

**Ausbreitungsmechanismen von Suspensionen zur
Restaurierung stehender Gewässer am Beispiel des
Schmalen Luzin**

Dissertation

zur

Erlangung des akademischen Grades

Doktor-Ingenieur

(Dr.-Ing.)

an der Fakultät Bauingenieurwesen
der Bauhaus-Universität Weimar

vorgelegt von

Dipl.-Ing. Konrad Thürmer

aus Görlitz

Weimar, September 1999

Ein System ist ein Gebilde aus Elementen, die miteinander in Wechselwirkung stehen. Die Wechselwirkung hat die Konsequenz, daß das System Eigenschaften zeigt, die an isolierten Elementen nicht erkannt werden können. Diese Systemeigenschaften sind der Ausdruck organisierter Komplexität. Man sieht unmittelbar ein, daß ein noch so genaues Studium der einzelnen Elemente in vitro eine Erkenntnis der Systemeigenschaften nicht erlaubt. Eine rigiorose Analytik, welche die organisierte Komplexität zerstört, führt zum Verlust genau jener Eigenschaften, die es zu erkennen gilt.

Hans Mohr

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1: Einführung	1
1.1 Veranlassung	1
1.2 Ziel der Arbeit	2
1.3 Methode	3
 Kapitel 2: Grundlagen zur Beschreibung axialsymmetrischer Strömungen	 4
2.1 Kontinuumshypothese und Turbulenz	4
2.2 Mathematische Beschreibung fluider Strömungen	7
2.3 Mathematische Beschreibung axialsymmetrischer Strömungen	11
2.4 Impuls- und Energiegleichungen für die axialsymmetrische Strömung	13
2.5 Empirische Ansätze zur Lösung der partiellen Differentialgleichungen	15
2.6 Zusammenfassung	17
 Kapitel 3: Basisgleichungen für axialsymmetrische, turbulente Freistrahlen	 19
3.1 Einleitung	19
3.2 Freistrahlen in einem unbegrenzten homogenen Umgebungsfluid gleicher Stoffeigenschaften	21
3.2.1 Grundlagen	21
3.2.2 Theorie nach Schlichting	22
3.2.3 Theorie nach Reichardt	26
3.2.4 Weiter Formen zur Charakterisierung von axialsymmetrischen Freistrahlen	27
3.2.5 Konzentrationsverteilung eines Tracers in Freistrahlen	28
3.2.6 Die Ausbreitungsgeometrie axialsymmetrischer turbulenter Strahlen	31
3.3 Freistrahlen in einem unbegrenzten, stratifizierten Umgebungsfluid	32
3.4 Schichtenströmung in einem stratifizierten Umgebungsfluid	38
3.5 Zusammenfassung	39
 Kapitel 4: Interpretation der Freistrahlen als einer Folge von Wirbelringen	 41
4.1 Einleitung	41
4.2 Grundlegende Gleichungen zur Beschreibung von Wirbelringen	42
4.3 Nachweis der Ähnlichkeit von Impuls, Entrainment und Geschwindigkeit	44
4.4 Frequenzeigenschaften und Dichteverteilung bei Wirbelringen	47
4.5 Zusammenfassung	49

Kapitel 5: Dichte natürlicher Wässer	50
5.1 Eigenschaften von Wasser	50
5.2 Dichte von Wasser in natürlichen Gewässern	51
5.3 Auswertung und Zusammenfassung	57
Kapitel 6: Großversuch Schmalen Luzin	62
6.1 Restaurierung eutrophierter Hartwasserseen	62
6.1.1 Einleitung	62
6.1.2 Das öko-technologische Verfahren "Künstlich induzierte Kalzitfällung"	63
6.2 Charakteristika des Schmalen Luzin	64
6.3 Die Pilotanlage im Schmalen Luzin	68
6.5 Angaben für die hydraulische Beurteilung	72
Kapitel 7: Auswertung und Zusammenfassung	75
7.1 Die Konzentrationsverteilung von suspendierten Stoffen in fluiden Strahlen	75
7.2 Ausbreitung der fluiden Strömung in Abhängigkeit der Dichteverhältnisse	77
Kapitel 8: Literaturverzeichnis	80

