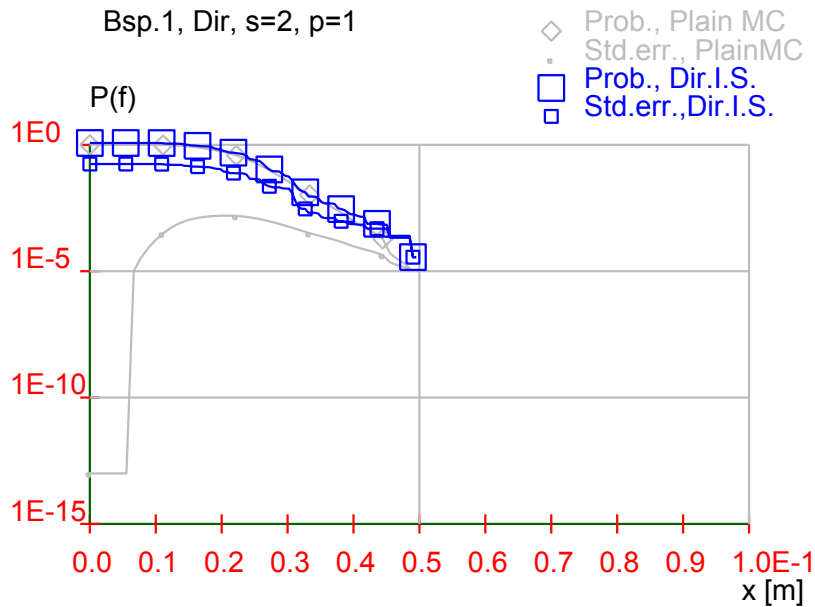


Bild 4.7–b: Erstüberschreitenswahrscheinlichkeit über der Schranke für  $s = 2$ ,  $p = 1$ .

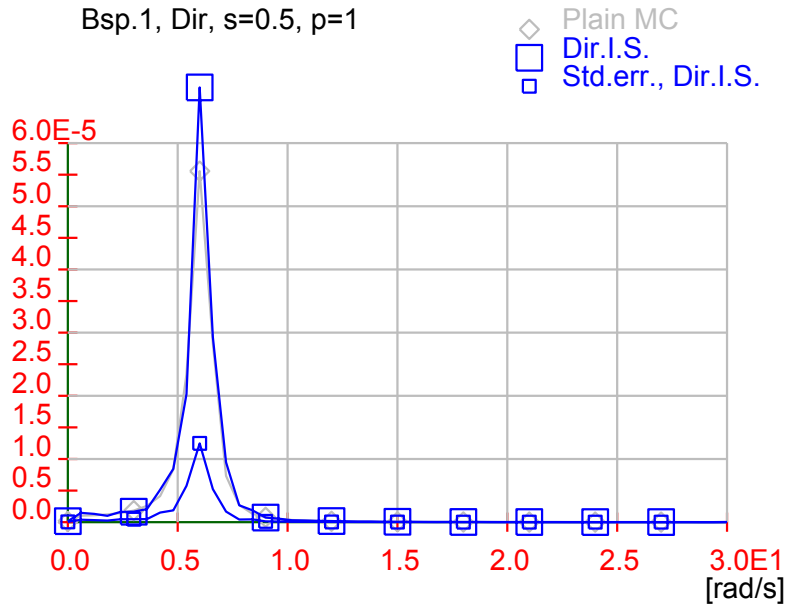


Bild 4.7–c: Leistungsspektrum der Strukturantwort.

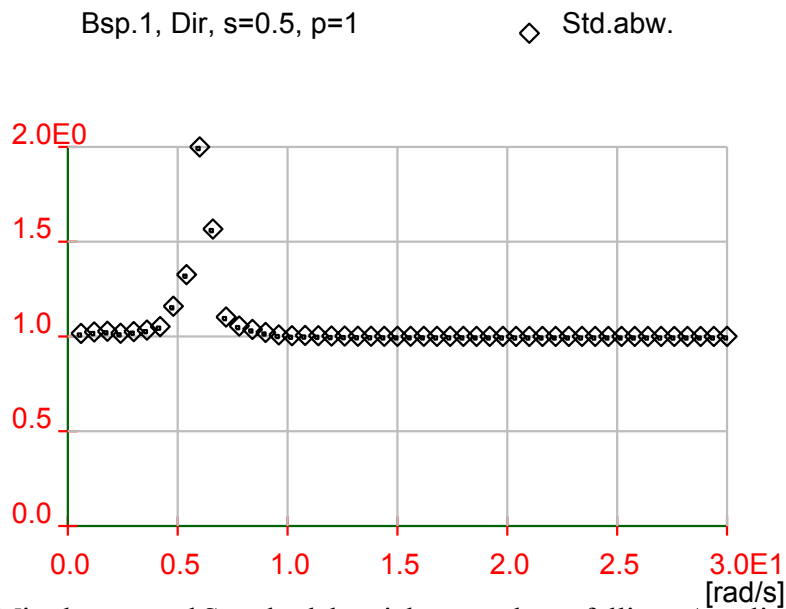


Bild 4.7–d: Mittelwerte und Standardabweichungen der zufälligen Amplituden im 2. Simulationslauf.

Bild 4.8: Ausgewählte Ergebnisse für Beispiel 2, konservativ nichtlineares System ( $k_0 = 30.0 \cdot 10^6 \text{ N/m}$ ,  $k_1 = 0$ ), berechnet mit *Directional Importance Sampling*. (Prob.: Wahrscheinlichkeit, Std.err: Standardfehler, PlainMC: einfache Monte Carlo Simulation, Dir.I.S.: *Directional Importance Sampling*.)

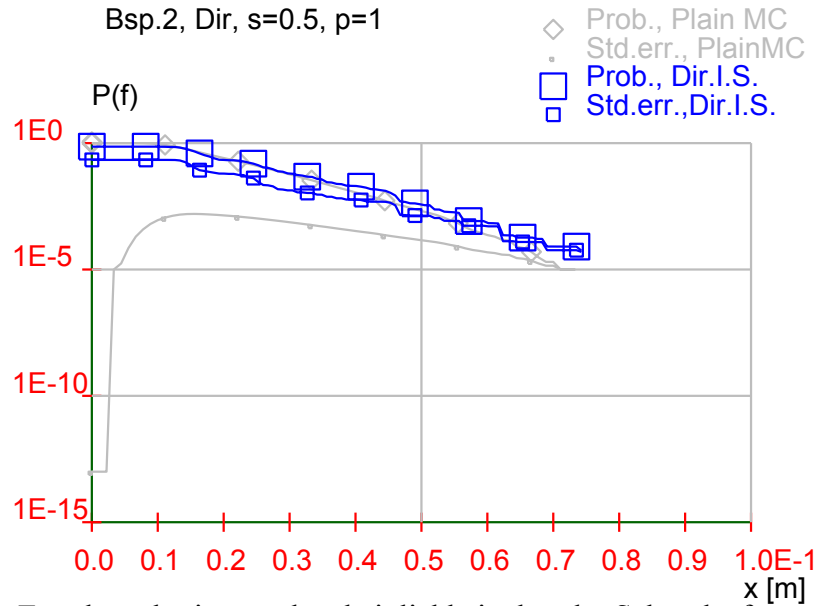


Bild 4.8–a: Erstüberschreitenswahrscheinlichkeit über der Schranke für  $s = 0,5$ ,  $p = 1$ .

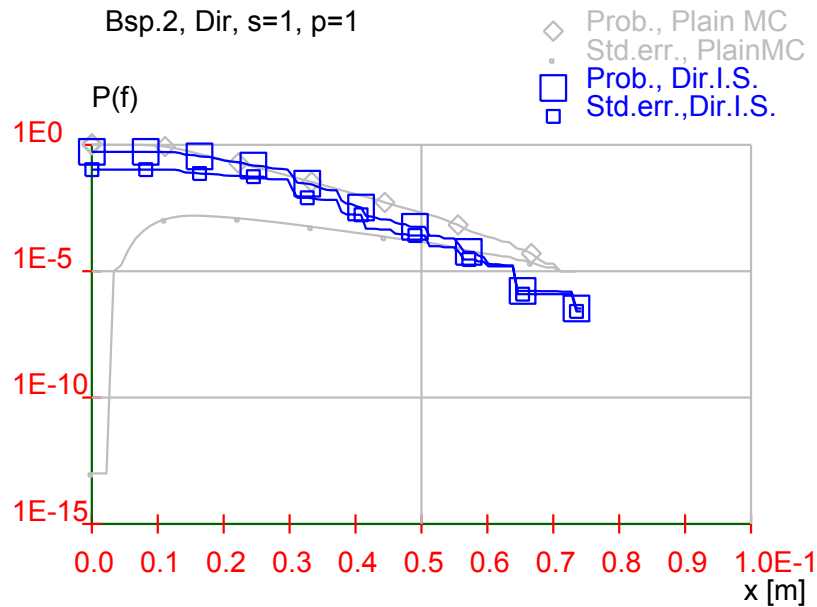


Bild 4.8–b: Erstüberschreitenswahrscheinlichkeit über der Schranke für  $s = 1$ ,  $p = 1$ .

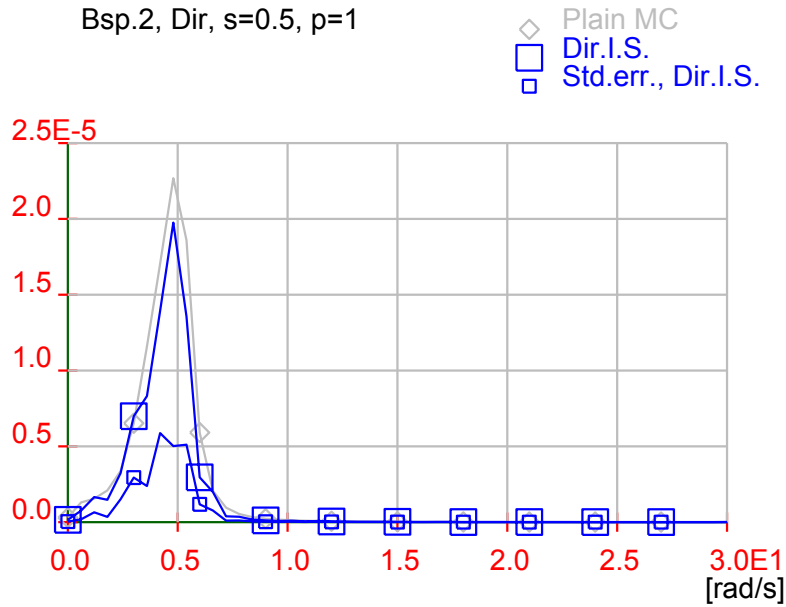


Bild 4.8–c: Leistungsspektrum der Strukturantwort.

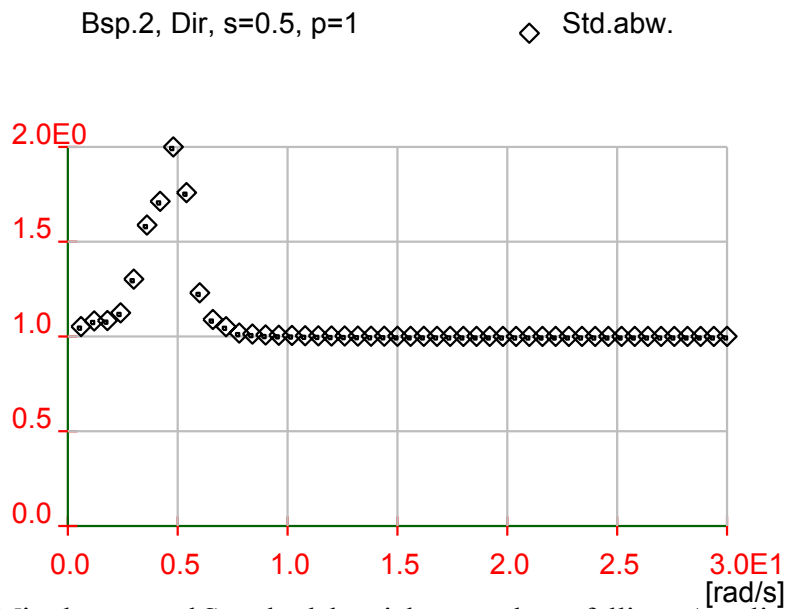


Bild 4.8–d: Mittelwerte und Standardabweichungen der zufälligen Amplituden im 2. Simulationslauf.

Bild 4.9: Ausgewählte Ergebnisse für Beispiel 3, hysteretisches System, berechnet mit *Directional Importance Sampling*. (Prob.: Wahrscheinlichkeit, Std.err: Standardfehler, PlainMC: einfache Monte Carlo Simulation, Dir.I.S.: *Directional Importance Sampling*.)

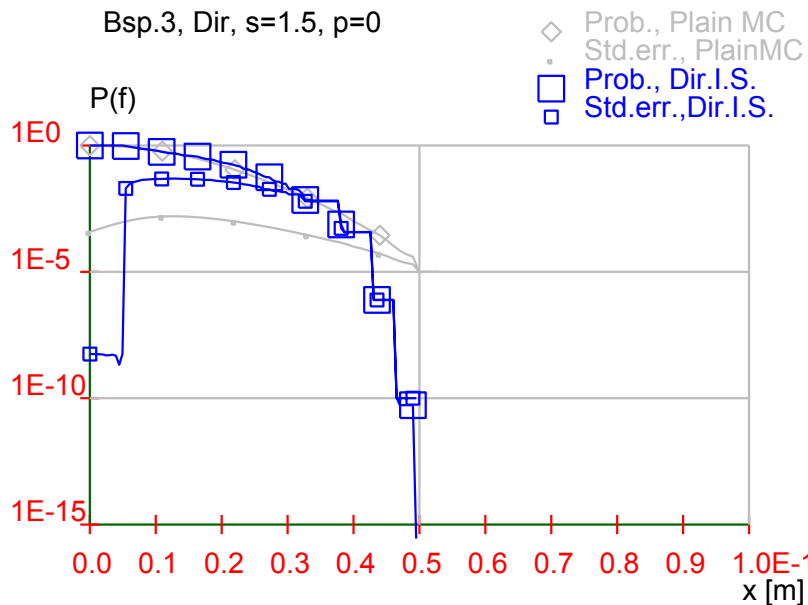


Bild 4.9–a: Erstüberschreitenswahrscheinlichkeit über der Schranke für  $s = 1,5$ ,  $p = 0$ .

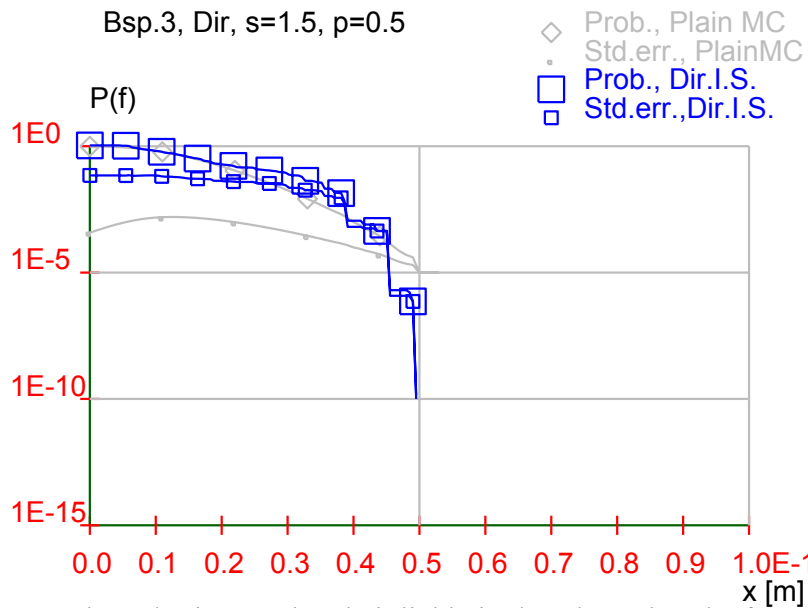


Bild 4.9–b: Erstüberschreitenswahrscheinlichkeit über der Schranke für  $s = 1,5$ ,  $p = 0,5$ .

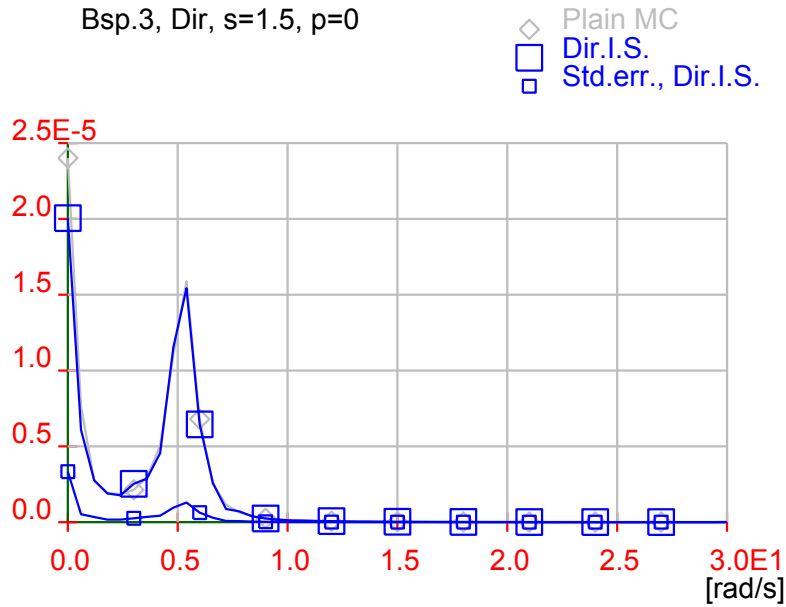


Bild 4.9–c: „Leistungsspektrum“ der Strukturantwort.

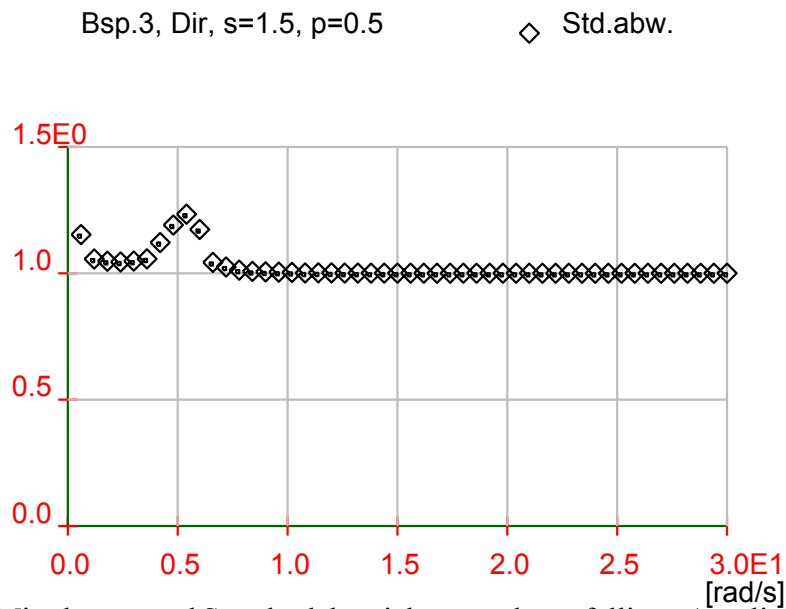


Bild 4.9–d: Mittelwerte und Standardabweichungen der zufälligen Amplituden im 2. Simulationslauf.