Anhang

Abbildungsverzeichnis

	Seite	
2-1	Turbulente Schwankung der Geschwindigkeit	10
2-2	Bezeichner im zylindrischen Koordinatensystem	12
2-3	Schematische Darstellung zu Herleitung der Prandtlschen Mischungsweghypothese	16
3-1	Beispiel für eine Geschwindigkeitsverteilung eines runden turbulenten Freistrahls in einer ruhenden homogenen Umgebung gleichen Fluids	19
3-2	Skizze eines turbulenten, runden Freistrahls in einem homogenen Umgebungsfluid	20
3-3	Darstellung der Bezeichner für einen runden turbulenten Freistrahlnach [Kraatz1989]	27
3-4	Dimensionslose Verteilung der Geschwindigkeit normal zur Trajektorie eines fluiden Strahles in einem homogenen Wasserkörper gleicher Dichte	29
3-5	Dimensionslose Abnahme der Maximalgeschwindigkeit mit der Lauflänge eines fluiden Strahles in einem homogenen Wasserkörper gleicher Dichte	29
3-6	Schematische Darstellung des äußeren und inneren Diffusionswinkels	31
3-7	Bezeichner der Strahltrajektorie nach [Vischer1976]	36
3-8	Diagramm zur graphischen Bestimmung von η_B [Vischer1976]	36
3-9	Diagramm zur graphischen Bestimmung von ξ_B [Vischer1976]	36
3-10	Diagramm zur graphischen Bestimmung von q_2 [Vischer1976]	37
4-1	Dimensionslose Geschwindigkeitsverteilung quer zur Strahltrajektorie	42
4-2	Schematische Darstellung eines Wirbelrings mit $d = D$	43
4-3	Bezeichner am Ringwirbel für $v_x=0$ und $v_x=0,5v_{max}$	46
4-4	Bezeichner für Halbwertzeit und Lauflänge	46
5-1	Abhängigkeit der Dichte von der Temperatur nach Gl. [5-1a] bis [5-1d] (Gl. [5-1/2*] nach Gossens)	52
5-2	Abhängigkeit der Dichte von Temperatur und Leitfähigkeit nach [BÜHRER1975] für $\kappa = f(S = 0,2 \dots 0,4 \dots 0,6 \text{ ‰})$	54
5-3	Abhängigkeit der Dichte von Temperatur, Salinität $S \text{ [‰]}$ und Druck $P \text{ [bar]}$ nach [Chen1977]	54
5-4	Dichtezunahme in Abhängigkeit der Temperatur in einem homogenen Wasserkörper	58
5-5	Dichtegradient in Abhängigkeit der Druckzunahme (Wassertiefe) für	58
5-6	Dichteprofil im Schmalen Luzin / Carwitzer Becken am 25. Juni 1996 vor der Zugabe von Kalkmilch	60
5-7	Dichteprofil im Schmalen Luzin / Carwitzer Becken am 9. Juli 1996 nach der Zugabe von Kalkmilch	60
6-1a	Kalzitkristalle während der autochthonen Kalzitfällung im Epilimnion des Schmalen Luzin [KOSCHEL1998]	64
6-1b	Kalzitkristalle nach der Ca(OH)_2 -Zugabe im Hypolimnion des	64

	Schmalen Luzin [KOSCHEL1998]	
6-2	Morphometrie des Schmalen Luzin [JORDAN1986]	65
6-3	Abfluß am Pegel Baek [STAUN1997]	66
6-4	Temperaturverteilung im Schmalen Luzin / Carwitzer Becken 1996 am Meßpunkt 0 (TIBEAN)	67
6-5	Konzentrationsverteilung des Sauerstoffs im Schmalen Luzin / Carwitzer Becken 1996 am Meßpunkt 0 (TIBEAN)	68
6-6	Schematische Darstellung der Pilotanlage im Schmalen Luzin	69
6-7	Vereinfachte Darstellung der Tiefenwasserbelüftungsanlage im Schmalen Luzin	70
6-8	Meßpunkte im Freiwasser des Schmalen Luzin / Carwitzer Becken	71
7-1	Abnahme der Konzentration von Kalzium und Zunahme des Volumenstroms im Strahl im Schmalen Luzin	76
7-2	Abnahme der Konzentration von Kalzium und Abnahme des Trockensubstanzgehaltes entsprechend der Theorie nach Bünger im Schmalen Luzin	77
7-4	Dichteverteilung im Hypolimnion im Schmalen Luzin / Carwitzer Becken am 12.7.1996	78
7-5	Potentielle Ausbreitungsgeschwindigkeit im Hypolimnion im Schmalen Luzin / Carwitzer Becken am 12.7.1996	78
7-3	Strahlentwicklung und Einschichtung im Schmalen Luzin / Carwitzer Becken am 12. Juli 1997	79
A-1	Diagramm zur graphischen Bestimmung von η_B nach [VISCHER1976]	93
A-2	Diagramm zur graphischen Bestimmung von ξ_B nach [VISCHER1976]	94
A-3	Diagramm zur graphischen Bestimmung von q_2 nach [VISCHER1976]	95
A-4	Temperaturverteilung im Schmalen Luzin / Carwitzer Becken 1997 am Meßpunkt 0 (TIBEAN)	96
A-5	Konzentrationsverteilung des Sauerstoffs im Schmalen Luzin / Carwitzer Becken 1997 am Meßpunkt 0 (TIBEAN)	96
A-6	Temperaturverteilung im Schmalen Luzin / Mittelbecken 1997 am Meßpunkt 0 (TIBEAN)	97
A-7	Konzentrationsverteilung des Sauerstoffs im Schmalen Luzin / Mittelbecken 1997 am Meßpunkt 0 (TIBEAN)	97
A-8	Tagesmittel der Lufttemperatur in °C für das Gebiet Luzinsee für den Zeitraum Mai bis November 1996	98
A-9	Betriebsregime der Pilotanlage im Schmalen Luzin für das Jahr 1996	99
A-10	Betriebsregime der Pilotanlage im Schmalen Luzin für das Jahr 1997	99
A-11	Brunt-Väisälä-Frequenz N^2 für den Schmalen Luzin / Carwitzer Becken am 1. Juli 1996	100
A-12	Potentielle Fließgeschwindigkeit im Schmalen Luzin / Carwitzer Becken am 1. Juli 1996	101
A-13	Potentielle Fließgeschwindigkeit im Schmalen Luzin / Carwitzer Becken am 26. Juni 1996	102
A-14	Potentielle Fließgeschwindigkeit im Schmalen Luzin / Carwitzer Becken am 12. Juli 1996	103
A-16	Dimensionslose Geschwindigkeitsverteilung orthogonal zur Strahltrajektorie nach [KRAATZ1989] und [KRANAWETTREISER1992]	105

Tabellenverzeichnis

	Seite	
3-1	Dimensionslose Kernzonenlänge für axialsymmetrische Freistrahlen nach [Freimann1998]	21
3-2	Ausbreitungswinkel α_a nach verschiedenen Autoren	32
5-1	Eigenschaften von reinem Wasser [SCHWOERBEL1993]	50
6-1	Maßnahmen zur Sanierung und Restaurierung eutrophierter Seen nach [DVWK1988]	62
6-2	Limnologische und morphometrische Kriterien [Jordan1986] [Koschel 1998]	66
6-3	Betriebszyklen, $\text{Ca}(\text{OH})_2$ -Zugabe und Belüftung im Schmalen Luzin 1996 und 1997 [KOSCHEL1998]	71
6-4	Zugabe von $\text{Ca}(\text{OH})_2$ nach Betriebstagebuch TIBEAN Schmalen Luzin	73
A-1	Vergleich des Temperaturkorrekturfaktors f_{25} für die Umrechnung von Meßwerten der elektrischen Leitfähigkeit von natürlichen Wässern bei einer Temperatur T auf 25 °C nach [WAGNER1996] und [BÜHRER1975]	104