# 5

## Anwendungsbeispiel

### 5.1 Problemstellung

In diesem Kapitel soll eine Sicherheitsbeurteilung einer Eisenbahnbrücke unter Erdbebenbelastung durchgeführt werden. Eine Eisenbahnbrücke ist Bestandteil zentraler Verkehrswege und soll so konstruiert sein, daß sie nach einem Starkbeben mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit noch in einem gebrauchsfähigen Zustand ist.

Das betrachtete Beispiel einer Eisenbahnbrücke ist einer Veröffentlichung von Dorka *et al.* [22] entnommen. Das statische System des Brückenüberbaus ist ein Dreifeldträger, dessen Feldweiten jeweils  $50m$  betragen. Der Querschnitt ist Bild 5.1 zu entnehmen; es wurden vereinfachend konstante Plattendicken angenommen. Die transiente Belastung ist ein „künstliches“ Erdbeben, dessen Intensität und spektrale Dichte dem Erdbeben von Kobe, Japan im Jahre 1995 ähnlich sind. Die Dauer der Lasteinwirkung entspricht ungefähr der Starkbebenphase. Die Stützenquerschnitte sind im Modell, vgl. Abschnitt 5.3, nur über Flächenmomente definiert. Soll die Gebrauchsfähigkeit des Betonbauwerkes ohne zusätzliche Reparaturen erhalten bleiben, kann als Grenzzustand die Elastizitätsgrenze angesehen werden. Deshalb wird als Versagenskriterium eine Verschiebung des Stützenkopfes angenommen, die aus der geschätzten elastischen Rotationskapazität des Querschnitts abgeleitet ist. Die Erstüberschreitenswahrscheinlichkeit über diese Verschiebung ist zu ermitteln. Die Ertüchtigung der Konstruktion für Erdbeben geschieht durch Einsatz sogenannter *Hysteretic Devices* (HYDEs), deren Funktionsweise im folgenden skizziert und in Abschnitt 5.2 detailliert beschrieben ist. Eine Sicherheitsbeurteilung soll zeigen, mit welcher Wahrscheinlichkeit das Versagen eintritt. Außerdem sollen die zu erwartenden Relativverschiebungen zwischen Stütze und Überbau ermittelt werden. Für die Sicherheitsbeurteilung wird das in den Abschnitten 4.2 bis 4.5 entwickelte *Spectral Importance Sampling* Verfahren verwendet.

Die Sicherheit der Brückenkonstruktion gegenüber Erdbeben soll durch Kontrolle ihres dynamischen Verhaltens gewährleistet werden. Dies geschieht durch sogenannte aktive oder passive Kontrolle. Erstere ist ein System, welches externe Energiezufuhr benötigt, im Gegensatz zum passiven System. Zwei weit verbreitete passive Kontroll-



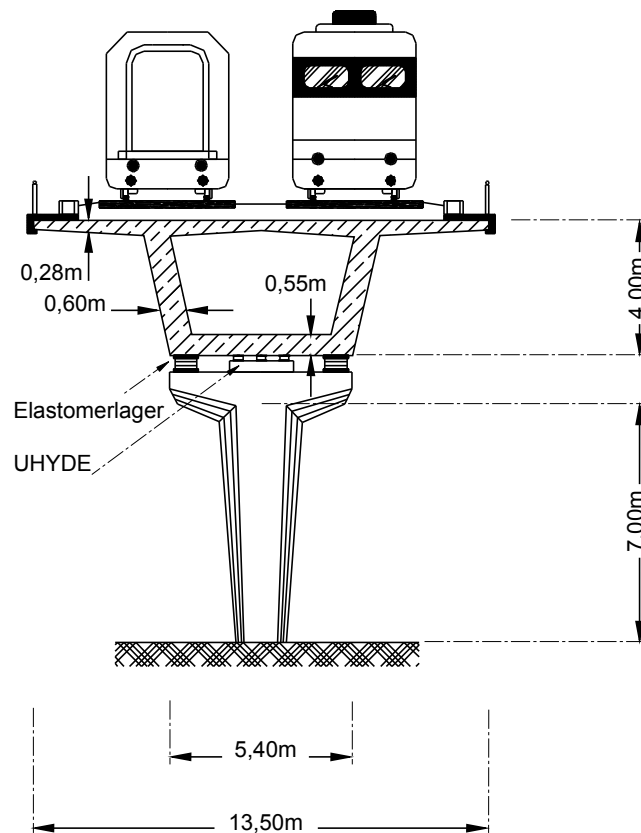


Bild 5.1: Skizze der untersuchten Brücke, aus [20].

systeme sind die *Base Isolation* und das *Seismic Link*. Beide Maßnahmen zielen darauf ab, im Gebäude kontrollierte Bewegungsmöglichkeiten zu schaffen und so die Schnittgrößen, die ansonsten infolge Bewegungsbehinderung entstehen, zu reduzieren. Gleichzeitig soll durch die Bewegung Energie dissipiert werden, z.B. durch plastisches Materialverhalten der Verbindungsglieder oder durch Reibung, um die Verformungen zu begrenzen. *Base Isolation* bedeutet, Fundament und Bauwerk zu entkoppeln. Hierfür werden elastische Lager oder Lager mit plastischem Materialverhalten eingesetzt. *Seismic Link* bedeutet die Schaffung von Bewegungsmöglichkeiten innerhalb des Bauwerks. Die angrenzenden primären Bauteile sollten relativ steif sein, in der Bewegungsfuge werden *Hysteretic Devices* eingesetzt. Dadurch wird einerseits erreicht, daß die Schnittgrößen in der Bewegungsfuge einen zulässigen Wert nicht überschreiten, andererseits nehmen die Verschiebungen durch die Energiedissipation der HYDEs wesentlich kleinere Werte an als bei Verwendung elastischer Lager. Weitere untergeordnete Bauteile sollten relativ weich konstruiert werden, um die Lasten zu verteilen und die Wirkungsweise des *Seismic Links* nicht zu beeinträchtigen. Eine detailliertere Diskussion der verschiedenen Konstruktionsprinzipien findet sich bei Dorka [21]. Als Ort des *Seismic Links* bietet sich bei der Brücke die Verbindung von Stütze und Überbau an. Hier wer-

den sowohl Elastomerlager eingesetzt, um die vertikalen Lasten weiterzuleiten, als auch HYDEs, die auf Basis der trockenen Reibung arbeiten.

## 5.2 Hysteretic Devices

Ein *Hysteretic Device*, welches das Phänomen der trockenen Reibung ausnutzt, wurde von Dorka [19, 20] entwickelt. Es besteht aus einem Grundelement mit mehreren massiven zylinderförmigen Bronzestiften, die in einer Führungsplatte aus Stahl eingelassen sind. Die abgerundeten Enden der Bronzestifte stehen auf den ebenfalls stählernen Reibplatten.

In einer Konstruktionsvariante ist dieses Grundelement in ein Gehäuse eingelassen, welches aus zwei ineinandergreifenden Zylindern besteht. Die Führungsplatten mit den Bronzestiften sind am inneren Zylinder befestigt, die Reibplatten am äußeren Zylinder. So ist eine Relativverschiebung zwischen Bronzestift und Reibplatte möglich. Mehrere Lagen des Grundelements können übereinander angeordnet werden. Durch einen Bolzen wird die Normalkraft auf die Kontaktfläche aktiviert. Damit ist die Reibungskraft nicht von äußeren Lasten abhängig, sondern nur von der Bewegung in der Ebene parallel zur Reibfläche. Durch die Anzahl der Bronzestifte, die Vorspannkraft im Bolzen und durch die Materialwahl kann das dynamische Verhalten des Reibgeräts eingestellt werden.

In einer anderen Variante, die bei Brückenbauten eingesetzt wird, wird die Normalkraft auf andere Weise aktiviert. Die *Hysteretic Device* ist wie erwähnt zwischen Stütze und Brückenüberbau angeordnet. Das Eigengewicht des Überbaus wird quasi als Widerlager ausgenutzt, durch Gasdruck werden die Bronzestifte und Stahlflächen gegeneinander gepreßt und so die Normalkraft eingestellt. Ist nach einem Erdbebeneignis eine bleibende Verschiebung vorhanden, kann durch Nachlassen des Gasdrucks das Reibelement deaktiviert werden, so daß sich der Überbau infolge der elastischen Rückstellkraft in seine Ausgangslage zurück bewegt. Erneutes Aufbringen des Gasdrucks aktiviert anschließend das Reibelement wieder. Bild 5.2 zeigt diese spezielle Konstruktionsvariante dar.

Unter transienter Belastung ergibt sich im Kraft – Verschiebungs – Diagramm eine typische Hystereseschleife. Das Gerät ist relativ steif im linear-elastischen Zustand. Ist die Reibungskraft überwunden, gleiten die Bronzestifte auf der Reibplatte bei annähernd konstanter Schnittkraft. Die Abrundung der Kontaktflächen bewirkt einen fließenden Übergang zwischen elastischem Verhalten und Gleiten. Für die Berechnungen mit *SLang* [42] wurde das Finite Element des Typs UHYDE2 implementiert, das in Anhang C wird.

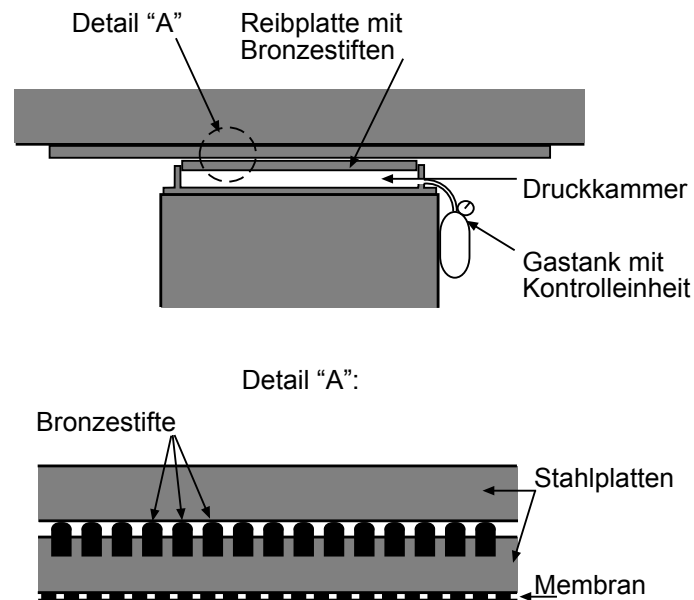


Bild 5.2: Prinzipskizze des *Hysteretic Device* in einer Brücke.

### 5.3 Modellbildung und Berechnung

Neben einem effizienten Simulationsverfahren ist auch bei der Modellierung der zu untersuchenden Struktur beziehungsweise beim Lösungsverfahren auf die Rechenzeit zu achten. Dabei hängt die berechnete Versagenswahrscheinlichkeit auch vom zugrunde gelegten mechanischen Modell ab. Deshalb ist ein Kompromiß zwischen akzeptabler Rechenzeit und hinreichender Genauigkeit des Ergebnisses zu finden. Insbesondere ist die Konvergenz der Berechnung im nichtlinearen Bereich sicherzustellen. Es wurden mehrere Varianten des Finite Elemente – Modells mit verschiedenen Elementtypen, Diskretisierungen und Lösungsverfahren (u.a. kamen statische Kondensation zur Reduzierung der Größe der Systemmatrizen, explizite Verfahren und Zeitschrittintegration nach Newmark zur Berechnung der transienten Strukturantwort zur Anwendung) erstellt und hinsichtlich Rechenzeit und Genauigkeit verglichen. Das für die Zuverlässigkeitsuntersuchungen verwendete Finite Elemente – Modell der Brücke ist in Bild 5.3 dargestellt. Für den Brückenüberbau wurden Elemente vom Typ SHELL3N verwendet, für die Stützen BEAM3D (s. Dokumentation des Programms *SLANG* [42]). Die Stützenfüße sind fest eingespannt. Die Belastung des Bauwerks ist eine Bodenbeschleunigung, die in horizontaler Richtung quer zur Brücke wirkt. Zeitliche Verschiebungen der Belastung aufgrund räumlicher Wellenausbreitung wurden nicht betrachtet. Wegen dieser Art der Belastung und der Symmetrie des Bauwerks ist es möglich, nur die Hälfte der Brücke zu modellieren und entsprechende Symmetrie – Randbedingungen einzuführen. Die Stützen sind T-förmig ausgebildet. Zwischen dem mittleren Knoten der Stützenköpfe und dem jeweils gegenüberliegenden Knoten des Überbaus wurden UHYDE2 – Elemente angeordnet, deren Reibfläche horizontal ist. Zwischen den äuße-

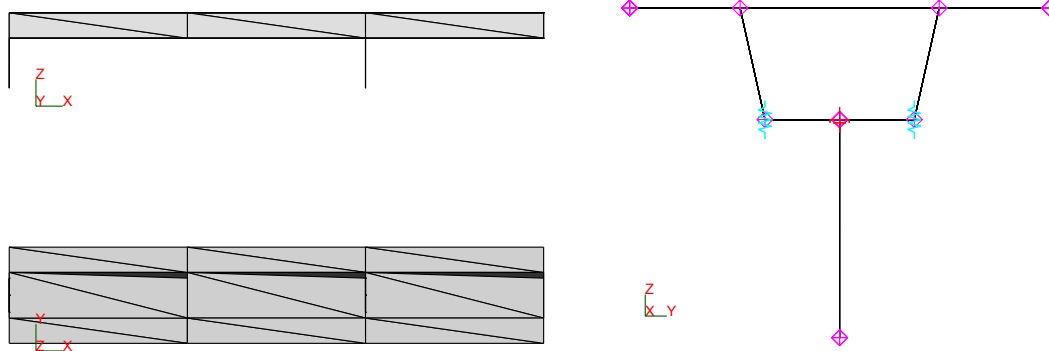


Bild 5.3: Finite Elemente Modell der halben Brücke: Seitenansicht (links oben), Aufsicht (links unten) und Querschnitt (rechts).

ren Knoten der Stützenköpfe und dem Überbau befinden sich vertikal ausgerichtete Federelemente (Typ SPRING\_TRANS) mit willkürlicher, hoher Steifigkeit, um Singularität der Systemsteifigkeitsmatrix zu vermeiden; für den Lastabtrag sind sie nicht von Bedeutung. Das so erstellte Finite Elemente Modell besitzt 186 Freiheitsgrade.

Die Parameter des UHYDE2 – Elementes sind

$$k = 5 \cdot 10^8 N/m, \quad q_y = 0,019m, \quad q_p = 0,02m, \quad \alpha = 0,006$$

Die Reststeifigkeit  $\alpha k$  entspricht der horizontalen Steifigkeit von zusätzlich angeordneten Elastomerlagern. Eine lineare Berechnung ohne Reibungsdämpfer, nur mit Elastomerlagern wurde zum Vergleich ebenfalls angestellt.

Die Bodenbeschleunigung  $B(t)$  wird modelliert als ein stationärer Zufallsprozeß mit einem Leistungsspektrum entsprechend dem Kanai – Tajimi – Modell mit Korrektur im niederfrequenten Bereich (vgl. [50], [15]).

$$g_{BB}(\omega) = A \cdot \frac{1 + 4\xi_g^2(\omega/\omega_g)^2}{(1 - (\omega/\omega_g)^2)^2 + 4\xi_g^2(\omega/\omega_g)^2} \cdot \frac{(\omega/\omega_1)^4}{(1 - (\omega/\omega_1)^2)^2 + 4\xi_1^2(\omega/\omega_1)^2} \quad (5.1)$$

Mit den Parametern  $\xi_1 = \xi_g = 0,5$ ,  $\omega_1 = 3,0rad/s$ ,  $\omega_g = 7,0rad/s$  und  $A = 0,033m^2/s^3$  entspricht dieses künstliche Spektrum in Frequenzzusammensetzung und Varianz in etwa einem gemessenen Zeitschrieb des Erdbebens von Kobe, Japan, 1995. In Bild 5.4 sind der Zeitschrieb der Beschleunigungen, dessen Leistungsspektrum und das Modell nach Gl. (5.1) abgebildet. Die Maximalfrequenz des simulierten Spektrums ist  $\hat{\omega} = 62,83rad/s \hat{=} \hat{f} = 10Hz$ , es wurde eine Diskretisierung in 50 Frequenzbänder gewählt, so daß  $\Delta\omega = 1,256$  ist. Der Zeitschritt aus der inversen FFT ergibt sich zu  $\Delta t = 0,05s$ .

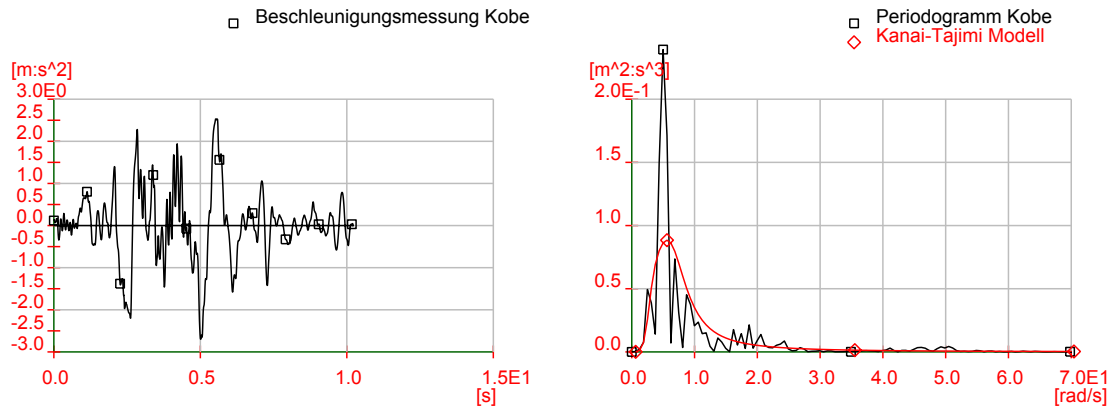


Bild 5.4: Gemessene Beschleunigungen des Erdbebens in Kobe, Japan, 1995, Nord – Süd Richtung (links), Leistungsspektrum der gemessenen Beschleunigungen und des Kanai – Tajimi Modells nach Gl. (5.1) (rechts).

Durch Verdoppelung der Zeitreihe, wie in Abschnitt 4.4 beschrieben, ist die gesamte Einwirkungsdauer des Erdbebens  $T = 10s$ .

Aufgrund der Erfahrungen mit dem dritten Testbeispiel, Abschnitt 4.4, dessen dynamisches Verhalten dem UHYDE2 – Element ähnlich ist, wurde für die Zuverlässigkeitsuntersuchung das *Spectral Importance Sampling* – Verfahren gewählt. Im zweiten Lauf wurden alle Amplituden als Zufallsvariablen eingeführt. Zur Simulation des farbigen Rauschens erwies es sich als numerisch günstiger, anstatt wie in Abschnitt 3.3.2 beschrieben, folgendermaßen vorzugehen: Es wird ein weißes Rauschen mit einem Leistungsspektrum simuliert, das konstant gleich Eins ist. Hierfür werden die Parameter der zufälligen Amplituden bestimmt und beim *Importance Sampling* adaptiert. Das weiße Rauschen wird im Frequenzbereich gefiltert, d.h. die Realisationen der Amplituden werden mit den entsprechenden Funktionswerten nach Gl. (5.1) multipliziert, erst dann wird mit Hilfe inverser FFT die Zeitreihe der Erregung erzeugt. Nach einer Vorstudie, einer einfachen Monte Carlo – Simulation mit Stichprobenumfang  $N = 100$ , wurde der Parameter  $p$  zur Adaption, vgl. Gl. 4.2 ff., so eingestellt, daß sich ein Variationskoeffizient der *Importance Sampling* – Gewichte von etwa 3 ergibt. Das ist für  $p = 0,6$  der Fall. Zusätzlich wurden die Varianten  $p = 0,7$  und  $0,8$  betrachtet.

Die Berechnung der transienten Strukturantwort erfolgte mit Zeitschrittintegration nach Newmark [15] mit der Annahme konstanter Beschleunigung im Zeitschritt. In jedem Zeitschritt wurde das Gleichgewicht durch modifizierte Newton – Raphson Iteration hergestellt. Eine Anpassung des Zeitschritts verbessert das Konvergenzverhalten.

Die Brücke soll nach einem Erdbebenereignis gebrauchsfähig bleiben. Es wird davon ausgegangen, daß eine Beanspruchung der Betonbauteile über den elastischen Bereich hinaus, insbesondere bei zyklischer Belastung, zu einer unzulässigen Schädigung führt. Als Grenzzustand wird eine Verschiebung der Stützenköpfe angenommen, die der

geschätzten elastischen Rotationskapazität des Stützenfußes entspricht. Die maximal zulässige Verschiebung beträgt  $\hat{x} = 0,017m$  horizontal quer zur Brücke. Ausgewertet wurden die Verschiebungen sowohl der äußeren als auch der inneren Stützenköpfe. Da zu erwarten war, daß die innere Stütze die größeren Verschiebungen erfährt, wurde das Leistungsspektrum der Verschiebung dieser Stütze ermittelt und für die Adaption der zufälligen Amplituden beim *Importance Sampling* verwendet, s. Bild 5.7 auf Seite 125. Darüber hinaus wurden die Relativverschiebungen zwischen Stützen und Überbau ausgewertet. Sie dürfen vor allem aus wirtschaftlichen Gründen nicht zu groß werden. Die Grenze liegt hier bei ca.  $0,3m$ .

Die Rechenzeit für eine Zeitreihe beträgt auf einer Hewlett Packard 9000/735 workstation circa drei Minuten, auf einer SGI Power Challenge (unter Ausnutzung nur eines R10000 Prozessors) etwa 1 Minute. Die Angaben sind nur Richtwerte, da sie bei einem Mehrbenutzersystem von der Gesamtbelastung abhängen. Um die gesamte Rechenzeit weiter zu reduzieren, wurden die Berechnungen auf ein *workstation – cluster* verteilt durchgeführt. Monte Carlo Methoden eignen sich insofern besonders für Parallelisierung, als die einzelnen Stichproben voneinander unabhängig sind. Erst zur statistischen Auswertung — also z.B. zur Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit — müssen alle Ergebnisse vorliegen. Nach Generierung einer Stichprobe der Eingangsgrößen, hier also der zufälligen Amplituden und Phasenwinkel, wird die Stichprobe in genauso viele Teile wie verwendete Rechner aufgeteilt und diese einzelnen Datensätze auf verschiedene Dateien geschrieben. Auf jedem beteiligten Rechner wird eine weitere *SIang* – Datei gestartet. Dort werden alle Daten eingelesen, die Strukturanalyse durchgeführt und die statistische Auswertung über den jeweiligen Teil der Stichprobe vorgenommen. Es wird allerdings keine Mittelung über die Stichprobe vorgenommen (vgl. Abschnitt 3.4 zur Auswertung), sondern nur summiert. Das erste *SIang* – Programm, das inzwischen auf eine Warteschleife gesetzt wurde, liest danach alle Ergebnisse ein, vollendet die Auswertung und gibt die Ergebnisse aus. Auf Unix ist diese Prozedur in Zusammenwirken von *SIang* und dem Betriebssystem leicht realisierbar.

## 5.4 Diskussion der Ergebnisse

In diesem Abschnitt werden die im vorigen Abschnitt umrissenen Berechnungen noch einmal angeführt und die Ergebnisse diskutiert.

Das oben beschriebene System mit nichtlinearen Dämpfungselementen wurde mit verschiedenen Simulationsparametern berechnet. Die Stichproben umfaßten  $N = 100$  bzw.  $N = 1000$  Realisationen im ersten und zweiten Simulationslauf. Die Erhöhungsfaktoren für *Spectral Importance Sampling* im 2. Lauf waren  $p = 0,6; 0,7; 0,8$ . Um die Reproduzierbarkeit der Ergebnisse zu zeigen, wurden für jeden Parameter mindestens zwei Stichproben generiert und berechnet. Trotz des höheren Aufwands ist das bei Anwendungen grundsätzlich empfehlenswert, um ein vertrauenswürdiges Ergebnis zu erhalten. Tatsächlich erwies sich  $p = 0,6$  als optimaler Erhöhungsfaktor. In Bild 5.5 sind

für  $p = 0,6$  jeweils ein gutes und ein weniger gutes Ergebnis dargestellt. Als Referenz sind auch die Ergebnisse einer einfachen Monte Carlo Simulation abgebildet. Dieser Stichprobenumfang reicht aus, um Wahrscheinlichkeiten der Größenordnung  $10^{-3}$  mit hinreichender Konfidenz zu schätzen. Aufgetragen sind die Erstüberschreitenswahrscheinlichkeiten über der Schranke  $\hat{x}$  für die Verschiebung des inneren Stützenkopfs.

Während die obere Kurve einen recht glatten Verlauf zeigt, der sogar über den Wertebereich der Referenz hinausgeht, ist in der unteren Abbildung bei  $\hat{x} = 4,8 \cdot 10^{-2}m$  der erste Knick deutlich erkennbar. Bis zu dieser Stelle stimmen beide Kurven gut mit der Referenzlösung überein. Die Standardfehler an dieser Stelle betragen 30% bzw. 55%.  $p = 0,7$  bringt keine wesentlich anderen Ergebnisse, bei  $p = 0,8$  sind die Ergebnisse instabil, d.h. die Kurven fluktuieren stärker und sind schlecht reproduzierbar.

Die entsprechenden Darstellungen für die Relativverschiebung zwischen dem Kopf der inneren Stütze und dem Brückenüberbau finden sich in Bild 5.6. Durch den Knick bei  $x = 0,12m$  ist die unten dargestellte Simulation zwar zu verwerfen, die Ergebnisse bei  $\hat{x} = 0,165m$  liegen aber noch in der gleichen Größenordnung. Hier ist der statistische Fehler jeweils circa 30% .

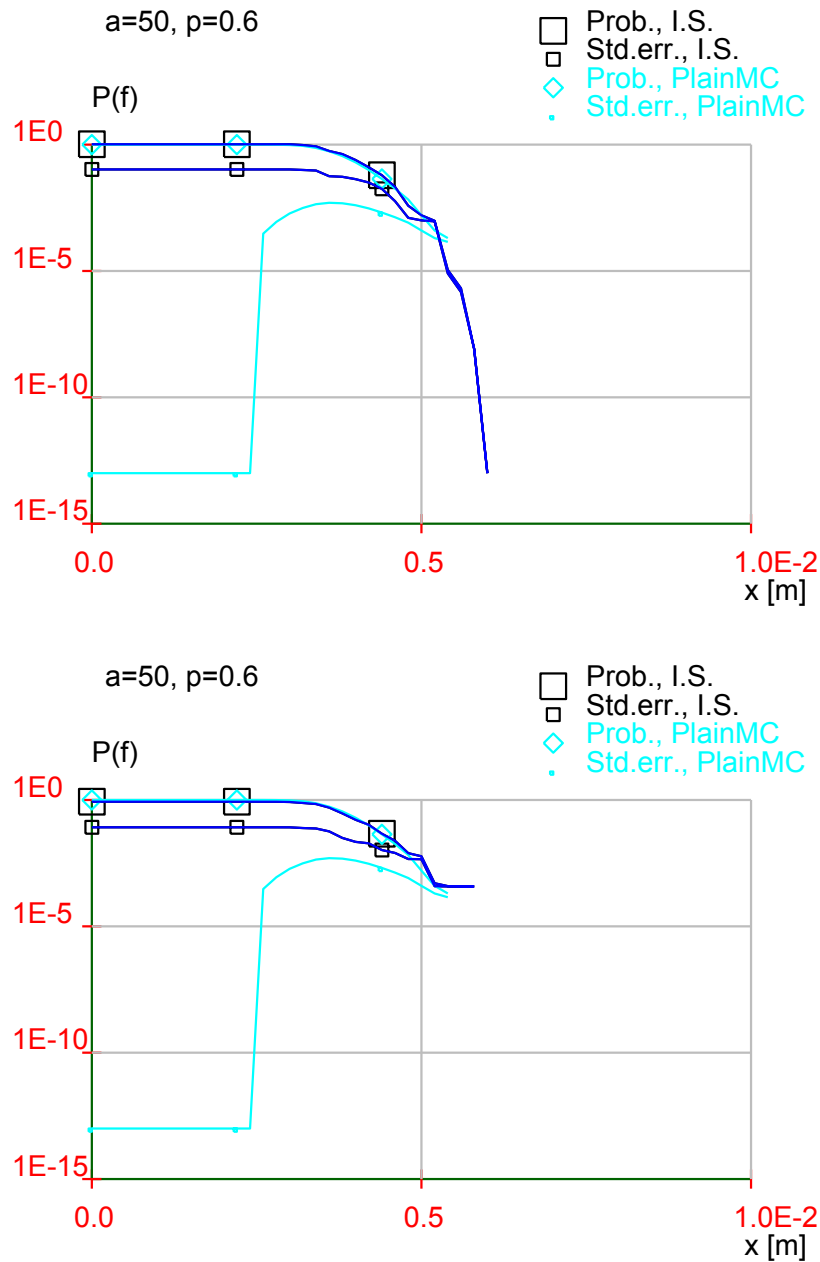


Bild 5.5: Erstüberschreitenswahrscheinlichkeiten der Verschiebung des inneren Stützenkopfes über der Schranke  $\hat{x}$ . Ergebnisse von zwei Simulationen mit  $a = 50$ ,  $p = 0,6$ . (Prob.: Wahrscheinlichkeit, Std.err: Standardfehler, PlainMC: einfache Monte Carlo Simulation, I.S.: *Importance Sampling*.)



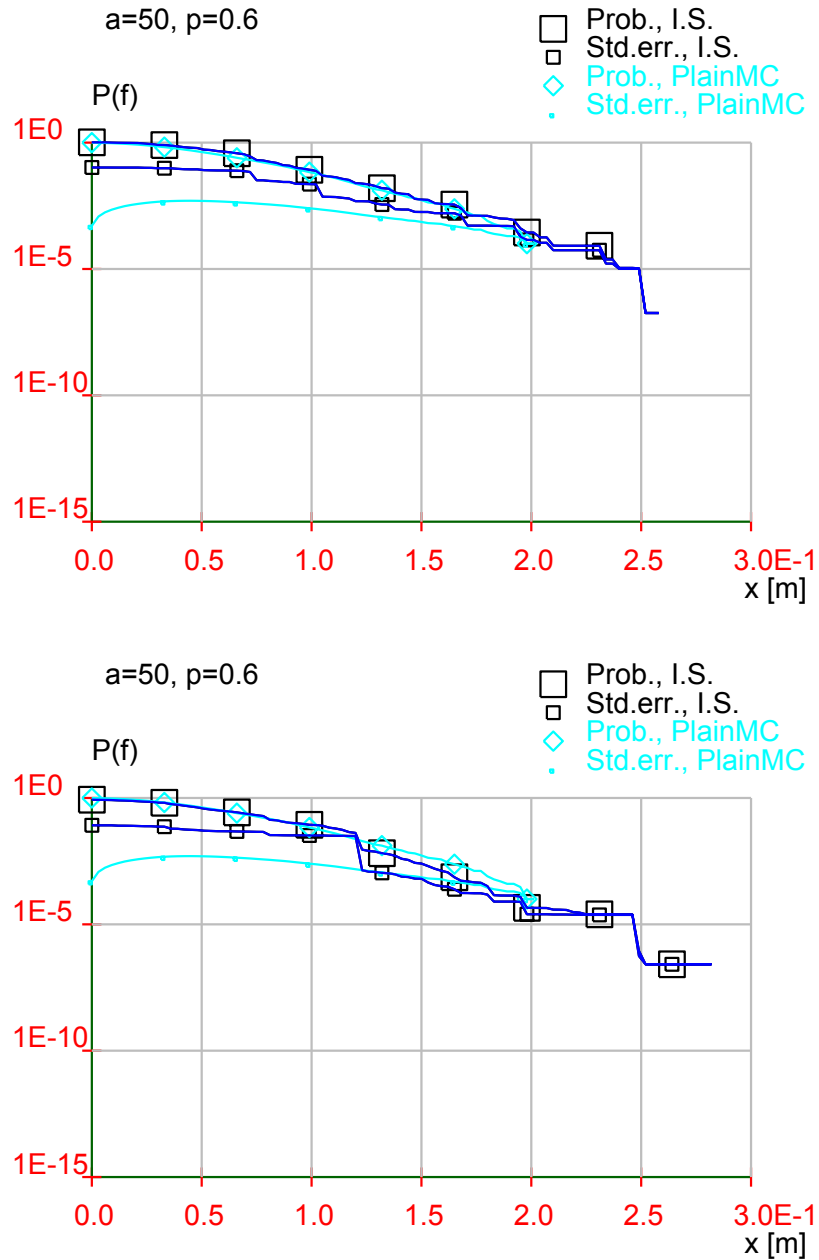


Bild 5.6: Erstüberschreitenswahrscheinlichkeiten der Relativverschiebung innere Stütze – Überbau über der Schranke  $\hat{x}$ . Ergebnisse von zwei Simulationen mit  $a = 50$ ,  $p = 0,6$ . (Prob.: Wahrscheinlichkeit, Std.err: Standardfehler, PlainMC: einfache Monte Carlo Simulation, I.S.: *Importance Sampling*.)

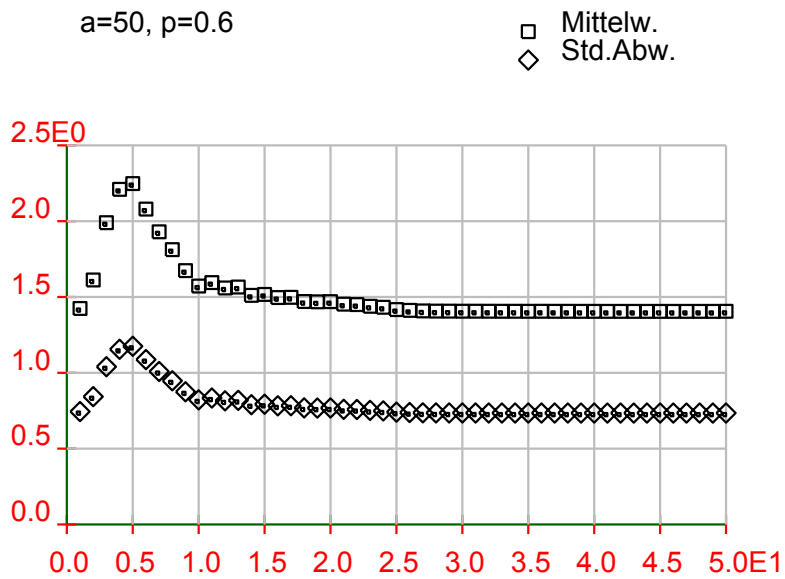
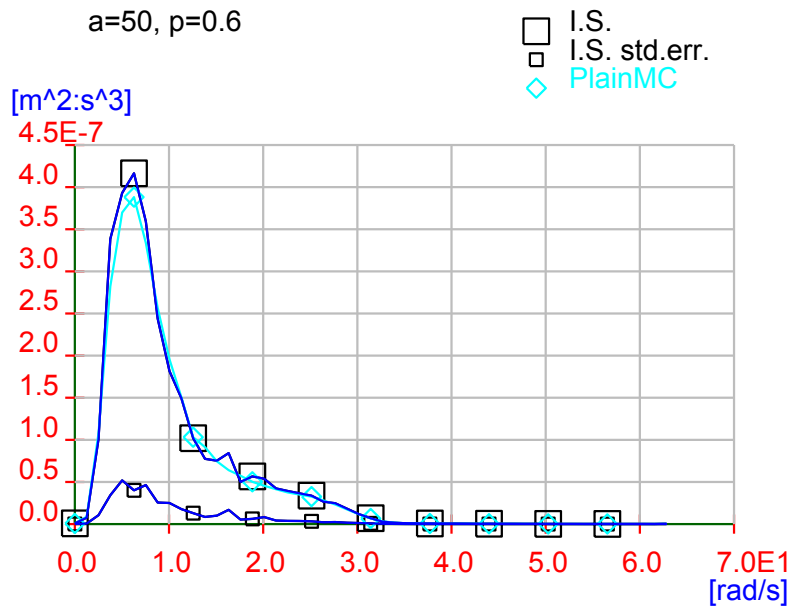


Bild 5.7: „Leistungsspektrum“ der inneren Stützenkopfverschiebung (oben) und Parameter für *Importance Sampling* der 2. Simulation (unten),  $a = 50, p = 0,6$ .

Die bisherigen Simulationen mit einem Stichprobenumfang von  $N = 1000$  im zweiten Lauf erreichen also verlässliche Werte nur bis zu einer Größenordnung von  $P_F = 1 \cdot 10^{-3}$ , wenn auch mit wesentlich geringerem Aufwand, als für die einfache Simulation erforderlich ist. Das angestrebte Sicherheitsniveau dagegen, in [22] ausgedrückt durch den Sicherheitsindex  $\beta = 3.5$ , entspricht einer Versagenswahrscheinlichkeit von  $P_F \approx 2 \cdot 10^{-4}$ . Um Erstüberschreitenswahrscheinlichkeiten in dieser Größenordnung zu erhalten, wurde eine Simulation mit  $N = 10000$  und  $p = 0,6$  durchgeführt. In den Bildern 5.8 ff. sind die Ergebnisse der Simulation dargestellt. Zur besseren Ablesung wurde eine Linie bei  $2 \cdot 10^{-4}$  gezogen. Als Referenzlösung war es hier möglich, eine einfache Monte Carlo – Simulation mit einem Stichprobenumfang von  $N = 100000$  durchzuführen. Diese Berechnung dauerte, verteilt auf 16 R12000 – Prozessoren einer SGI Origin, vier Tage. Man erkennt daran den unpraktikablen Rechenaufwand, der für die einfache Simulation erforderlich ist. Die Lösung mit Spectral Importance Sampling stimmt mit der Referenz nicht nur sehr gut überein, sondern besitzt auch einen größeren Wertebereich auf der Abszisse.

Die innere Stützenkopfvverschiebung, die im betrachteten Zeitintervall mit  $P[\max_{t \in T} X(t) \geq \hat{x}] \approx 2 \cdot 10^{-4}$  erreicht oder überschritten wird, ist  $\hat{x} = 0,005m$ , bei einem Standardfehler von circa 30%. Die Relativverschiebung zwischen Stützenkopf und Überbau, mit derselben Wahrscheinlichkeit, ist  $\hat{x} = 0,20m$ , Standardfehler 25%. Wie schon die vorigen Berechnungen mit kleinerem Stichprobenumfang erkennen lassen, zeigt sich hier deutlich, daß für die betrachteten Verschiebungsgrößen die geforderte Sicherheit der Konstruktion gegen das oben beschriebene simulierte Erdbeben gegeben ist.