Formelzeichenverzeichnis

A	Querschnitt	m^2
A_t	Austauschgröße nach Boussinesq	$kg / (s \ m)$
b	charakteristische Strahlbreite	m
C	empirische Konstante	-
c	Konzentration	g/l
D, d	Rohrdurchmesser	m
f	Frequenz	1 / s
g	Erdbeschleunigung	m / s^2
g_T	totaler Salzgehalt	g / kg
h, H	Schichtdicke, Höhe	m
I	1. Impuls	$kg \ m / s^2$
	2. Ionenstärke	mol / l
i, j	Laufvariablen	-
K	1. kinematischer Impuls	m^4 / s^2
	2. Druckkorrekturbeiwert	bar
k	turbulente kinetische Energie	$kg \ m^2 / s^2$
l	Länge	m
l_s	Wirbeldurchmesser = Kolmogorovsches Längenmaß	m
p, P	Druck	$kg / (m \ s^2)$
Q	Durchfluß	m^3/s
S	Salinität	$‰$
SI	Sättigungsindex	-
T	1. Temperatur	$^{\circ}C, K$
	2. Stratifizierungszahl	-
t	Zeit	s
t^*	Zeitintervall	s
\hat{T}	Tensor der Stokesschen Reibungsspannungen	-
t_H	Halbwertzeit	s
TS	Trockensubstanzgehalt	g / kg
v	Geschwindigkeitsvektor	m/s
x r ϕ	Koordinatenrichtungen im zylindrischen Koordinatensystem	$m, ^{\circ}$
x y z	Koordinatenrichtungen im orthogonalen Koordinatensystem	m
x_1	Kernzonenlänge	m
α_a	äusserer Diffusionswinkel	$^{\circ}$
α_i	innerer Diffusionswinkel	$^{\circ}$
β_T	Temperaturkorrekturfaktor	$^{\circ}C^{-2}$
ε	Dissipationsrate	$kg / (s^3 \ m)$
ε_0	scheinbare kinematische Zähigkeit	
ε_{τ}	Wirbelviskosität	
μ	dynamische Zähigkeit	$kg / (m \ s)$
ν	kinematischen Zähigkeit	m^2 / s
ρ	Dichte	kg/m^3
τ	Schubspannung	$kg / (m \ s^2)$

Die vorliegende Arbeit stellt die Ergebnisse theoretischer Untersuchungen über Strömungen der freien Turbulenz - der Freistrahlen - für die Ausbreitung von Suspensionen vor. Die praktischen Untersuchungen wurden durch das IGB durchgeführt und die Meßergebnisse freundlicherweise dem Verfasser zur

¹ Institut für Gewässerökologie und Binnenfischerei im Forschungsverbund Berlin e.V., Abteilung Limnologie geschichteter Seen, Alte Fischerhütte 2, 16775 Neuglobsow

1.2 Ziel der Arbeit

Das Ziel der Arbeit besteht in der Entwicklung einer theoretisch begründeten und praktisch anwendbaren Rechenvorschrift zur Beschreibung und Vorhersage von Ausbreitungsmechanismen von Suspensionen in ruhenden Wasserkörpern. Es sollen Aussagen zum Geschwindigkeits- und Konzentrationsprofil in jedem Punkt der Ausbreitungsfahne getroffen werden können. Eine theoretische Rechenvorschrift weist auf Grund der Eigenschaften der freien Turbulenzen hochkomplexe Strukturen auf, die im praktischen Gebrauch bei der Beurteilung und Vorhersage von fluiden Ausbreitungsvorgängen nicht handhabbar sind.

Die bisherigen Berechnungen des Konzentrationsprofils von Suspensionen in fluiden Strahlen beruht hauptsächlich auf dem Verdünnungsprinzip. Dabei wird der Tracer-Gehalt in einem solchen Strahl über die Lauflänge des Strahls konstant gehalten. Im Falle von sogenannten Sterberaten, d.h. daß aufgrund einer Übersättigung der nicht mehr zu transportierende, suspendierte Tracer ausfällt, kann dieses Verdünnungsprinzip nicht mehr angewendet werden.

Es war somit eine Rechenvorschrift zu schaffen, die in Abhängigkeit der Anfangsbedingungen eines Mehrphasenstrahls sowohl die Ausbreitungsgeometrie als auch das Konzentrationsgleichgewicht eines suspendierten Tracers in Abhängigkeit des Transportvermögens berücksichtigt.

Des weiteren sind die Berechnungen für Freistrahlen nur in einem unbegrenzten Raum zulässig. Unter natürlichen Bedingungen sind in einem Wasserkörper Grenzen vorhanden, wie z.B. die Oberfläche eines Sees, der Seengrund oder auch die Sprungschicht zur Stagnationsperiode im Sommer und Winter in dimiktischen Seen. Trifft ein Freistrahler auf solch eine Grenze, so wird er in seiner Ausbreitung behindert. Im weiteren muß diese Strömung als Schichtenströmung aufgefaßt werden. Eine weitere Begrenzung der Ausbreitung liegt in der Strahl-turbulenz selbst begründet. Sinkt die Strahlgeschwindigkeit unter einen von den Dichteverhältnissen zwischen Strahl- und Umgebungsmedium und der Strahlbreite abhängigen Wert, dann kommt der vertikale Austausch von Flüssigkeitsteilchen über die Strahlgrenze

hinweg zum Erliegen. Auch hier ist im weiteren die Strömung als Schichtenströmung aufzufassen.