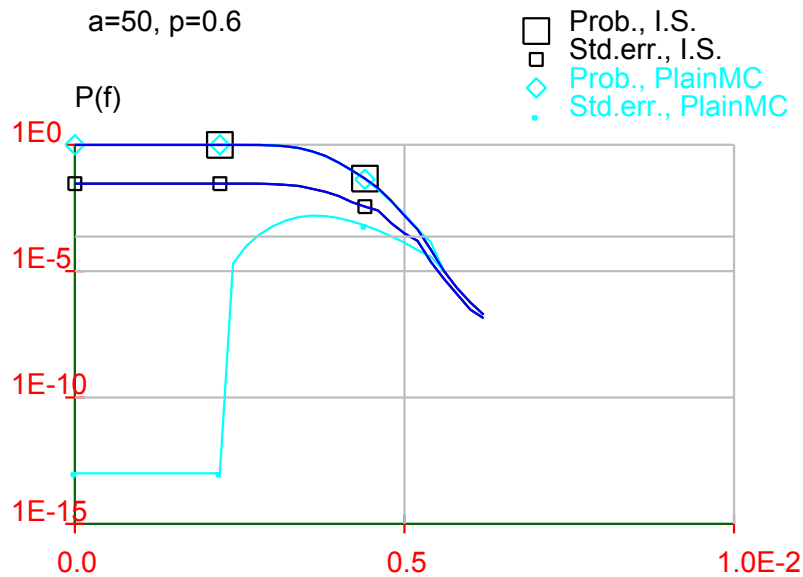


Bild 5.8: Erstüberschreitenswahrscheinlichkeiten der Verschiebung des inneren Stützenkopfes über der Schranke  $\hat{x}$ ,  $N_2 = 10000$ . (Prob.: Wahrscheinlichkeit, Std.err: Standardfehler, PlainMC: einfache Monte Carlo Simulation, I.S.: *Importance Sampling*.)

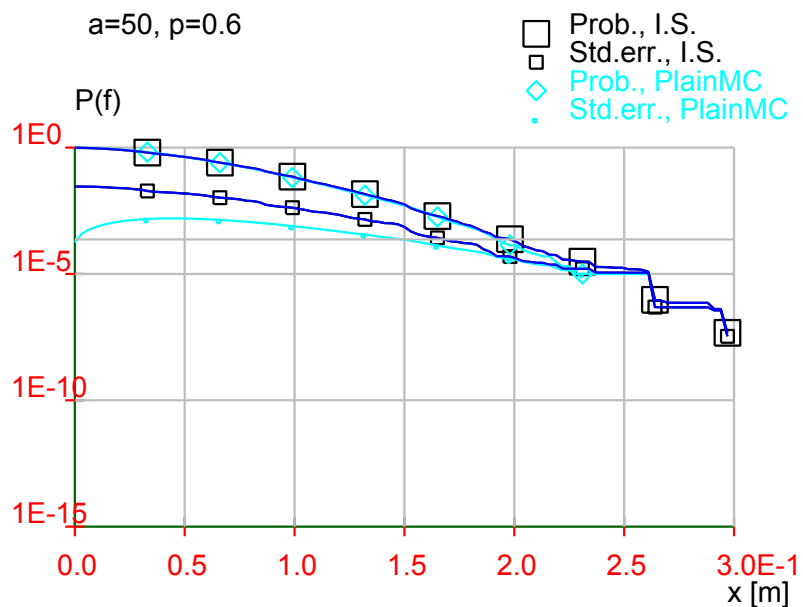


Bild 5.9: Erstüberschreitenswahrscheinlichkeiten der Relativverschiebung innere Stütze – Überbau über der Schranke  $\hat{x}$ ,  $N_2 = 10000$ . (Prob.: Wahrscheinlichkeit, Std.err: Standardfehler, PlainMC: einfache Monte Carlo Simulation, I.S.: *Importance Sampling*.)

Um die Auswirkung der *Hysteretic Devices* auf die Sicherheit im Vergleich zu einer Konstruktion, bei welcher nur Elastomerlager vorgesehen sind, zu demonstrieren, wurde eine lineare Berechnung durchgeführt. Die Parameter des UHYDE2 – Elementes wurden hier so eingestellt, daß sich das Element linear verhält mit einer Steifigkeit von  $\alpha k = 3 \cdot 10^6 N/m$  (vgl. Abschnitt 5.3). Diese Steifigkeit entspricht einem üblichen Elastomerlager. Bilder 5.10 und 5.11 zeigen wiederum die Erstüberschreitenswahrscheinlichkeiten. Zum Vergleich ist die Lösung des nichtlinearen Systems mit abgebildet. Hier zeigt sich, daß durch die geringe Steifigkeit der Lager die Stützenköpfe wesentlich kleinere Verschiebungen erfahren. Gleiche Verschiebungen werden mit um Größenordnungen geringeren Wahrscheinlichkeiten erreicht, als bei Einsatz der *Hysteretic Devices*. Dies ist zwar für die Sicherheit der Stützen vorteilhaft, aber die Relativverschiebungen sind dagegen erheblich größer. Die Erstüberschreitenswahrscheinlichkeit über den Grenzwert von  $\hat{x} = 0,3m$  beträgt  $P_F \approx 0,15$ . Die *Hysteretic Devices* sind also nicht nur in der Lage, die Schnittgrößen im kritischen Bauteil zu begrenzen (die Stützenkopfverschiebung ist ein Maß für das Einspannmoment am Fuß), sondern auch durch Energiedissipation die Verschiebungen innerhalb der zulässigen Grenzen zu halten. Für die lineare Berechnung war der Stichprobenumfang wiederum  $N = 100$  bzw.  $N = 1000$ . In Bild 5.12 erkennt man, daß die Strukturantwort sehr schmalbandig ist. Im zweiten Lauf wurden deshalb nur 5 Amplituden als Zufallsvariablen eingeführt, mit einem Erhöhungsfaktor  $p = 2$ .

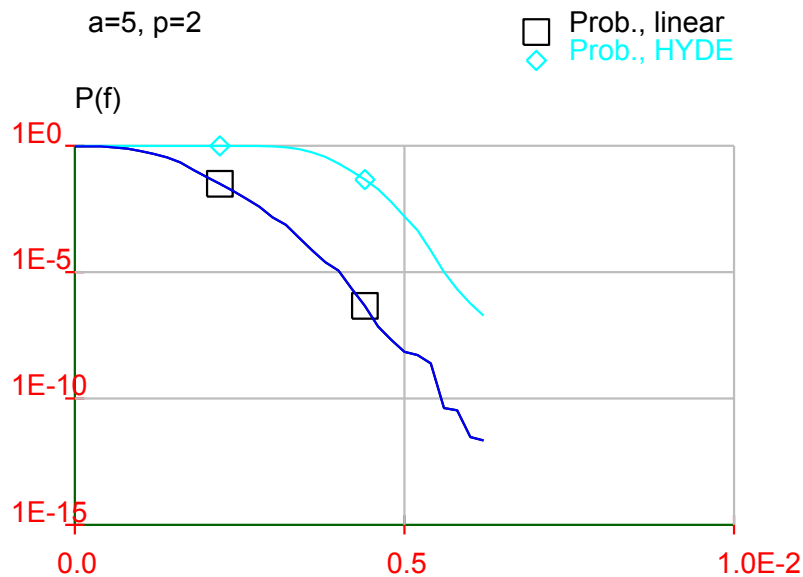


Bild 5.10: Erstüberschreitenswahrscheinlichkeiten der Verschiebung des inneren Stützenkopfes über der Schranke  $\hat{x}$ . (Prob.: Wahrscheinlichkeit, Linear: lineares System, HYDE: System mit *Hysteretic Devices*.)

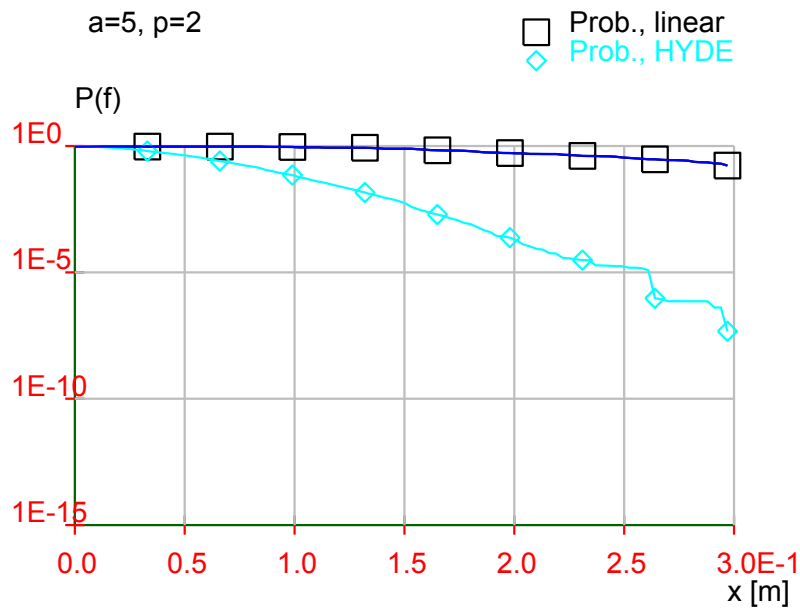


Bild 5.11: Erstüberschreitenswahrscheinlichkeiten der Relativverschiebung innere Stütze – Überbau über der Schranke  $\hat{x}$ , lineares System. (Prob.: Wahrscheinlichkeit, Linear: lineares System, HYDE: System mit *Hysteretic Devices*.)

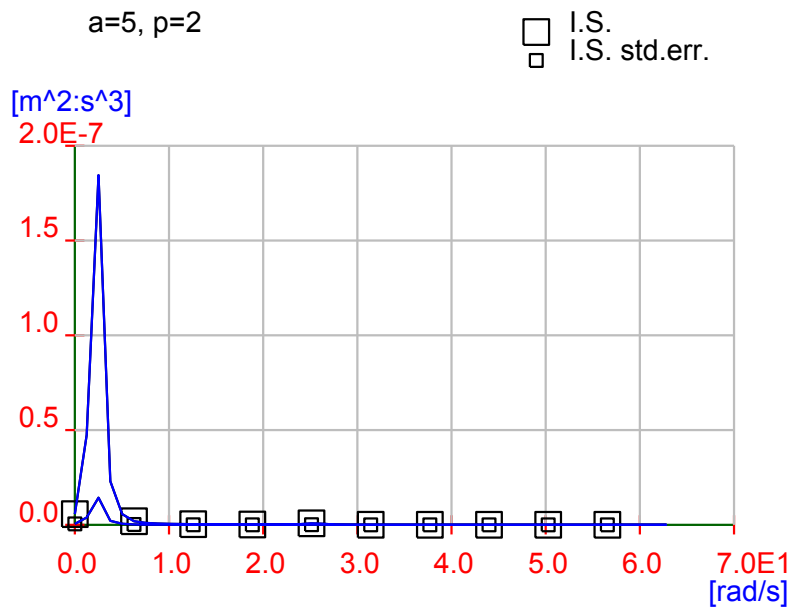


Bild 5.12: Leistungsspektrum der inneren Stützenkopfverschiebung, lineares System.

Bei einem linearen System unter normalverteilter Anregung sind auch die Strukturantworten normalverteilt, bei einem nichtlinearen System ist das nicht unbedingt der Fall. Deshalb ist es interessant, auch die Verteilungen der bisher ausgewerteten Größen zu betrachten. Aus den Zeitreihen der Strukturantworten wurde die Verteilung nach Gln. (3.98) ff. ermittelt. Die Bedingung der Stationarität der Strukturantwort kann bei einem hysteretischen System nur für einen ausreichend langen Beobachtungszeitraum als erfüllt angesehen werden. Die Schätzung der Verteilung sei hier für eine prinzipielle Beurteilung ausreichend. Zum Vergleich wurden die ersten beiden statistischen Momente der Strukturantworten geschätzt und damit eine normalverteilte Zufallsvariable definiert. Aus den Bildern 5.13 und 5.14 wird deutlich, daß die Stützenkopfverschiebungen einer Verteilung folgen, deren Dichtefunktion eine wesentlich größere „Steilheit“ (Kurtosis) aufweist als die Normalverteilung. Dagegen hat die Relativverschiebung einen flacheren Verlauf. Die vereinfachende Annahme einer Normalverteilung zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten ist damit insbesondere in den Bereichen kleiner Wahrscheinlichkeitsdichten nicht gerechtfertigt. Für die Stützenkopfverschiebung würde die Annahme der Normalverteilung zu einer konservativen Abschätzung der Versagenswahrscheinlichkeit führen, nicht dagegen für die Relativverschiebung zwischen Stütze und Überbau.

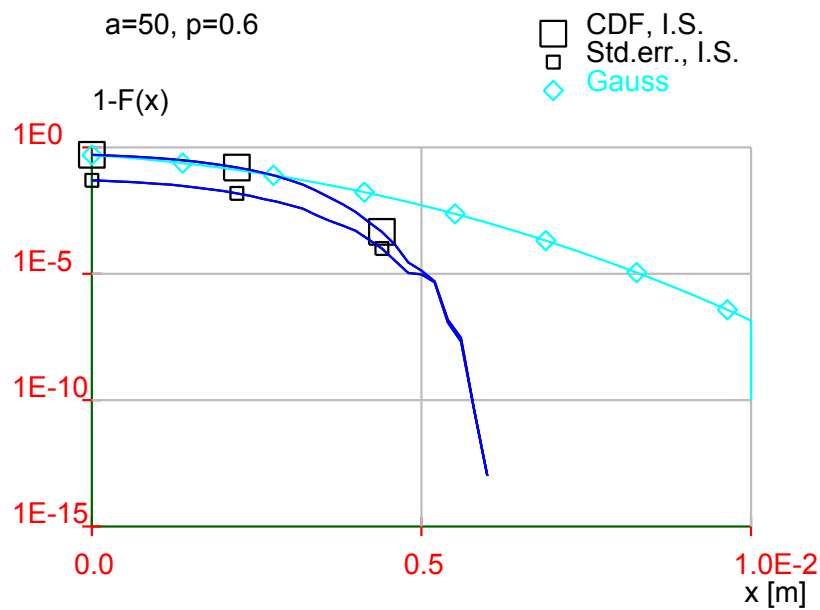


Bild 5.13: Verteilung der inneren Stützenkopfverschiebung, hysteretisches System. (CDF.: Verteilungsfunktion, Std.err.: Standardfehler, PlainMC: einfache Monte Carlo Simulation, I.S.: *Importance Sampling*.)

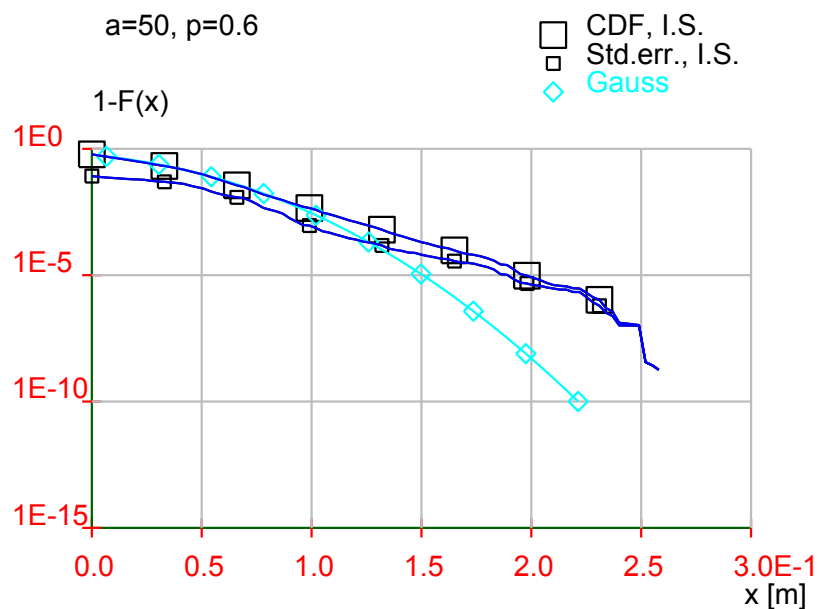


Bild 5.14: Verteilung der Relativverschiebung innere Stütze – Überbau, hysteretisches System. (CDF.: Verteilungsfunktion, Std.err.: Standardfehler, PlainMC: einfache Monte Carlo Simulation, I.S.: *Importance Sampling*.)



---

## 6

# Schlußbemerkungen

In der vorliegenden Arbeit wurde ein Monte Carlo – Simulationsverfahren konzipiert und getestet, das sehr gut zur Berechnung von Erstüberschreitenswahrscheinlichkeiten von nichtlinearen Strukturen unter zufälliger dynamischer Anregung geeignet ist. Monte Carlo Simulation stellt eine allgemeine und genaue Methodik dar, um für realistische, ingenieurmäßige Anwendungen, d.h. für große Strukturen mit stark nichtlinearem Verhalten und für eine hohe Zahl der zufälligen Basisvariablen, eine Zuverlässigkeitsanalyse durchzuführen. Um den Rechenzeitbedarf gegenüber der einfachen Monte Carlo Simulation zu reduzieren, kommen sogenannte varianzmindernde Simulationsverfahren zum Einsatz. Unter der Vielzahl der varianzmindernden Verfahren erscheint das Konzept des *Importance Sampling* aufgrund von Erfahrungen und theoretischen Überlegungen wiederum als das Allgemeinste, insbesondere für die komplexe Aufgabe der Simulation eines Zufallsprozesses. Der Prozeß wird im Frequenzbereich parametrisiert, wodurch die Anwendung von *Importance Sampling* auf die zufälligen Amplituden ermöglicht wird.

Zur Anwendung kommt das *Spectral Importance Sampling* genannte Verfahren, wie es in den Abschnitten 4.2 und 4.3 erläutert wurde. Die Prozedur besteht aus zwei aufeinanderfolgenden Simulationsläufen. Die erste „Pilotsimulation“ dient der Schätzung des Leistungsspektrums der Strukturantwort. Anhand dieses Ergebnisses werden vor der zweiten Simulation zwei Maßnahmen ergriffen: Erstens werden in den Bereichen der Spitzen des Spektrums diejenigen Frequenzen ausgewählt, für die Amplituden als Zufallsvariable eingeführt werden. So ist eine Reduzierung der Anzahl der Zufallsvariablen gegenüber einer Repräsentation des Prozesses mit zufälligen Amplituden im gesamten Frequenzbereich möglich. Zweitens werden die Simulationsdichten der zufälligen Amplituden so adaptiert, daß Mittelwerte und Standardabweichungen um Werte proportional dem Spektrum erhöht werden. Durch diese Orientierung am Leistungsspektrum der Strukturantwort, quasi durch Erzeugung von Resonanz – ähnlichen Effekten, wird die Versagenswahrscheinlichkeit für die so generierte Stichprobe erhöht und dadurch die Effizienz des Simulationsverfahrens gegenüber einfacher Monte Carlo Simulation signifikant gesteigert. Sind die Parameter für die Simulation und Adaption

der Variablen einmal kalibriert, kann die zweistufige Simulationsprozedur automatisch ohne Benutzereingriff ablaufen.

Die Testbeispiele zeigen, daß das Verfahren für verschiedene Arten von nichtlinearen Systemen geeignet ist, selbst für numerisch schwierige Probleme wie solche ohne Steifigkeit nach Überschreiten der Elastizitätsgrenze, oder für hysteretische Systeme mit trockener Reibung. Die Testbeispiele geben auch Erfahrungswerte zur Wahl der Simulationsparameter, vgl. Abschnitt 4.5.

Die Kombination des Verfahrens mit *Directional Sampling* wurde aufgrund der Ergebnisse der Testbeispiele zunächst wieder verworfen. Für die Testbeispiele 2 (konservative Nichtlinearität mit Steifigkeit Null oberhalb der Elastizitätsgrenze) und 3 (hysteretisches System), können sehr ungenaue oder falsche Ergebnisse auftreten, die ohne das Vorhandensein einer Referenzlösung nicht erkennbar sind. Weitere Untersuchungen hierzu erscheinen dennoch sinnvoll.

Das Simulationsverfahren wurde für die Zuverlässigkeitsanalyse einer Eisenbahnbrücke unter Erdbebenbelastung eingesetzt. Die untersuchte Brückenkonstruktion soll nach einem Starkbeben gebrauchsfähig sein, d.h. die tragenden Bauteile sollen im linear-elastischen Zustand bleiben. In der Konstruktion wird ein spezielles Dämpfungselement eingesetzt, welches durch trockene Reibung Energie dissipiert. Durch die Zuverlässigkeitsanalyse wird deutlich, daß der in der Brücke zwischen Stützen und Überbau eingesetzte Reibungsdämpfer in der Lage ist, die Schnittgrößen zu begrenzen und gleichzeitig die Relativverschiebungen an dieser Stelle zu begrenzen. Die mit der vorgegebenen Zielversagenswahrscheinlichkeit von  $P_F = 2 \cdot 10^{-4}$  erreichten Verschiebungen liegen weit unter den zulässigen Werten.

Zum Vergleich wurde eine Konstruktion betrachtet, in der nur relativ weiche Elastomerlager zwischen Stütze und Überbau vorhanden sind. Hier sind zwar die Stützenkopfverschiebungen und damit die Beanspruchung der Stützen geringer, jedoch werden extrem hohe Werte der Relativverschiebungen Überbau – Stütze erreicht.

Die genaue probabilistische Beschreibung der Strukturantworten durch die Monte Carlo Simulation zeigt — wie für nichtlineare Systeme zu erwarten ist — starke Abweichungen von der Normalverteilung. Zuverlässigkeitsmethoden, die von der Annahme der Normalverteilung ausgehen bzw. auf einer probabilistischen Beschreibung der Strukturantworten durch statistische Momente bis zur zweiten Ordnung beruhen, sind daher in Frage zu stellen.

Als weitere Anwendungen des Verfahrens sind die Simulation von Vektorprozessen und die Simulation von nicht – normalverteilten Prozessen denkbar, wie auf S. 40 geschildert. Allerdings liegen bei praktischen Anwendungen oft keine Informationen über den Erregungsprozeß vor, die über eine Beschreibung im Sinne zweiter statistischer Momente hinausgehen. Hierdurch ist in der Regel die Annahme der Normalverteilung des Prozesses begründet.

Eine mögliche Weiterentwicklung liegt in der Simulation instationärer Prozesse. Es ist eine übliche Näherung, die Starkbebenphase eines Erdbebens als stationären Prozeß

zu modellieren (Soong, Grigoriu [80]). Es gibt aber auch Erdbebenereignisse mit einer über die Zeit veränderlichen Intensität und auch Frequenzzusammensetzung, z.B. Grigoriu *et al.* [35].

Veröffentlichungen von Zwischenstufen der Entwicklungen im Rahmen dieser Arbeit, z.B. [7], wurden von Hoshiya *et al.* [39] aufgegriffen und auf instationäre Phänomene erweitert. Hier wird der Beobachtungszeitraum in mehrere Intervalle unterteilt und die Adaption der Variablen nach dem beschriebenen Verfahren für die verschiedenen Zeitintervalle getrennt durchgeführt. Es sind in Vorstudien die Zeitintervalle zu ermitteln, innerhalb derer der Prozeß als stationär angesehen werden kann. Insofern ist dieses Verfahren aus praktischen Gründen beschränkt auf langsame Fluktuation der statistischen Eigenschaften. Davon abgesehen ist es unabhängig von der Ursache bzw. der Modellierung der Nichtlinearität.

Ein in der Literatur im Zusammenhang mit der Simulation von Erdbeben verbreitetes Modell ist ein Prozeß mit evolutionärem Leistungsspektrum, vorgeschlagen von Priestley, 1967 [68] (s. auch Shinozuka und Deodatis [77]). Zur Herleitung des Modells wird der Integrand in Gl. (3.51) mit einer „langsam fluktuierenden“ Modulationsfunktion  $a(t, \omega)$  multipliziert. Das entspricht einer Instationarität der statistischen Momente zweiter Ordnung. Interessant erscheint auch folgender Ansatz: Ein Prozeß  $X(t)$  habe Mittelwert Null und eine instationäre Kovarianzfunktion, also  $E[X(t_1)X(t_2)] = c_{XX}(t_1, t_2)$ . Außerdem sei die Varianz endlich innerhalb des betrachteten Zeitraums  $[0, T]$ , ebenso die Kovarianzfunktion im Bereich  $[0, T] \times [0, T]$ . Hierfür leitet Grigoriu [31] ein Simulationsmodell her, das formal ähnlich der hier verwendeten spektralen Darstellung ist. Die Zufallsvariablen dieses Modells sind im Gegensatz zu denen der spektralen Darstellung miteinander korreliert. Das Modell des evolutionären Leistungsspektrums ist hierin als Sonderfall enthalten. Aufgrund der formalen Ähnlichkeit der Modelle ist es vielleicht möglich, ein dem *Spectral Importance Sampling* ähnliches Verfahren zur Simulation instationärer Prozesse zu entwickeln. Aufgrund der nun anderen Interpretation der Parameter sind die Kriterien zur Adaption der Simulationsvariablen entsprechend anzupassen.

# Liste häufig gebrachter Formelzeichen

Die folgende Aufstellung gibt häufig gebrachte Formelzeichen bzw. Schreibweisen wieder. Abweichende Verwendung ist möglich und im Textzusammenhang erklärt.

$a, b, \dots$	deterministische Zahl; eine Realisation einer Zufallsvariablen
$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots$	deterministischer Vektor; eine Realisation eines Zufallsvektors
$A, B, \dots$	Zufallsvariable
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots$	Zufallsvektor
$\bar{a}$	statistischer Schätzer für $a$ , bzw. Schätzwert
$\text{cov}[\dots]$	Kovarianz der Argumente
$E[\dots]$	Erwartungswert des Arguments
$f_X(x)$	Dichtefunktion der Zufallsvariablen $X$
$F_X(x)$	Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen $X$
$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$	gemeinsame Dichtefunktion der Komponenten des Zufallsvektors $\mathbf{X}$
$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$	gemeinsame Verteilungsfunktion der Komponenten des Zufallsvektors $\mathbf{X}$
$\Phi(\cdot)$	Verteilungsfunktion der Standardnormal - Verteilung (Gauß - Verteilung mit $\mu = 0$ , $\sigma = 1$ , bei mehreren Argumenten: paarweise voneinander unabhängig)
$g(\mathbf{X})$	Grenzzustandsfunktion, s. Gl. (1.1)
$g_{XX}(\cdot)$	einseitiges Leistungsspektrum eines Zufallsprozesses, s. Gl. (3.66)
$i$	(wenn nicht als Laufindex einer Summation verwendet:) imaginäre Einheit, $i = \sqrt{-1}$
$I(\cdot)$	Indikatorfunktion, s. Gl. (2.2)
$\mu_X$	Mittelwert der Zufallsvariablen $X$
$P[\dots]$	Eintretenswahrscheinlichkeit des Arguments
$P_F$	<i>probability of failure</i> , Versagenswahrscheinlichkeit
$r_{XX}(\cdot)$	Auto - Korrelationsfunktion eines Zufallsprozesses
$s_{XX}(\cdot)$	Leistungsspektrum eines Zufallsprozesses
$\sigma_X$	Standardabweichung der Zufallsvariablen $X$
$\text{var}[\dots]$	Varianz des Arguments

---

# Literatur

- [1] Abramowitz, M.; Stegun, I.M., 1972, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, New York, USA
- [2] Ang, G. L.; Ang, A. H.-S.; Tang, W. H., 1990, „Kernel Method in Importance Sampling Density Estimation“, Ang, A. H.-S.; Shinozuka, M.; Schuëller, G. I. (eds.), „Structural Safety and Reliability“, *Proceedings of ICOSSAR '89*, ASCE, S. 1193 - 1200
- [3] Ang, G. L.; Ang, A. H.-S.; Tang, W. H., 1992, „Optimal Importance Sampling Density Estimator“, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE , Vol. 118, Nr. 6, S. 1146 - 1163
- [4] Ayyub, B.M; Chia, C.-Y., 1992, „Generalized conditional expectation for structural reliability assessment“, *Structural Safety*, Vol. 11, S. 131 - 146
- [5] Ayyub, B.M; Haldar, A., 1984, „Practical Structural Reliability Techniques“, *Journal of Structural Engineering*, ASCE , Vol. 110, Nr. 8, S. 1707- 1724
- [6] Ayyub, B. M.; Lai, K. - L., 1990, „Structural Reliability Assessment Using Latin Hypercube Sampling“, Ang, A. H.-S.; Shinozuka, M.; Schuëller, G. I. (eds.), „Structural Safety and Reliability“, *Proceedings, ICOSSAR '89*, ASCE, S. 1177 - 1184
- [7] Bayer, V.; Bucher, C., 1998, „An Importance Sampling Procedure for First Passage Problems“, Shiraishi, N.; Shinozuka, M.; Wen, Y.K. (eds.), „Structural Safety and Reliability“, *Proceedings of ICOSSAR '97*, A. A. Balkema, S. 501 - 504, Rotterdam, Niederlande
- [8] Bjerager, P., 1988, „Probability Integration by Directional Simulation“, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE , Vol. 114, Nr. 8, S. 1285 - 1302
- [9] Bourgund, U.; Bucher, C. G., 1986, „Importance Sampling Procedure Using Design Points (ISPUD) - a User's Manual“, Bericht Nr. 8-86, Institut für Mechanik, Universität Innsbruck, Innsbruck, Austria

- 
- [10] Bronstein, I.N. *et al.*, 1995, *Taschenbuch der Mathematik*, Neubearbeitung, 2. Auflage, Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt am Main
- [11] Bucher, C. G., 1988, „Adaptive Sampling - An Iterative Fast Monte Carlo Procedure“, *Structural Safety*, Vol. 5, Nr. 2, S. 119 - 126
- [12] Bucher, C. G.; Nienstedt, J.; Ouypornprasert, W., 1989, „Adaptive Strategies in ISPUD V 3.0“, Bericht Nr. 25-89, Institut für Mechanik, Universität Innsbruck, Innsbruck, Austria
- [13] Bucher, C. G.; Pradlwarter, H. J.; Schuëller, G. I., 1989, „COSSAN - Ein Beitrag zur Software-Entwicklung für die Zuverlässigkeitsbewertung von Strukturen“, VDI, Bericht zur Zuverlässigkeit von Komponenten Technischer Systeme, S. 271 - 281, Düsseldorf
- [14] Cai, C. G.; Lin, Y. K.; Xu, W., 1998, „Response and reliability of nonlinear systems under non-Gaussian excitations“, *Proceedings, Fourth International Conference on Stochastic Structural Dynamics*, Notre Dame/Indiana, USA
- [15] Clough, R. W.; Penzien, J., 1993, *Dynamics of Structures*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, USA
- [16] Deák, I., 1980, „Three Digit Accurate Multiple Normal Probabilities“, *Numerische Mathematik*, Nr. 35, S. 369 - 380
- [17] Ditlevsen, O.; Bjerager, P.; Olesen, R.; Hasofer, A. M., 1988, „Directional Simulation in Gaussian Processes“, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 3, Nr. 4, S. 207 - 217
- [18] Ditlevsen, O.; Melchers, R. E.; Gluwer, H., 1990, „General Multi-Dimensional Probability Integration by Directional Simulation“, *Computers & Structures*, Vol. 36, Nr. 2, S. 355 - 368
- [19] Dorka Structural Control, 1995, *Device Family UHYDE-f*, Technische Information, Enkenbach - Alsenborn
- [20] Dorka Structural Control, 1997, *UHYDE-f-Br*, Technische Information, Enkenbach - Alsenborn
- [21] Dorka, U. E., 1994, „Hysteretic Device Systems for Earthquake Protection of Buildings“, *Proceedings, Fifth National Conference on Earthquake Engineering*, S. 775 - 785, Chicago, IL, USA
- [22] Dorka, U.E.; Flygare, E.; Ji, A., 1998, „Passive Seismic Control of Bridges by Hysteretic Device Systems“, *Proceedings of the 2nd World Conference on Structural Control*, 28.6. - 1.7.1997, Kyoto, Japan
-

- 
- [23] Englund, S.; Rackwitz, R., 1993, „A benchmark study on importance sampling techniques in structural reliability“, *Structural Safety*, Vol. 12 , S. 255 - 276
- [24] Eurocode 1, 1994, *Grundlagen der Tragwerksplanung und Einwirkungen auf Tragwerke, Deutsche Fassung DIN ENV 1991-1*, Deutsches Institut für Normung e.V., Berlin,
- [25] Florian, A., 1992, „An efficient sampling scheme: Updated Latin Hypercube Sampling“, *Probabilistic Engineering Mechanics* , Vol. 7, S. 123 - 130
- [26] Friot, E; Bouc, R., 1994, „Fast Synthesis of ARMA Models for the Recursive Simulation of a Scalar Random Process with a Given Target Spectrum“, *Journal of Sound andVibration*, Vol. 170, Nr. 3, S. 415 - 421
- [27] Fu, G., 1994, „Variance reduction by truncated multimodal importance sampling“, *Structural Safety*, Vol. 13 , S. 267 - 283
- [28] Fu, G.; Moses, F., 1993, „Multimodal Simulation Method for System Reliability Analysis“, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE , Vol. 119, Nr. 6, S. 1173 - 1179
- [29] Grigoriu, M., 1984, „Crossings of Non-Gaussian Translation Processes“, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE , Vol. 110, Nr. 4, S. 610 - 620
- [30] Grigoriu, M., 1986, „Errors in Simulation of Random Processes“, *Journal of Structural Engineering*, ASCE , Vol. 112, Nr. 12, S. 2697 - 2702
- [31] Grigoriu, M., 1992, „Simulation of Nonstationary Gaussian Processes by Random Trigonometric Polynomials“, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE , Vol. 119, Nr. 2, S. 328 - 343
- [32] Grigoriu, M., 1993, „On the spectral representation method in simulation“, *Probabilistic Engineering Mechanics* , Vol. 8, S. 75 - 90
- [33] Grigoriu, M., 1993b, „Simulation of Stationary Process via a Sampling Theorem“, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 166, Nr. 2, S. 301 - 313
- [34] Grigoriu, M., 1996, „Calibration and Simulation of Non-Gaussian Translation Processes“, Frangopol, D.; Grigoriu, M. (eds.), *Proceedings, 7th ASCE Specialty Conference on Probabilistic Mechanics and Structural Reliability*, S. 804 - 807, New York, USA
- [35] Grigoriu, M.; Ruiz, S. E.; Rosenblueth, E., 1988, „The Mexico Earthquake of Spetember 19, 1985 — Nonstationary Models of Seismic Ground Acceleration“, *Earthquake Spectra*, Vol. 4, Nr. 3, S. 551 - 568

- 
- [36] Hammersley, J. M.; Handscomb, D. C., 1967, *Monte Carlo Methods*, Methuen & Co. Ltd., London, UK
- [37] Harbitz, A., 1986, „An Efficient Sampling Method for Probability of Failure Calculation“, *Structural Safety*, Vol. 3, S. 109 - 115
- [38] Hasofer, A. M.; Lind, N. C., 1974, „Exact and Invariant Second-Moment Code Format“, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE , Vol. 100, Nr. EM1, S.111 - 121
- [39] Hoshiya, M.; Taniguchi, O.; Sutoh, A., 1998, „Adaptive Importance Sampling for Stochastic Nonlinear Systems“, *Proceedings, Fourth International Conference on Stochastic Structural Dynamics*, Notre Dame, IN, USA
- [40] Hu, B.; Schiehlen, W., 1997, „On the simulation of stochastic processes by spectral representation“, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 12, Nr. 2, S. 105 - 113
- [41] Huntington, D. E.; Lyrantzis, C. S., 1998, „Improvements to and limitations of Latin hypercube sampling“, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 13, Nr. 4, S. 245 - 253
- [42] Institut für Strukturmechanik, Bauhaus Universität Weimar (Hrsg.), 1998, *SLang, the Structural Language – User’s Manual*, , Weimar,
- [43] Johnson, E.A.; Bergmann, L.A.; Goldberg, D.E.; Dyke, S.E., 1996, „Monte Carlo Simulation of Dynamical Systems of Engineering Interest in a Massively Parallel Computing Environment“, *Proceedings, IUTAM Symposium on Advances in Nonlinear Stochastic Mechanics*, eds. Naess, A.; Krenk, S., Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, Niederlande
- [44] Karamchandani, A.; Bjerager, P.; Cornell, C.A., 1990, „Adaptive Importance Sampling“, Ang, A. H.-S.; Shinozuka, M.; Schuëller, G. I. (eds.), „Structural Safety and Reliability“, *Proceedings, ICOSSAR ‘89*, ASCE, S. 855 - 862
- [45] Karamchandani, A.; Cornell, C. A., 1991, „Adaptive hybrid conditional expectation approaches for reliability estimation“, *Structural Safety*, Vol. 11, Nr. 1, S. 59 - 74
- [46] Katsuki, S.; Frangopol, D. M., 1994, „Hyperspace Division Method for Structural Reliability“, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 120, Nr. 11, S. 2405 - 2425
- [47] Kijawatworawet, W., 1991, „An Efficient Adaptive Importance Directional Sampling for Nonlinear Reliability Problems“, Dissertation, Institut für Mechanik, Universität Innsbruck, Innsbruck, Österreich



- 
- [48] Li, R.; Ghanem, R., 1998, „Adaptive polynomial chaos expansions applied to statistics of extremes in nonlinear random vibration“, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 13, Nr. 2, S. 125 - 136
- [49] Lin, Y. K., 1976, *Probabilistic Theory of Structural Dynamics*, R. E. Krieger Publishing Company, Malabar, Florida, USA
- [50] Lin, Y.K.; Cai, G. Q., 1995, *Probabilistic Structural Dynamics – Advanced Theory and Applications*, McGraw - Hill, New York, USA
- [51] Liu, P.-L., Der Kiureghian, A., 1986, „Multivariate distribution models with prescribed marginals and covariances“, *Probabilistic Engineering Mechanics* , Vol. 1, Nr. 2 , S. 105 - 112
- [52] Macke, M., 1998, *Probability-Based Fatigue Design of Steel Structures*, Institut für Strukturmechanik, Bauhaus - Universität Weimar, Bericht Nr. 1/98, Weimar,
- [53] Macke, M.; Bucher, C., 1996, „On Translation Processes and Upcrossing Probabilities“, Frangopol, D.; Grigoriu, M. (eds.), *Proceedings, 7th ASCE Specialty Conference on Probabilistic Mechanics and Structural Reliability*, S. 608 - 611, New York, USA
- [54] Maes, M. A.; Breitung, K.; Geyskens, P., 1992, „Asymptotic Importance Sampling“, Lin, Y. K. (ed.), *Proceedings, 6th ASCE Specialty Conference on Probabilistic Mechanics and Structural and Geotechnical Reliability* , S. 96 - 99, New York, USA
- [55] Maes, M. A.; Breitung, K. W.; Dupuis, D. J., 1993, „Asymptotic Importance Sampling“, *Structural Safety*, Vol. 12, Nr. 3 , S. 167 - 186
- [56] McKay, M. D.; Conover, W. J.; Beckmann, R. J., 1979, „A Comparison of Three Methods for Selecting Values of Input Variables in the Analysis of Output from a Computer Code“, *Technometrics*, Vol. 21 , S. 239 - 245
- [57] Melchers, R. E., 1990, „Radial Importance Sampling for Structural Reliability“, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE , Vol. 116, Nr. 1, S. 189 - 203
- [58] Newland, D. E., 1984, *An introduction to random vibrations and spectral analysis*, 2nd ed., Longman Inc., New York, USA
- [59] Nielsen, S. R. K.; Köylüoğlu, H. U., 1996, „Path Integration Applied to Structural Systems with Uncertain Properties“, Frangopol, D.; Grigoriu, M. (eds.), *Proceedings, 7th ASCE Specialty Conference on Probabilistic Mechanics and Structural Reliability*, S. 6 - 9, New York, USA
-