1.3 Methode

Entsprechend der Aufgabenstellung gliedert sich die Arbeit in drei Teile.

Im ersten Teil werden für die tropfbaren Flüssigkeiten die Kontinuumshypothese eingeführt, die Turbulenz phänomenologisch beschrieben und die Probleme bei der mathematischen Behandlung turbulenter Strömungen aufgezeigt. Darauf aufbauend werden die grundlegenden Gleichungen für die mathematische Behandlung von Freistrahlen unter Beachtung der Stoffeigenschaften des Umgebungsfluids dargestellt.

Im zweiten Teil wird die Hypothese eingeführt, daß das durch das Normalverteilungsgesetz gegebene Geschwindigkeitsprofil orthogonal zur Strahltrajektorie durch eine lineare Verteilung ersetzt werden kann. Aus der Verschiebung dieser Verteilung läßt sich das Geschwindigkeitsprofil eines Freistrahls als Querschnitt eines Wirbelringes auffassen.

Schwerpunkte sind die Modellierung von Freistrahlen in Form einer Folge von Wirbelringen mit einem Wirbelfadendurchmesser der gleichen Größenordnung wie der Wirbelringdurchmesser und deren Transportleistung von feinverteilten Stoffen in einem stratifizierten Wasserkörper. Ein Berechnungsmodell für die Ausbreitung von fluiden Strahlen in einem geschichteten Medium wird entwickelt.

Im dritten Teil werden die Eigenschaften des Wassers aufgezeigt. Verschiedene Verfahren zur Bestimmung der Dichte als Funktion von Temperatur, Druck und der Menge an gelösten Stoffe werden beschrieben und hinsichtlich ihrer Anwendbarkeit ausgewertet. Des weiteren wird das Großexperiment "Schmaler Luzin" vorgestellt und die entwickelte Rechenvorschrift auf die Meßergebnisse aus dem Versuch angewendet.

2 Grundlagen zur Beschreibung axialsymmetrischer turbulenter Strömungen

Im folgenden Kapitel werden für die tropfbaren Flüssigkeiten die Kontinuumshypothese eingeführt, die Turbulenz phänomenologisch beschrieben und die Probleme bei der mathematischen Behandlung turbulenter Strömungen aufgezeigt.

2.1 Kontinuumshypothese und Turbulenz

Zur dynamischen Beschreibung einer fluiden Strömung ist die Flüssigkeit als Kontinuum aufzufassen. Grundlage dafür ist zum einen die Vernachlässigung der ungeordneten Bewegungen einzelner Atome und Moleküle und zum anderen, daß ein Raumgebiet stetig und lückenlos mit Flüssigkeitsteilchen gefüllt ist [Recknagel1980].

Den Ansatz zur Kontinuumshypothese liefert folgende mikroskopische Betrachtung eines fluiden Raumgebietes: Flüssigkeiten bestehen aus mehr oder weniger dichtgelagerten Molekülen mit einem mittleren Abstand von etwa einem effektiven Moleküldurchmesser untereinander (ca. $3 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$)². Die Moleküle liegen ungeordnet vor und können jederzeit (wenn sie in flüssiger oder gasförmiger Phase vorliegen) ihre Plätze tauschen. Zwischen den Molekülen besteht, im Gegensatz zu Gasen, eine permanente Wechselwirkung.

Die Bewegung eines definierten Raumgebietes einer fluiden Materie könnte nun über die Bewegungsgleichungen der es beinhaltenden Moleküle beschrieben werden. Voraussetzung ist das Bekanntsein des Ortes und des Impulses jeden Moleküls. Heisenberg wies jedoch nach, daß der Impuls und der Ort eines Teilchens nicht gleichzeitig angegeben werden können (Heisenbergsche Unschärferelation). Ein weiteres Hindernis für dieses Herangehen ist die große Anzahl der Moleküle in einem definierten Raumgebiet, die eine rechnerische Auswertung schwer bzw. sogar unmöglich macht.

Ein geeignetes Verfahren zur Beschreibung der Bewegungen in einer fluiden Materie ist die Zusammenfassung der einzelnen Moleküle zu Molekülhaufen mittlerer Größe. Diese Molekülhaufen sind dann die kleinsten Teilchen der fluiden Materie in einem

Raumgebiet, die sogenannten Flüssigkeitsteilchen. Bedingung für diese Vorgehensweise ist, daß einerseits das Volumen des Molekülhaufens klein gegenüber dem Volumen des Raumgebietes ist und andererseits das Volumen des Molekülhaufens so groß ist, daß es unabhängig von der Anzahl der Moleküle wird.