- 
- [60] Novak, D.; Shiraishi, N., 1993, „Latin Hypercube Response Approximation and Sensitivity Analysis for Reliability Problems“, Research Report Nr. 93-ST-01, Kyoto University, School of Civil Engineering, Kyoto, Japan
- [61] Ouypornprasert, W.; Bucher, C. G.; Schuëller, G. I., 1990, „On the Application of Conditional Integration in Structural Reliability Analysis“, Ang, A. H.-S.; Shinozuka, M.; Schuëller, G. I. (eds.), „Structural Safety and Reliability“, *Proceedings*, ICOSSAR '89, ASCE, S. 1683 - 1689
- [62] Papoulis, A., 1991, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, McGraw - Hill, 3rd. edition, New York, USA
- [63] Peinelt, R. H.; Bucher, C. G., 1994, „Spectral analysis and synthesis of non-Gaussian processes“, Schuëller, G. I.; Shinozuka, M.; Yao, J. T. P. (eds.), „Structural Safety and Reliability“, *Proceedings*, ICOSSAR '93, A. A. Balkema, S. , Rotterdam, Niederlande
- [64] Plate, E. J., 1993, *Statistik und angewandte Wahrscheinlichkeitslehre für Bauingenieure*, Ernst & Sohn Verlag für Architektur und technische Wissenschaften, Berlin
- [65] Pradlwarter, H.J.; , 1992, „A selective MC simulation technique for non-linear structural reliability“, *Proceedings*, 6th ASCE Specialty Conference on Probabilistic Mechanics and Structural and Geotechnical Reliability, Denver, CO, USA; Ed. Lin, Y.K., S. 69 - 72
- [66] Pradlwarter, H.J.; Harnpornchai, N.; Schuëller, G.I., 1996, „On the Development of a Selective Algorithm in Advanced Monte Carlo Simulation“, *Proc.*, 7th ASCE Specialty Conference on Probabilistic Mechanics and Structural Reliability, S. 14 - 17, Worcester, USA
- [67] Pradlwarter, H. J.; Schuëller, G. I., 1997, „On Advanced Monte Carlo Simulation Procedures in Stochastic Structural Dynamics“, *International Journal on Non-Linear Mechanics*, Vol. 32, Nr. 4, S. 735 - 744
- [68] Priestley, M. B., 1967, „Power Spectral Analysis of Nonstationary Random Processes“, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 6, S. 86 - 97
- [69] Puppo, A. H.; Bertero, R. D., 1992, „Evaluation of Probabilities Using Orientated Simulation“, *Journal of Structural Engineering*, ASCE , Vol. 118, Nr. 6, S. 1683 - 1703
- [70] Rice, S. O., 1944, 1945, „Mathematical Analysis of Random Noise“, reprint 1954 in *Selected Papers on Noise and Stochastic Processes*, Wax, N. (ed.), Dover Publications, New York, USA
-

- 
- [71] Rubinstein, R. Y., 1981, *Simulation and the Monte Carlo Method*, John Wiley & Sons, New York, USA
- [72] Rubinstein, R. Y., 1991, „Modified importance sampling for performance evaluation and sensitivity analysis of computer models“, *Mathematics and Computers in Simulation*, Elsevier Science Publishers, Vol. 33 , S. 1 - 22,
- [73] Schuëller, G. I.; Pradlwarter, H. J.; Vasta. M.; Harnpornchai, N., 1998, „Benchmark study on non-linear stochastic structural dynamics“, Shiraishi, N.; Shinozuka, M.; Wen, Y.K. (eds.), „Structural Safety and Reliability“, *Proceedings of ICOSSAR '97*, A. A. Balkema, S. 355 - 362, Rotterdam, Niederlande
- [74] Shao, S.; Murotsu, Y., 1994, „Reliability of complex systems using an efficient directional simulation“, Schuëller, G. I.; Shinozuka, M.; Yao, J. T. P. (eds.), „Structural Safety and Reliability“, *Proceedings, ICOSSAR '93*, A. A. Balkema, S. 1529 - 1534, Rotterdam, Niederlande
- [75] Shinozuka, M., 1972, „Monte Carlo Solution of Structural Dynamics“, *Computers & Structures*, Vol. 2, S. 855 - 874
- [76] Shinozuka, M., 1983, „Basic Analysis of Structural Safety“, *Journal of Structural Engineering*, ASCE , Vol. 109, Nr. 3, S. 721 - 740
- [77] Shinozuka, M.; Deodatis, G., 1988, „Stochastic Process Models for Earthquake Ground Motion“, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 3, Nr. 3, S. 114 - 123
- [78] Shinozuka, M; Deodatis, G., 1991, „Simulation of stochastic processes by spectral representation“, *Applied Mechanical Reviews*, Vol. 44, Nr. 4, S. 191 - 204
- [79] Shinozuka, M.; Jan, C.-M., 1972, „Digital Simulation of Random Processes and its Applications“, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 25, Nr. 1, S. 111 - 128
- [80] Soong, T. T.; Grigoriu, M., 1992, *Random Vibration of Mechanical and Structural Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, USA
- [81] Spaethe, G., 1987, *Die Sicherheit tragender Baukonstruktionen*, VEB Verlag für Bauwesen, Berlin
- [82] Spanos, P. D.; Zeldin, B. A., 1994, „Indirect sampling method for stochastic mechanics problems“, Schuëller, G. I.; Shinozuka, M.; Yao, J. T. P. (eds.), „Structural Safety and Reliability“, *Proceedings, ICOSSAR '93*, A. A. Balkema, S. 1755 - 1761, Rotterdam, Niederlande
- [83] Spencer, B.F.; Bergman, L.A. , 1993, „On the Numerical Solution of the Fokker-Planck Equation for Nonlinear Stochastic Systems“, *Journal of Nonlinear Dynamics*, Vol. 4, S. 357 - 372
-

- 
- [84] Sun, J.-Q.; Hsu, C. S., 1988, „First-passage time probability of non-linear systems by generalized cell mapping method“, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 124, S. 233 - 248
- [85] Takada, T., 1998, „Application of Important Sampling Technique to First Passage Problems for Gaussian or Non-Gaussian Stochastic Processes“, Shiraishi, N.; Shinozuka, M.; Wen, Y.K. (eds.), „Structural Safety and Reliability“, *Proceedings of ICOSSAR '97*, A. A. Balkema, S. 419 - 426, Rotterdam, Niederlande
- [86] Tanaka, H., 1998, „Application of an importance sampling method to time-dependent system reliability analyses using the Girsanov transformation“, Shiraishi, N.; Shinozuka, M.; Wen, Y.K. (eds.), „Structural Safety and Reliability“, *Proceedings of ICOSSAR '97*, A. A. Balkema, S. 411 - 418, Rotterdam, Niederlande
- [87] Verma, D.; Fu, G.; Moses, F., 1990, „Efficient Structural System Reliability Assessment by Monte Carlo Methods“, Ang, A. H.-S.; Shinozuka, M.; Schuëller, G. I. (eds.), „Structural Safety and Reliability“, *Proceedings, ICOSSAR '89*, S. 895 - 901
- [88] Wang, G. S.; Ang, A. H.-S., 1994, „Adaptive Kernel Method for Evaluating Structural System Reliability“, Schuëller, G. I.; Shinozuka, M.; Yao, J. T. P. (eds.), „Structural Safety and Reliability“, *Proceedings, ICOSSAR '93*, A. A. Balkema, S. 1495 - 1500, Rotterdam, Niederlande
- [89] Weba, M., 1992, „Simulation and Approximation of Stochastic Processes by Spline Functions“, *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, Vol. 13, Nr. 5, S. 1085 - 1096
- [90] Wen, Y. K.; Chen, H.-C., 1987, „On fast integration for time variant structural reliability“, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 2, Nr. 3, S. 156 - 162
- [91] Winterstein, S. R., 1990, „Random Process Simulation with Fast Hartley Transform“, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 137, Nr. 3, S. 527 - 531
- [92] Wojtkiewicz, S. F.; Bergman L. A., 1998, „Computational issues arising in the solution of the Fokker-Planck equation in higher dimensions: Use of iterative solution methods“, Shiraishi, N.; Shinozuka, M.; Wen, Y.K. (eds.), „Structural Safety and Reliability“, *Proceedings of ICOSSAR '97*, A. A. Balkema, S. 851 - 858, Rotterdam, Niederlande
- [93] Wu, Y.-T., 1994, „Adaptive Importance Sampling (AIS)-Based System Reliability Sensitivity Analysis Method“, *Probabilistic Structural Mechanics: Advances in Structural Reliability Methods*, Spanos, P. D.; Wu, Y.-T. (eds.), Springer, S. 550 - 564, Berlin
-

- 
- [94] Wu, Y.-T.; Torng, T. Y.; Burnside, O. H.; Rheinfurt, M. H., 1992, „Probabilistic Rotordynamics Analysis Using an Adaptive Importance Sampling Method“, *Proceedings, 6th Specialty Conference on Probabilistic Mechanics and Structural and Geotechnical Reliability*, Ed. Lin, Y.K., ASCE, S. 491 - 494, New York, USA
- [95] Yamazaki, F.; Shinozuka, M., 1988, „Digital Generation of Non-Gaussian Stochastic Fields“, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE , Vol. 114, Nr. 7, S. 1183 - 1197
- [96] Yang, J. N., 1973, „On the Normality and Accuracy of Simulated Random Processes“, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 26, S. 417 - 428
- [97] Yonezawa, M.; Okuda, S., 1994, „An improved importance sampling density estimation for structural reliability assessment“, Schuëller, G. I.; Shinozuka, M.; Yao, J. T. P. (eds.), „Structural Safety and Reliability“, *Proceedings, ICOSSAR '93*, A. A. Balkema, S. 1501 - 1508, Rotterdam, Niederlande
- [98] Ziha, K., 1995, „Descriptive sampling in structural safety“, *Structural Safety*, Vol. 17, S. 33 - 41

# Anhänge

# A

## Dokumentation der Eingabedateien zur Simulation nach Abschnitt 4.2, 4.3

Das in Kapitel 4 entwickelte Simulationsverfahren wurde in der software `SI $\underline{a}$ ng` realisiert. `SI $\underline{a}$ ng` ist ein Programm, das Finite Elemente mit zahlreichen Funktionen zur Datenanalyse und Monte Carlo Simulation verbindet. Eine objektorientierte Datenstruktur erlaubt den Austausch von Daten zwischen den verschiedenen Programmmodulen. Die Benutzeroberfläche ist im wesentlichen ein Kommandointerpreter. So können relativ komplexe Abläufe programmiert werden, die in Form von Textdateien vorliegen. Zur Kommandosprache von `SI $\underline{a}$ ng` erfolgen hier keine Angaben, es wird auf das Handbuch [42] verwiesen. In diesem Anhang sollen die Eingabedateien für die Simulationsprozedur nach den Abschnitten 4.2, 4.3 dokumentiert werden. Auf Details zur Datenein- und Ausgabe sowie zur Strukturanalyse wird hier nicht näher eingegangen. Das Augenmerk ist auf die notwendigen Schritte zur Simulation eines Prozesses bzw. auf das *Spectral Importance Sampling* gerichtet.

Aufgrund dessen sind die nachfolgenden Ausführungen unabhängig von der jeweiligen Anwendung. Es wird auch auf die Simulation nicht-weißen Rauschens, wie in Kapitel 5, eingegangen.

### A.1 Hauptroutine

Die Prozedur beginnt, nach der Deklaration einiger globaler Variablen und Allokierung spezifischer Datenstrukturen, mit der Definition der Zufallsvariablen. Hierzu wird in eine Unteroutine verzweigt, die nur einmal an dieser Stelle aufgerufen wird.

```
control gosub,, DEFINE_VARIABLES,/
```

In der Unteroutine werden als erstes einige Steuerparameter für die Simulationsprozedur festgelegt.

```
#label DEFINE_VARIABLES
```

```
object create,,, num_run/  
object read,,, num_run 2, /
```

Zahl der Simulationsläufe.

```
object create, integer vector, num_run, num_sim/  
object read, , num_sim 100 10000, /
```

Stichprobenumfang je Simulationslauf, in einem Vektor  
der Dimension `num_run`.

```
object create, real, , omega_min /  
object read, , omega_min 0, /  
object create, real, , omega_max /  
object read, , omega_max \mul \mul 2 PI 10, /
```

Untere und obere Grenzen des von der Simulation erfaß-  
ten Frequenzbereichs.

```
object create,,, num_bands/  
object read,,, num_bands 50 , /
```

Diskretisierung des Frequenzbereichs (Zahl der Frequenz-  
bänder).

```
object create, , , num_amps /  
object read, dialog, num_amps "number of random amplitudes?"/
```

Dialogabfrage der Zahl der zufälligen Amplituden im zwei-  
ten Lauf.

```
object create, real,,, more/  
object read, dialog, more "incrementation factor?"/
```

Dialogabfrage des Faktors  $p$  in Gln. (4.2) ff.

```
object create, real, , delta_omega/  
object read,,, delta_omega \div omega_max num_bands , /
```

Frequenzschritt  $\Delta\omega$ .

Es werden Objekte vorgehalten, die im weiteren als Abkürzungen für Operationen mit  
der Zahl der Frequenzbänder dienen:

```
object create,,, two_num_bands/  
object read,,, two_num_bands \int \mul(2 num_bands), /  
object create,,, num_bands_plus/  
object read,,, num_bands_plus \int \add(1 num_bands), /
```



Die zufälligen Amplituden werden entsprechend einem weißen Rauschen mit konstanter spektraler Dichte  $g_{XX} = 1$  definiert. Mittelwerte und Standardabweichungen, s. Gl. (3.76) ff., werden für jede Variable in Vektoren `mean` bzw. `sigma` einsortiert. Die Variablen für *Importance Sampling* sind zunächst den Originalvariablen identisch. Objekt `delta_sigma` ist die Fläche unter dem Spektrum eines Frequenzbands, Gl. (3.71).

```
object create, real,, delta_sigma/
object read,, delta_sigma \sqr delta_omega,/
                Wurzel der Fläche eines Frequenzbands mit spektraler
                Dichte von Eins.
```

```
object create, real vector replace, num_amps, mean/
object initialize, , mean \sqr (\div (PI 2)) ,/
object operate, \mul, mean delta_sigma ,/
                Berechnung des Mittelwerts der Amplituden.
```

```
object create, real vector replace, num_amps, sigma/
object initialize, , sigma \sqr (\sub (2 \div (PI 2))) ,/
object operate, \mul, sigma delta_sigma ,/
                Berechnung der Standardabweichung der Amplituden.
```

```
object copy,, mean, mean_sim/
object copy,, sigma, sigma_sim/
                Kopieren der Parameter für die Simulationsvariablen.
```

In der Hauptroutine werden nun Objekte und Monitore für spätere Ausgabe der Ergebnisse vorgehalten. Es wird Rechenzeit eingespart, wenn an dieser Stelle das untersuchte Finite Elemente Modell so weit definiert wird, daß die Systemmatrizen und ein Einheitslastvektor im Speicher vorhanden sind. Später kann so für die Strukturanalyse mit einer neuen Realisation der Erregung die Struktur schneller initialisiert werden. Für die Beispiele in Kapitel 4 entfällt dieser Schritt.

Die Prozedur setzt fort mit einer Schleife über die Simulationsläufe (d.h., diese Schleife wird i.d.R. zwei Mal durchlaufen). Hier werden die Zufallsvariablen simuliert, abhängig vom gewählten Simulationsmodell. Kleine Änderungen an dieser Stelle ergeben die verschiedenen Simulationsmodelle nach Gl. (3.75), (3.82) bzw. (4.1).

```
object create,,, i_run /
    #label DO_IT_AGAIN_SAM
    object modify, add, i_run 1,/

control if, integer equal gosub, i_run 2 SELECT ,/
                Unmittelbar vor der zweiten Simulation wird in eine Unter-
                routine verzweigt, in welcher die Auswahl der zufälligen
                Amplituden nach Abschnitt 4.2 und Anpassung der
                Simulationsparameter, Abschnitt 4.3 vorgenommen werden.
                Die Routine wird auf Seite A.9 erläutert.
```

```
control gosub,, CREATE_VARIABLES,/
```

Mit den vorangegangenen Definitionen werden in dieser Unteroutine die entsprechenden Speichereinträge für die Zufallsvariablen gemacht (Kommando `ranvar create`). Die originalen Variablen und die *Importance Sampling* – Variablen für die Amplituden, und die Phasenwinkel werden jeweils in einem sog. *ranset* zusammengefaßt.

```
object initialize,, a_samples \mul \sqr 2 delta_sigma,/
object create,replace real vector,num_sim(i_run),original_weight/
object initialize,, original_weight 1,/
control if, integer equal, i_run 1 PHASE,/
```

Für die Simulationsmodelle nach Gl. (3.82) und (4.1) werden deterministische Amplituden erzeugt und im vorher allokierten Vektor `a_samples` gespeichert. Obige Zeilen können auskommentiert werden für Modell (3.75). Für Modell (3.82), das im ersten Simulationslauf verwendet wird, sind die folgenden Zeilen bis zur Marke `PHASE` zu überspringen.

```
ranset modify, original, amp_set2 ,/
ranset isampling, replace compiler,
  num_sim(i_run) amp_set1 amp_set2,
  samples original_weight /
```

*Importance Sampling* für die Amplituden. Im ersten Lauf (ohne *Importance Sampling*) sind die Originalvariablen, im *ranset amp\_set1* zusammengefaßt, und die Simulationsvariablen, in *ranset amp\_set2*, nach denen die Zufallsvektoren generiert werden, identisch. Objekt `samples` enthält die Realisationen der Zufallsvektoren  $\mathbf{a}_i$  und hat die Dimension  $\text{num\_sim} \times \text{num\_amps}$ . `original_weight` enthält die Gewichte (Verhältnisse der Original- zur Simulationsdichte, Gl. (2.13)).

In der zuvor aufgerufenen Routine `SELECT`, die auf S. A.9 beschrieben wird, werden die Frequenzen für die Einführungen der zufälligen Amplituden ausgewählt. Die simulierten Amplituden müssen demnach in das oben erzeugte Objekt `a_samples` der deterministischen Amplituden einsortiert werden. Bei Simulation nach Gl. (3.75) sind die folgenden Arrangements nicht notwendig. Deshalb reicht es aus, zwei Objektnamen gleichzusetzen und zur Simulation der Phasenwinkel zu springen. Um aber beim *Spectral Importance Sampling* – Modell mit Auswahl der Variablen zu bleiben, sind die folgenden Zeilen auskommentiert.

```
*string append, replace, 1 samples, a_samples/  
*control if, string not, x u PHASE, /
```

```
object create, replace,, i_a/  
#label AMPS  
object modify, add, i_a 1, /
```

Beginn der Schleife über die zufälligen Amplituden.

```
object extract, column replace, samples(i_a), an_amp/
```

Extrahieren der gesamten Stichprobe einer Amplitude.

```
object assemble, column, an_amp  
a_samples(\int the_greatest(i_a 1)), /
```

Einsortieren der zufällig generierten Stichprobe in das Objekt mit allen deterministischen Amplituden. Die entsprechende Spalte wird überschrieben. Der Index der Spalte ist in Objekt the\_greatest angegeben.

```
control if, integer less, i_a num_amps AMPS, /
```

Abfrage des Schleifenendes.

Hiermit liegen die Objekte für die simulierten Amplituden und Phasenwinkel vor. Es beginnt die Schleife, in welcher die Bearbeitung jeder einzelnen Realisation erfolgt. Die einzelnen Aufgaben sind auf Unterroutrinen verteilt. Die Generierung der Zeitreihe wird in Abschnitt A.2 beschrieben, die statistische Auswertung der Strukturantwort in Abschnitt A.3.

```
object create, replace,, i_sim/  
#label SIMULATE  
object modify, add, i_sim 1, /  
output print,, i_sim , /
```

Beginn der Schleife über alle Realisationen.

```
control gosub, , MAKE_TIME_SERIES, /
```

Sprung zur Unteroutine für die Generierung der Zeitreihen, s. Abschn. A.2.

```
control gosub, , CALCULATE_RESPONSE, /
```

Sprung zur Berechnung und Auswertung der Strukturantwort, s. Abschn. A.3.

```
control if, gosub integer equal, i_sim 1 INIT, /
```

Initialisierung der Ausgabeobjekte, nur für die erste Realisation im aktuellen Simulationslauf, s. Abschn. A.3.

```
control gosub, , WEIGHT, /
```

Zur Berechnung des gewichteten Mittels der Stichprobe, s. Abschn. A.3.

```
control if , integer less, i_sim num_sim(i_run) SIMULATE, /
```

Abfrage des Schleifenendes: Rücksprung zu SIMULATE, wenn Laufindex  $i\_sim$  kleiner ist als der Stichprobenumfang im aktuellen Lauf.

Die Berechnung des gewichteten Mittels und des statistischen Fehlers erfolgt in einer Unterroutine, die ebenfalls in Abschnitt A.3 beschrieben wird.

```
control gosub,, FINAL_RESULTS ,/
```

Weitere Auswertungen, s. Abschn. A.3.

Mit der Ausgabe der Ergebnisse, als Grafiken oder als Textdateien, schließt die Hauptroutine ab.

## A.2 Generierung der Zeitreihen

Hinweise zur Generierung der Zeitreihen aus den Amplituden und Phasenwinkeln werden auf Seite 60 gegeben. Der Ablauf der Routine ist wie folgt:

```
object extract,row replace,phi_samples(i_sim),one_phi_sample/
```

Extrahieren einer Realisation der zufälligen Phasenwinkel. Ergebnis ist ein Vektor der Dimension  $num\_bands$ .

```
object initialize,, phase 0,/
```

Nullsetzen eines vorher erzeugten Objekts  $phase$ . Die Dimension ist  $num\_bands + 1$ , da in die Fourier-Transformation die Frequenz  $\omega = 0$  eingeht.

```
object assemble, part, one_phi_sample phase(2),/
```

Einsetzen der Phasenwinkel in das Objekt  $phase$  ab der 2. Reihe.

```
object extract, row replace, a_samples(i_sim), one_sample/
```

```
object combine, replace \mul, kt_filter one_sample, kt_sample/
```

```
object initialize,, amplitude 0,/
```

```
object assemble, part, kt_sample amplitude(2),/
```

Entsprechendes Vorgehen für die Amplituden. Zusätzlich Multiplikation mit einer Filterfunktion für nicht-weißes Rauschen, deren Werte zu diskreten Frequenzen im Objekt  $kt\_filter$  enthalten sind.

```
object copy, replace, phase, cos/  
object operate, \cos, cos, /  
object copy, replace, phase, sin/  
object operate, \sin, sin, /  
object combine, replace \mul, amplitude cos, real/  
object combine, replace \mul, amplitude sin, imag/
```

Erzeugung der Vektoren  $\{a_k \cos \psi_k\}$  und  $\{a_k \sin \psi_k\}$ .

```
timeseries fourinv,replace,real imag delta_omega,reihe delta_t/  
object operate, \mul, reihe \div (\sqr (two_num_bands) 2) ,/
```

Inverse Fourier-Transformation und Skalierung der Zeitreihe, s. Gl. (3.93).

Die Zeitreihe wird durch mehrfaches Aneinanderhängen verlängert, wenn man den stationären Zustand der Strukturantwort erreichen will. Man darf dann aber nicht die gesamte Zeitreihe der Antwort statistisch auswerten, vgl. S. 91.

```
object copy, replace, reihe, zeitreihe /  
control if, integer equal, num_rep 1 NO_REP,/  
  object create, replace, , count_rep/  
  object initialize,, count_rep 1,/  
  #label ONE_MORE_REP  
    object modify, add, count_rep 1,/  
    object append, add_rows, zeitreihe reihe ,/  
    control if, integer less, count_rep num_rep ONE_MORE_REP,/  
  #label NO_REP
```

### A.3 Auswertung der Strukturantwort

Die Berechnung der Strukturantwort wird selbst nicht erläutert. An dieser Stelle kann die Berechnung eines Finite Elemente Modells ebenso stehen wie direkt programmierte Lösungen für spezielle Problemstellungen. Das Ergebnis sei eine Zeitreihe, abgespeichert in einem Datenobjekt mit Namen `antwort`. Für bessere Übersichtlichkeit wird hier nur die Berechnung der Erstüberschreitenswahrscheinlichkeit demonstriert, andere Auswertungen ergeben sich analog. In der Unterroutine mit der Marke `CALCULATE_RESPONSE` werden folgende Schritte ausgeführt:

```
timeseries exceedance, replace, antwort 0 threshold 100, probx/  
Auszählen der Zahl der Niveauüberschreitungen, bezogen  
auf die Gesamtzahl der Zeitschritte, für Niveaus von 0 bis  
threshold mit 100 Unterteilungen.
```

```
object extract, replace column, probx 2, help /  
object operate, \gtn , help 0,/  
object copy, replace, probx, probf /  
object assemble, column, help probf 2, /
```

Liegt eine Niveauüberschreitung vor, enthält die zweite Spalte von `probx` einen Wert größer Null. Mit der logischen Operation `\gtn`, die die Werte 0 oder 1 zurückgibt, wird die Indikatorfunktion, Gl. (3.102), erzeugt und im Objekt `probf` den jeweiligen Niveaus zugeordnet abgespeichert.

Für die erste Realisation müssen die Ausgabeobjekte initialisiert werden, das geschieht in der Routine `INIT`. Für die statistischen Auswertungen sind nur die Ordinaten in der zweiten Spalte von `probf` interessant.

```
object extract, replace column, probf(2), old_pf/  
object initialize,, old_pf 0,/  
object copy, replace, old_pf, old_pf_var /
```

Erzeugen der Objekte `old_pf` und `old_pf_var` und initialisieren mit Null.

In der Unteroutine `WEIGHT` werden die gewichteten Mittel aus allen Realisationen und die Varianzen ermittelt.

```
object extract, replace column, probf(2), help/
```

Extrahieren der zweiten Spalte von `probf` auf ein Hilfsobjekt.

```
object operate, \mul, help original_weight(i_sim), /
```

Multiplikation mit dem *Importance Sampling* – Gewicht  $f/h$  der aktuellen Realisation.

```
object combine, replace \add, old_pf help, new_pf/
```

Addition zum alten Wert.

```
object copy, replace, new_pf, old_pf/
```

Umspeichern, so daß `old_pf` den aktuellen Wert enthält.

```
object operate, \pow, help 2, /
```

```
object combine, replace \add, old_pf_var help, new_pf_var/
```

```
object copy, replace, new_pf_var, old_pf_var/
```

Summation und Speichern des Quadrats der Werte.

Die Berechnung der Mittelwerte und Standardfehler, Gln. (2.8) und (2.7), wird in der Routine `FINAL_RESULTS` vervollständigt.

```
object operate, \div, old_pf num_sim(i_run),/  
object assemble, column, old_pf probf(2),/
```

Teilen der gewichteten Summe durch den Stichprobenumfang ergibt das gewichtete arithmetische Mittel bzw. den Schätzer der Versagenswahrscheinlichkeit.

```
object copy, replace, probf, probf_err/  
object operate, \div, old_pf_var num_sim(i_run),/  
object operate, \pow, old_pf 2,/  
object combine, replace \sub, old_pf_var old_pf, new_pf_var/  
object operate, \div, new_pf_var num_sim(i_run), /  
object operate, \sqr, new_pf_var, /  
object assemble, column, new_pf_var probf_err(2),/
```

Berechnung des Standardfehlers und Speicherung.

## A.4 Auswahl und Adaption der Variablen

Der Kern des *Spectral Importance Sampling*, die Auswahl der Frequenzen zur Einführung zufälliger Amplituden und die Adaption ihrer statistischen Parameter, ist die Routine mit der Marke `SELECT`. Zeigt das Leistungsspektrum der Strukturantwort nur eine dominante Frequenz, genügt eine Sortierung seiner Werte nach der Größe. Für die `num_amps` zugeordneten Frequenzen werden die Zufallsvariablen eingeführt.

```
object create, real vector replace, num_bands, the_greatest/  
object initialize, linear_column, the_greatest 1 num_bands,/
```

Erzeugung eines Vektors mit Indices für die Frequenzbänder, Initialisierung mit Werten von 1 bis `num_bands`.

```
object extract, part replace, perry 2 1 num_bands 2 , yummi/  
object append, add_columns, the_greatest yummi,/
```

Extrahieren des Teils für Frequenzen größer Null aus dem Leistungsspektrum und Anhängen an Objekt `the_greatest`, das nun die Indices der Frequenzbänder, die zugeordneten Frequenzen und die Werte der spektralen Dichte enthält.

```
object sort, column descending, the_greatest 3 ,/  
object create, replace integer vector, num_amps, the_bands/
```

Sortierung nach den Ordinaten des Leistungsspektrums.

```
object extract, replace maximum, mean_sim, max_mean bummy /
object operate, \mul, max_mean more ,/
object extract, replace maximum, sigma_sim, max_sigma bummy /
object operate, \mul, max_sigma more ,/
```

Ermittlung des Maximums der Mittelwerte bzw. Standardabweichungen der Simulationsvariablen, Multiplikation mit dem Faktor  $p$  der Gln. (4.2) ff.

Die Adaption der Mittelwerte und Standardabweichungen der Simulationsvariablen entsprechend den Gln. (4.2) ff. wird in einer Schleife durchgeführt:

```
object create, replace,, k/
#label UPDATE
  object modify, add, k 1,/
  object modify, set, mean_sim(k)
    \add mean(k)
    \mul max_mean \div the_greatest(k 3) the_greatest(1 3) ,/
  object modify, set, sigma_sim(k)
    \add sigma(k)
    \mul max_sigma \div the_greatest(k 3) the_greatest(1 3) ,/
  control if, integer less, k num_amps UPDATE,/
```

Damit werden, nach dem Rücksprung in die Hauptroutine, die Zufallsvariablen neu definiert, s.S. A.3.

Bei mehreren dominanten Frequenzen ist ein anderer Auswahlalgorithmus notwendig, um alle Spitzen erfassen zu können. Denkbar ist auch eine manuelle Auswahl durch den Benutzer in einer Dialogabfrage.



## B

# Dokumentation des Directional Sampling nach Abschnitt 4.6

Der prinzipielle Ablauf des Directional Sampling Verfahrens ist in Abschnitt 4.6 beschrieben, hier folgen Angaben zur programmtechnischen Umsetzung in `SIlang`. Die Abläufe sind dem Spectral Importance Sampling, s. Anh. A, sehr ähnlich, deshalb werden hier nur die Unterschiede herausgearbeitet.

Die Darstellung des Erregungsprozesses für die Simulation entspricht Gl. (3.74). Mit  $n$ , der Zahl der Frequenzbänder, beinhaltet das Modell  $2n$  Zufallsvariablen. Eine Auswahl der Variablen wird beim *Directional Sampling* nicht getroffen. Da die Berechnungen im Raum standardnormal verteilter Variablen durchgeführt werden, werden für die Prozedur drei *ransets* mit jeweils  $2n$  Zufallsvariablen benötigt: Eins mit standardnormal verteilten Variablen und eins für das *Importance Sampling* der Richtungsvektoren, das dritte mit den Originalvariablen, die sich aus dem vorgegebenen Leistungsspektrum der Erregung ergeben. Letzteres wird benötigt, um die Richtungsvektoren vor der Strukturanalyse in den Raum der physikalisch sinnvollen Basisvariablen zu transformieren. Die Routine, in welcher die Parameter des Erregungsprozesses definiert werden (Sprungmarke `DEFINE_VARIABLES`, unterscheidet sich nicht von der entsprechende Routine in Abschnitt A.1. Die Speichereinträge zur Definition und Gruppierung der Zufallsvariablen besteht aus Standardkommandos. Beide Routinen werden deshalb hier nicht näher erläutert.

## B.1 Hauptroutine

Die wesentlichen Schritte der Prozedur beginnen mit der Schleife über die verschiedenen Simulationsläufe. Da hier nur ein Simulationsmodell in Frage kommt, sind die verschiedenen Verzweigungen, wie auf S. A.3, nicht notwendig.

```
object create,,, i_run /  
  #label DO_IT_AGAIN_SAM  
  object modify, add, i_run 1,/  
  output print,, i_run ,/
```

Beginn der Schleife über die Simulationsläufe.

```
control if, integer equal gosub, i_run 2 ADAPT ,/
```

Sprung zur Unteroutine für Adaption der Variablen vor dem zweiten Lauf.

```
control gosub,, CREATE_VARIABLES,/
```

Unteroutine für die Speichereinträge zur Definition der Zufallsvariablen.

```
ranset isampling, compiler replace, num_sim(i_run)  
  amp_set01 amp_set2, vectors original_weight/
```

*Importance Sampling* der Zufallsvektoren. `amp_set01` ist ein *ranset* mit standardnormal verteilten Variablen, `amp_set2` enthält die adaptierten Variablen zur Simulation der Richtungsvektoren.

Anschließend beginnt die Schleife, in welcher alle Realisationen abgearbeitet werden. Dazu wird jeder simulierte Zufallsvektor zunächst auf einheitliche Länge skaliert und dann in einer weiteren Schleife in bestimmten Schrittweite inkrementiert, bis eine Überschreitung für eine vorgegebene maximale Schranke festgestellt wurde. Die Strukturanalyse wird für jedes Inkrement durchgeführt.

```
object create, replace,, i_sim/  
#label SIMULATE  
  object modify, add, i_sim 1, /
```

Beginn der Schleife über die Realisationen.

```
object extract, row replace, vectors i_sim, start_vector/
```

Extrahieren einer Realisation aus der Stichprobe von Zufallsvektoren.

```
linalg norm, replace, start_vector, start_norm /  
object operate, \div, start_vector start_norm,/
```

Normierung auf Einheitslänge.

```
object operate, \mul, start_vector scale,/
```

Zusätzliche Skalierung zur Steuerung der Schrittweite der Inkrementierung.

```
object create, replace,, i_inc/  
#label INCREMENT  
    object modify, add, i_inc 1,/  
        Beginn der Inkrementierungsschleife.  
  
linalg lincomb, replace, 1 start_vector i_inc, the_vector /  
        Inkrementierung: Aktueller Vektor ist start_vector ska-  
        liert mit i_inc.  
  
linalg norm, replace, the_vector, the_norm/  
        Ermittlung der Norm des aktuellen Vektors.  
  
control gosub, , MAKE_TIME_SERIES, /  
        Sprung zur Generierung der Zeitreihe.  
  
control gosub, , CALCULATE_RESPONSE, /  
        Sprung zur Unterroutine für Berechnung und Auswertung  
        der Strukturantwort.  
  
control if, real not, indy(num_step) 1 INCREMENT,/  
        Abfrage des Endes der Inkrementierungsschleife.  
        indy(num_step) enthält die Indikatorfunktion für die  
        Überschreitung der größten betrachteten Schranke.  
  
control if, gosub integer equal, i_sim 1 INIT, /  
        Initialisierung der Ausgabeobjekte, nur für die erste Rea-  
        lisation im aktuellen Simulationslauf.  
  
control gosub, , WEIGHT, /  
        Zur Berechnung des gewichteten Mittels der Stichprobe.  
  
control if , integer less, i_sim num_sim(i_run) SIMULATE, /  
        Abfrage des Schleifenendes: Rücksprung zu SIMULATE,  
        wenn Laufindex i_sim kleiner ist als der Stichprobenum-  
        fang im aktuellen Lauf.
```

Damit ist die Hauptroutine beendet. Die Unterroutinen zur Berechnung des Mittels der Stichprobe für die verschiedenen Auswertungen entsprechen den Abschnitten A.2 und A.3. Bei der Generierung der Zeitreihen, der Auswertung der Strukturantwort (Unterroutine `CALCULATE_RESPONSE`) und der Adaption der Variablen gibt es für das *Directional Sampling* spezifische Unterschiede zur konventionellen Simulation, die im folgenden beschrieben werden.

## B.2 Generierung der Zeitreihen

Die Generierung der Zeitreihen ist beim Directional Sampling geringfügig anders als in Abschnitt A.2, weil hier keine Phasenwinkel, sondern nur Amplituden simuliert werden. Die im Raum standardnormal verteilter Variablen gültigen Zufallsvektoren sind zunächst in den Raum der originalen Basisvariablen zu transformieren, die sich aus dem vorgegebenen Leistungsspektrum der Erregung ergeben.

```
#label MAKE_TIME_SERIES
```

```
ranset transform, to_original replace,  
      the_vector amp_set1, org_vector /
```

Transformation des Zufallsvektors in den „Originalraum“.

```
object modify, set, As(1) 0 ,/  
object modify, set, Bs(1) 0 ,/  
object extract, part replace, org_vector 1 num_bands, dumbo /  
object assemble, part, dumbo As 2,/  
object extract, part replace,  
      org_vector num_bands_plus num_bands, dumbo /  
object assemble, part, dumbo Bs 2, /
```

Erzeugung von Vektoren der Amplituden  $\{a_k\}$  und  $\{b_k\}$  entspr. Gl. (3.74).

```
timeseries fourinv, replace, As Bs delta_omega, reihe delta_t/  
object operate, \mul, reihe \div (\sqr (two_num_bands) 2) , /
```

Erzeugung der Zeitreihe durch inverse FFT und Skalierung.