Auf diese Weise läßt sich für ein Kontinuum die Massendichte ρ einführen. Die Massendichte ist das Verhältnis der gesamten Molekülmassen in einem Molekülhaufen (Flüssigkeitsteilchen) zum eingenommenen Volumen, wobei das Volumen so groß sein muß, daß die Dichte des Flüssigkeitsteilchens unabhängig von seinem Volumen wird [Spurk1996].

Die Kontinuumshypothese besagt, daß das Volumen des Flüssigkeitsteilchens als unendlich klein im Vergleich zu dem Volumen des Raumgebietes angenommen werden darf. Damit kann das fluide Teilchen als ein materieller Punkt aufgefaßt und die Dichte im fluiden Raumgebiet als stetige Funktion von Ort und Zeit betrachtet werden. Mit anderen Worten, ein fluides Kontinuum zeichnet sich dadurch aus, daß in einem definierten Raumgebiet, in dem sich ein Flüssigkeitsteilchen befindet, ein zweites nicht hineinkommen kann, wenn es nicht das erste verdrängt oder

Für die Kontinuumshypothese muß ein weiteres Kriterium eingeführt werden: die thermische Bewegung der Moleküle und die sie daran hindernden Anziehungskräfte benachbarter Moleküle. Selbst wenn keine Bewegung eines fluiden Raumgebietes vorhanden ist, können die Moleküle ihre Plätze auf Grund der thermischen Bewegung wechseln. Daraus folgt, daß ein Molekül ein Flüssigkeitsteilchen verlassen und in ein anderes eintreten kann, um dort wiederum ein Molekül von seinem Platz zu verdrängen. Dieser Austauschvorgang, auf das Kontinuum bezogen, wird als Diffusion bezeichnet. Damit verbunden ist ein Impulstransport durch die Oberfläche eines Flüssigkeitsteilchens, der sich als ein Teil der inneren Reibung darstellt. Den größeren Teil jedoch liefern die Anziehungskräfte der Moleküle untereinander selbst. Daher sinkt die Viskosität mit steigender Temperatur, denn die Platzwechsel werden durch die stärkere Bewegung der Moleküle begünstigt.

Für die phänomenologische Beschreibung der Turbulenz kann nun im folgenden auf den elementaren Begriff "Flüssigkeitsteilchen" zurückgegriffen werden.

² Das ist die mittlere freie Teilchenweglänge für H₂O-Moleküle [Sigloch1996].

Bei der Betrachtung von Strömungen realer Fluide sind zwei Strömungsformen zu unterscheiden: die laminare und die turbulente Strömung.

Bewegen sich die Flüssigkeitsteilchen nebeneinander auf streng getrennten Strombahnen, so spricht man von einer laminaren Strömung. Sie entsteht vor allem bei kleinen Fließgeschwindigkeiten. Eine Diffusion findet nur im mikroskopischen Bereich statt, bedingt durch die thermische Molekularbewegung der Flüssigkeitsteilchen. Die innere Reibung kommt durch den molekülbedingten Impulsaustausch zustande. Dieser wirkt sich als Scherspannung aus (Viskosität).

Wird nun die Fließgeschwindigkeit einer laminaren Strömung erhöht, ändert sich das Strömungsbild ab einem kritischen Wert erheblich. Die ursprünglich stabile laminare Strömung wird instabil und als turbulent bezeichnet. In Auswertung seiner Experimente zeigte Osborne Reynolds (1883), daß eine Kennzahl vD/ν existiert (gebildet aus der Fließgeschwindigkeit v , dem Rohrdurchmesser D und der ν) welche diesen kritischen Wert kennzeichnet (Reynoldszahl $Re = 2320$).

Eine anschauliche Beschreibung der Turbulenz ist durch die Zusammenfassung von Flüssigkeitsteilchen zu sogenannten Wirbelballen möglich.