## B.3 Auswertung der Strukturantwort

Wie bereits erwähnt, wird die Strukturanalyse für jedes Inkrement durchgeführt. Bei der Berechnung der Erstüberschreitenswahrscheinlichkeiten ist darauf zu achten, daß die Indikatorfunktion nicht mehrmals gesetzt wird und dadurch Werte größer Eins annimmt, wenn ein bestimmtes Niveau einmal überschritten wurde. Dies wird durch eine Art „inverse Indikatorfunktion“ realisiert, die, im Gegensatz zur Funktion  $I$  in Gl. (3.102), den Wert 0 im Versagensfall, sonst den Wert 1 annimmt. Die Indikatorfunktion wird mit der bedingten Versagenswahrscheinlichkeit für die gegebene Richtung und aktuelle Laststufe multipliziert. Auswertungen wie Verteilungsfunktion, Periodogramm und statistische Momente sind mit der Dichtefunktion des Radius zu skalieren. Wie auf S. 105 erläutert, wird für dafür der Radius in der Mitte jedes Inkrements verwendet.

```
#label CALCULATE_RESPONSE
```

```
linalg transpose, replace, the_vector, vector_t /  
object operate, \mul , vector_t \sub 1 \div \div 1 2 i_inc ,/
```

Ermittlung des Vektors mit Radius  $(r_i - r_{i-1})/2$ .

```
regress failure, directional replace,  
vector_t amp_set2, pcond err weight/
```

Berechnung der bedingten Versagenswahrscheinlichkeit.

Im weiteren werden nur die Ermittlung der Verteilung und der Erstüberschreitenswahrscheinlichkeiten über verschiedene Niveaus gezeigt.

```
timeseries exceedance, replace, teilwort 0 0.05 num_step, probx/
```

Auszählen der Zahl der Niveauüberschreitungen, führt auf den Schätzer der Verteilungsfunktion.

```
object extract, replace column, probx 2, indy /  
object operate, \gt , indy 0,/
```

Ermittlung der Indikatorfunktion.

```
object copy, replace, indy, help1/  
object operate, \mul, help1 pcond,/
```

Umspeichern der Indikatoren auf ein Hilfsobjekt, Multiplikation mit der bedingten Versagenswahrscheinlichkeit.

```
object extract, column replace, probx 2, helpx1/  
control gosub,, WEIGHTEX,/
```

```
object operate, \max, rdens 1e-30 ,/  
object operate, \mul, helpx1 rdens ,/  
object operate, \mul, helpx1 scale ,/
```

Multiplikation der geschätzten Verteilung mit der Dichtefunktion des Radius (Routine `WEIGHTEX`, s.u.) und dem Skalierungsfaktor `scale` (s. Abschn. B.1).

```
object copy, replace, indy, help_inv1/  
object operate, \lt , help_inv1 1,/
```

Ermittlung der „inversen Indikatorfunktion“ (s.o.).

```
control if, integer equal, i_inc 1 NEITHER,/  
  object combine, replace \mul, helpi1 ind_inv, helpi3/  
  object combine, replace \add, helpi3 helpi2, helpi1/  
  object copy, replace, helpx1, helpx3/  
  object combine, replace \add, helpx3 helpx2, helpx1/  
  object copy, replace, help_inv2, help_inv1/  
#label NEITHER
```

Multiplikation der Indikatoren mit der „inversen Indikatorfunktion“ aus dem vorigen Inkrement, Umspeicherung der Objekte für die Summation über die Inkremente. Dieser Schritt wird nicht im ersten Inkrement ausgeführt.

```
object copy, replace, helpi1, helpi2/  
object copy, replace, helpx1, helpx2/  
object copy, replace, help_inv1, ind_inv/
```

Umspeicherung der Objekte für die Summation über die Inkremente.

```
object assemble, column, helpx2 probx 2,/  
object copy, replace, probx, probf /  
object assemble, column, helpi2 probf 2, /
```

Umspeicherung der Objekte der Verteilung und Erstüberschreitenswahrscheinlichkeit, für spätere Summation über die Stichprobe.

Die Dichtefunktion des aktuellen Radius wird in einer eigenen Unteroutine berechnet. Für sehr große Radien (Objekt `the_norm`), die wiederum mit extrem kleiner Wahrscheinlichkeit auftreten, ist die Berechnung aufgrund des Wertebereichs des Rechners unmöglich, es wird dann aus der Routine heraus gesprungen.

```
#label WEIGHTEX  
object create, replace real,, rdens/  
control if, real greater, the_norm 38 CANNOT ,/  
object read,, rdens  
  \mul  
  \exp (\div \pow the_norm 2 -2)  
  \div (  
    \mul (  
      \pow (2 \sub 1 num_bands)  
      \pow (the_norm \sub two_num_bands 1)  
    )  
    \gam (num_bands)  
  )  
  , /
```

## B.4 Adaption der Variablen

Aufgrund des anderen Simulationsmodells beim Directional Sampling bezieht sich die Adaption der Variablen nur auf deren Standardabweichungen. Die Standardabweichungen der Amplituden  $\{a_k\}$  und  $\{b_k\}$  in Gl. (3.74) werden um das gleiche Maß erhöht. Es findet auch keine Auswahl der Frequenzen statt. Ansonsten ist die Routine ähnlich Abschnitt A.4.

```
#label ADAPT
```

```
object extract, replace column, perry(2), jummy/  
object extract, maximum replace, jummy, max_spec bummy/
```

Ermittlung der maximalen Ordinate des Leistungsspektrums der Strukturantwort.

Die Anpassung der Standardabweichungen wird wiederum für jede diskrete Frequenz in einer Schleife durchgeführt.

```
object create, replace,, k/  
#label UPDATE
```

```
object modify, add, k 1,  
object modify, set, sigma_sim(k)  
\add sigma_sim(k)  
\mul more \div perry(\int \add (1 k) 2) max_spec ,/
```

Anpassung der Standardabweichungen der Amplituden  $\{a_k\}$ .

```
object modify, set, sigma_sim(\int \add num_bands k)  
\add sigma_sim(\int \add num_bands k)  
\mul more \div perry(\int \add (1 k) 2) max_spec ,/
```

Anpassung der Standardabweichungen der Amplituden  $\{b_k\}$ .

```
control if, integer less, k num_bands UPDATE,/
```

Abfrage des Schleifenendes.

---

# C

## Das Element UHYDE2

Für die Berechnungen in Kapitel 5 wurde zur Modellierung der *Hysteretic Devices* (Abschnitt 5.2) das Finite Element UHYDE2 in *SIang* implementiert, das hier dokumentiert werden soll. Das Element UHYDE2 besitzt zwei Freiheitsgrade. Im Finite Elemente Modell wird das Element durch drei Knoten festgelegt. Durch die ersten beiden Knoten werden die zugeordneten Freiheitsgrade in der Systemsteifigkeitsmatrix festgelegt; deren Relativverschiebung aktiviert die nichtlineare Rückstellkraft. Die Achsen des lokalen kartesischen Koordinatensystems werden mit  $x_\ell$ ,  $y_\ell$  und  $z_\ell$  bezeichnet.  $x_\ell$  ist die Achse durch die ersten beiden Knoten. Alle drei Knoten spannen eine Ebene auf, zu welcher die Achse  $y_\ell$  normal ist. Damit ist die Lage des Elements im Raum eindeutig festgelegt. Die Rückstellkraft ist formuliert als

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \alpha k \mathbf{x}(t) + (1 - \alpha) k \mathbf{q}(t) \quad (\text{C.1})$$

mit den Vektoren

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

die in der Gleitfläche liegen, die parallel zur lokalen  $y_\ell$ - $z_\ell$ -Ebene ist. Es wird angenommen, daß sich das nichtlineare Verhalten des Elementes nur in radialer Richtung ausbildet, die Kraft- und Verschiebungskomponenten in tangentialer Richtung hängen linear zusammen. Das Materialgesetz für die radialen Komponenten entspricht dem dritten Testbeispiel, vgl. S. 90. Hier ist

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_r \\ q_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_r(t) \cdot h(q_r, \dot{x}_r) \\ \dot{x}_t \end{bmatrix} \quad (\text{C.2})$$



mit

$$h(q_r, \dot{x}_r) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } q_r < q_y \text{ oder } \dot{x}_r q_r \leq 0 \\ \frac{q_r - q_p}{q_y - q_p} & \text{wenn } q_r \geq q_y \text{ und } \dot{x}_r q_r > 0 \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

und es gelten die Beziehungen

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_r \\ \dot{x}_t \end{bmatrix} = \frac{1}{\|\mathbf{q}\|} \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \\ -q_2 & q_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{C.4})$$

beziehungsweise

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_r \\ \dot{q}_t \end{bmatrix} = \frac{1}{\|\mathbf{q}\|} \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \\ -q_2 & q_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{C.5})$$

Die Hysterese, siehe auch S. C.5, besitzt zwei lineare Bereiche, mit den Steifigkeiten  $k$  bzw.  $\alpha k$ . Dadurch ist es möglich, zusätzlich zum Reibungsgerät z.B. parallel angeordnete elastische Federn zu berücksichtigen. Die Parameter  $q_y$  und  $q_p$  bestimmen den Übergang zwischen dem linear-elastischen Zustand und dem Gleiten.

In der programmtechnischen Umsetzung wird die nichtlineare Rückstellkraft  $\mathbf{f}$  infolge eines vorgegebenen Verschiebungszustands  $\mathbf{x}_n$  und des abgespeicherten vorherigen Zustands  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{q}$  berechnet. Dazu wird zunächst die Differenz aus altem und neuem Verschiebungszustand in 20 Inkremente unterteilt. Für jedes Verschiebungsinkrement werden  $q_1$ ,  $q_2$  und  $q_r$  mit dem Runge – Kutta – Verfahren (Bronstein [10]) berechnet. Für diese Berechnungen werden die Ableitungen der Komponenten von  $\mathbf{q}$  nach den Komponenten  $x_1$  und  $x_2$  von einer Unteroutine bereitgestellt. Hierin werden erst die Komponenten  $x_1$  und  $x_2$  nach Gl. (C.4) in die Komponenten  $x_r$  und  $x_t$  transformiert, damit wird die Funktion  $h$  nach Gl. (C.3) ausgewertet. Daraus ergeben sich die Ableitungen zu

$$\frac{\partial q_1}{\partial x_1} = h \frac{q_1^2}{\|\mathbf{q}\|^2} + \frac{q_2^2}{\|\mathbf{q}\|^2} \quad (\text{C.6})$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial x_2} = \frac{\partial q_2}{\partial x_1} = (h - 1) \frac{q_1 q_2}{\|\mathbf{q}\|^2} \quad (\text{C.7})$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial x_2} = h \frac{q_2^2}{\|\mathbf{q}\|^2} + \frac{q_1^2}{\|\mathbf{q}\|^2} \quad (\text{C.8})$$

$$\frac{\partial q_r}{\partial x_1} = h \frac{q_1}{\|\mathbf{q}\|} \quad (\text{C.9})$$

$$\frac{\partial q_r}{\partial x_2} = h \frac{q_2}{\|\mathbf{q}\|} \quad (\text{C.10})$$

Nach der Schleife über alle Verschiebungsinkremente wird mit den aktuellen Werten

für  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{q}$  die Rückstellkraft nach Gl. (C.1) ausgerechnet.

Die Wirkungsweise des Elements soll mit einem kleinen Beispiel veranschaulicht werden. Das Finite Elemente Modell besitzt zwei Knoten, die senkrecht übereinander angeordnet sind. Einer der Knoten ist fest eingespannt, der andere in der horizontalen Ebene verschieblich. Zwischen beiden Knoten ist ein UHYDE2 – Element angeordnet. Am verschieblichen Knoten befindet sich ein Massenpunkt – Element. Die dimensionslosen Parameter sind

$$\begin{aligned}m &= 1 \cdot 10^6 \\k &= 3 \cdot 10^7 \\q_y &= 0,07 \\q_p &= 0,1 \\\alpha &= 0\end{aligned}$$

Es wurde eine Verschiebung als Sinusfunktion über 1,5 Perioden aufgegeben. Die Amplitude beträgt 1. Die gesamte Zeitreihe wurde zur Berechnung in 5000 Schritte unterteilt. Die Bilder auf den folgenden Seiten zeigen die Berechnungsergebnisse. Man erkennt die Beschränkung der Rückstellkraft auf den Wert  $kq_p = 3,0 \cdot 10^6$  und die Ausrundung der Hysterese. Durch ähnliche Beispiele mit anderen Parametern, insbesondere mit größerer Schrittweite und verschiedenen Amplituden, wurde die Leistungsfähigkeit des Elements getestet. Auch das dritte Testbeispiel in Kapitel 4, S. 90, wurde mit Hilfe des UHYDE2 – Elements nachgerechnet, mit den gleichen Auswertungen der Wahrscheinlichkeiten.

Seite C.5 ist ein Vorschlag für das Elemente – Dokumentationsblatt des SIang – Handbuchs.

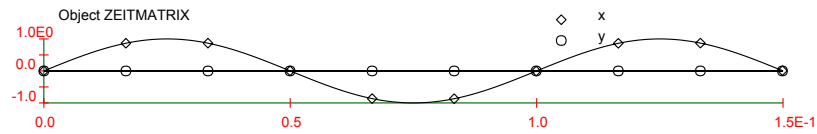


Bild C.1: Vorgegebene Verschiebungen.

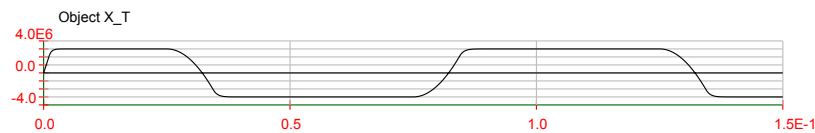


Bild C.2: Rückstellkräfte im UHYDE2 – Element.

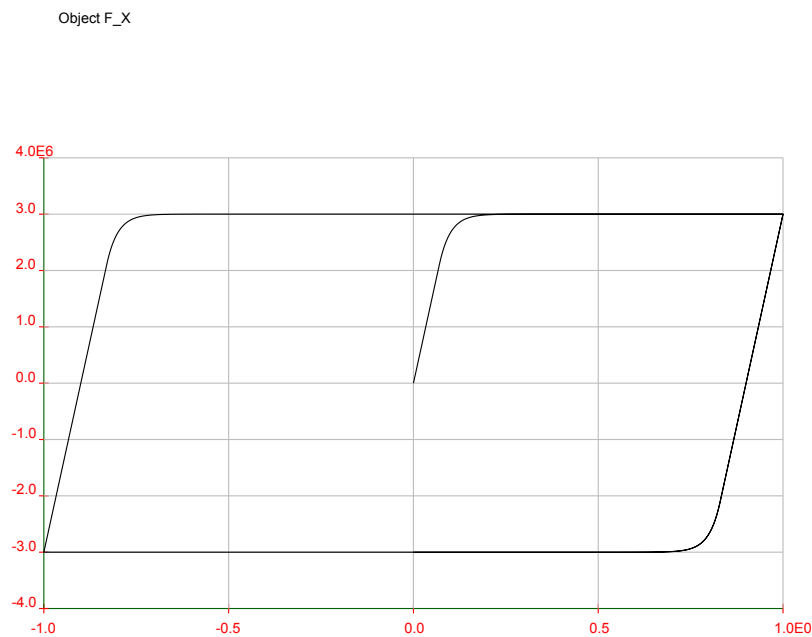


Bild C.3: Hysterese (Kraft über Verschiebung) im UHYDE2 – Element.

### Element UHYDE2

*Geometrisch lineares 2-Knoten Verbindungselement,  
hysteretische Rückstellkraft in der Ebene normal zur lokalen x-Achse,  
2 Verschiebungs – Freiheitsgrade pro Knoten,  
keine Formfunktionen, keine Integrationspunkte.*

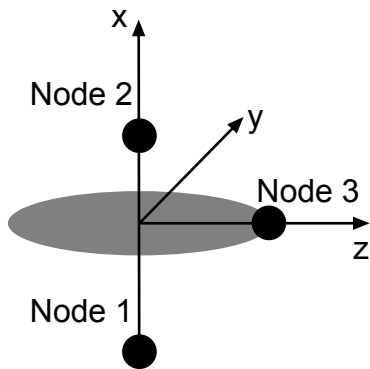
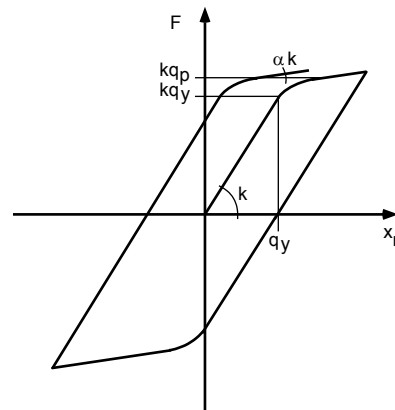


Bild C.4: Das Element UHYDE2.

Bild C.5: Hysterese in radialer Richtung der  $yz$ -Ebene.

#### *Lokales Koordinatensystem*

Die lokale  $x$ -Achse ist definiert durch die Knoten 1 und 2. Knoten 1, 2 und 3 spannen eine Ebene auf, zu welcher die lokale  $y$ -Achse normal ist.

#### *Gesetz der Rückstellkraft*

Die Rückstellkraft wirkt in der lokalen  $yz$ -Ebene. Sie ist linear-elastisch in tangentialer Richtung und hysteretisch in radialer Richtung. Parameter:

- $k$  Anfangssteifigkeit,
- $q_y$  Verschiebung am Ende des linear-elastischen Bereichs,
- $q_p$  Verschiebung zu Beginn des Gleitens,
- $\alpha$  Verhältnis Anfangs- zu Reststeifigkeit.

## **Dipl.-Ing. Veit Martin Bayer**

### **Lebenslauf**

Geburtsdatum: 10. November 1965  
Geburtsort: Braunschweig  
Staatsangehörigkeit: Deutsch  
Eltern: Dr. rer. nat. Georg Bayer, Direktor des Rechenzentrums der TU Braunschweig a.D., Wilma Bayer, Oberstudienrätin a. D.

Schule: Abitur am allgemeinbildenden Gymnasium im Juni 1984.

Studium: vom Wintersemester 1984/85 bis Sommersemester 1991  
Studium des Bauingenieurwesens an der Technischen Universität Braunschweig.

Vertiefungsrichtungen: Statik, Massivbau, Hochbaukonstruktion und Holzbau.

Abschluß im Juli 1991 mit Diplom (Dipl.-Ing. TU).

Beruflicher Werdegang:

Juli 1991 — Juni 1995 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik der Universität Innsbruck, Österreich, Leiter: Prof. Schuëller.

Juli 1995 — März 1999 Tätigkeit zunächst als freier Promovent, zeitweise als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Strukturmechanik, Bauhaus - Universität Weimar, Leiter: Prof. Bucher.

Seit April 1999 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachgebiet Stahl-, Stahlverbund- und Holzbau, Universität Rostock, Leiter: Prof. Dorka.

### **Eidesstattliche Erklärung**

Ich erkläre hiermit in Kenntnis der strafbaren Folgen einer eidesstattlichen Falschaussage an Eides statt, daß ich die vorliegende Arbeit ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Die aus anderen Quellen direkt oder indirekt übernommenen Daten, Methoden und Konzepte sind unter Angabe der Quellen gekennzeichnet.

Wismar, d. 17.11.1999

Veit Bayer

### **Urheberrechtsvermerk**

Alle Rechte an der vorliegenden Arbeit liegen allein beim Autor. Verwendung ihres Inhalts, Weitergabe oder Vervielfältigung der Arbeit oder von Teilen davon sind nur für Zwecke der Lehre und Forschung unter Angabe des Autors und dieses Urheberrechtsvermerks erlaubt. Jegliche andere Verwendung bedarf der ausdrücklichen Zustimmung des Autors.

©Veit Bayer März 1999