Turbulente Strömungsgebiete bestehen aus Wirbelballen (Turbulenzballen)³, deren Größe über einen weiten Bereich schwanken kann. Die größten Wirbel liegen in der Größenordnung des Strömungsgebietes selbst und die kleinsten im Millimeterbereich und darunter. Große Wirbel besitzen den Hauptteil der Bewegungsenergie der Strömung. Diese wird nach und nach in die kleineren Wirbel übertragen (Energiekaskade), bis sie in den kleinsten Wirbeln durch viskose Reibung in Wärmeenergie umgewandelt wird [Griebel1995]. Die Größe der Wirbel ist zum einen Abhängig von der äußeren Geometrie des Strömungsgebietes (Maximalwert) und zum anderen von der Dissipationsrate ϵ und der kinematischen Viskosität ν (Minimalwert) [TENNEKES1972]. Es gilt $l_s = (\nu^3/\epsilon)^{1/4}$ mit l_s als den kleinstem möglichen Wirbeldurchmesser. Die Größe l_s wird auch als Kolmogorovsches Längenmaß bezeichnet.

³ Die Turbulenzballen bestehen wiederum aus den kleinsten Elementen der fluiden Strömung; den

Es ist nun ersichtlich, daß ein Flüssigkeitsteilchen zum einen der translatorischen Bewegung des gesamten fluiden Raumgebietes unterworfen ist, und zum anderen durch eine Rotationsbewegung des mit ihm verbundenen Wirbelballens aus der translatorischen Richtung abgelenkt wird.

Da die Turbulenz selbst ein nichtlineares dynamischen Problem darstellt, ist auch eine exakte Beschreibung der Turbulenz nicht möglich. Um dennoch die Turbulenz charakterisieren zu können, werden in der einschlägigen Literatur im allgemeinen die Eigenschaften der turbulenten Strömungen angegeben. Zusammenfassend haben turbulente Strömungen folgende Eigenschaften [SIGLOCH1996]:

- instationär und dreidimensional,
- unregelmäßig, chaotisch und nicht vorhersagbar,
- mischungsintensiv,
- drehungsbehaftet,
- dissipativ.

Es sei darauf hingewiesen, daß die Turbulenz keine Stoffeigenschaft, d.h. keine Eigenschaft der Flüssigkeit, sondern eine Eigenschaft des Strömungsvorganges ist.

2.2 Mathematische Beschreibung fluider Strömungen

Wird in einer turbulenten Strömung ein Flüssigkeitsteilchen herausgegriffen und werden die das Flüssigkeitsteilchen kennzeichnenden Geschwindigkeitsbeiträge betrachtet, so kommt man zu dem Ergebnis, daß das Flüssigkeitsteilchen einer Translations- und einer Rotationsbewegung unterworfen ist. Wird des weiteren diese zusammengesetzte Bewegung in einem kartesischen Koordinatensystem dargestellt, so ergeben sich drei Geschwindigkeitsvektoren, die zueinander orthogonal stehen. Diese Geschwindigkeitsvektoren beschreiben die augenblickliche Geschwindigkeit des Teilchens.

Für eine instationäre, kompressible Strömung ohne Quellen und Senken [WIEGHARDT1965, ROTTA1972, SCHATZMANN1976, RODI1993] sind die, das

Strömungsfeld kennzeichnenden Gleichungen in vektorieller Darstellung⁴ die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad [2-1]$$

und die Bewegungsgleichung

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\operatorname{grad} p + \operatorname{div} \hat{T} + \rho \vec{f}. \quad [2-2]$$

Darin ist $D/Dt = \partial/\partial t + \vec{v} \operatorname{grad}$ die substantielle Differentiation der betreffenden Feldgröße nach der Zeit, d.h. die zeitliche Änderung der Feldgröße, die ein sich mit der Geschwindigkeit \vec{v} bewegendes Beobachter feststellt. Des weiteren ist ρ die Dichte im Strömungsfluid und \vec{v} der Vektor der Momentangeschwindigkeit, p der Druck, \hat{T} der Tensor der Stokes'schen Reibungsspannungen (Tensor 2. Stufe) und \vec{f} die am Fluidelement angreifenden Volumenkräfte (z.B. Erdanziehung, Zentrifugalkraft). Aus der Kontinuitätsgleichung folgt, daß die Summe aus der

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \quad \text{und der relativen Volumenänderung } \operatorname{div} \vec{v} \quad \text{für ein}$$

Volumenelement gleich Null ist. Die Bewegungsgleichung ist das Newtonsche Grundgesetz der Mechanik, d.h. die zeitliche Änderung des Impulses ist gleich der Summe der auf den Körper wirkenden Kräfte.

Für ein rechtwinkliges kartesisches Koordinatensystem lassen sich die Gl. [2-1] und

$$[2-2] \quad \text{mit } \vec{v} = v_i, \quad \vec{f} = f_i, \quad \hat{T} = \tau_{ij} \quad \text{und der substantiellen Ableitung } \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

in eine anschaulichere Form bringen. Dann gilt für die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad [2-3]$$

und die Bewegungsgleichung

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i. \quad [2-4]$$

Besteht die Strömung aus einem inkompressiblen Fluid⁵, so ist die Dichte eines Flüssigkeitsteilchens konstant und die Gleichungen [2-1] und [2-2] lassen sich nach der Division durch ρ zu

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad [2-5]$$

⁴ koordinatenunabhängig

⁵ nach [ROTTA1972]: volumenbeständigem Fluid

und

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p - \nu \text{rot rot } \vec{v} + \vec{f} \quad [2-6]$$

mit der kinematischen Zähigkeit $\nu = \mu/\rho$ vereinfachen. Die Gleichung [2-6] stellt die Navier-Stokessche-Gleichung dar. Werden diese Gleichungen in ein rechtwinkliges kartesisches Koordinatensystem überführt, dann ergibt sich für Gl. [2-5] mit x , y und z für die Koordinatenrichtungen

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad [2-7]$$

und für Gleichung [2-6]

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + f_x \quad [2-8/1]$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) + f_y \quad [2-8/2]$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + f_z \quad [2-8/3]$$

Wie oben angedeutet beschreiben diese Gleichungen die augenblickliche Geschwindigkeit, bestehend aus einer translatorischen und einer Rotationsbewegung, eines definierten Flüssigkeitsteilchens. Da diese Bewegungen dem chaotischen Prinzip folgen (nichtlineare Dynamik) sind die Gl. [2-8/1] bis [2-8/3] im allgemeinen nicht lösbar.

Erst die Erkenntnis von Reynolds führte dazu, daß für bestimmte Anwendungen das Gleichungssystem gelöst werden konnte. Er führte eine statistische Betrachtungsweise turbulenter Strömungen ein. Es gilt, daß einer geordneten Grundströmung (Primärströmung) eine ungeordnete Nebenströmung (Sekundärströmung) überlagert ist. Das führt zu der These, daß der Vektor der momentanen Geschwindigkeit $\vec{v}(\vec{r}, t)$ am Ort \vec{r} sich aus einer im Mittel stationären Geschwindigkeit $\bar{\vec{v}}(\vec{r})$ und einer überlagerten Zufallsschwankung $\vec{v}'(\vec{r}, t)$ zusammensetzt. Es gilt: $\vec{v}(\vec{r}, t) = \bar{\vec{v}}(\vec{r}) + \vec{v}'(\vec{r}, t)$. Die mittlere Geschwindigkeit ist dann: $\bar{\vec{v}}(\vec{r}) = 1/t^* \int_t^{t+T} \vec{v}(\vec{r}, t) dt$, wobei das Zeitintervall t^* genügend groß gewählt werden muß, so daß der Mittelwert $\bar{\vec{v}}(\vec{r})$ unabhängig davon wird (Abb. 2-1).

Das entsprechende Zeitmittel der Schwankungsgeschwindigkeit $\overline{v'} = 0$ verschwindet definitionsgemäß, jedoch nicht das quadratische Mittel $\overline{v'^2} \neq 0$.

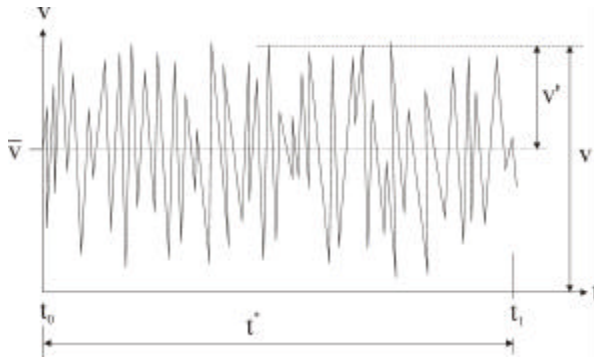


Abb. 2-1: Turbulente Schwankung der Geschwindigkeit

Werden die Gleichungen [2-7] und [2-8/1] bis [2-8/3] den Mittelwertoperationen unterzogen, dann spaltet sich die Momentangeschwindigkeit in eine gemittelte Geschwindigkeit \bar{v}_i und die zugehörige Schwankungsgeschwindigkeit v'_i auf und es ergibt sich für Gleichung [2-7]

$$\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} = 0 \quad [2-9]$$

und für Gleichungen [2-8/1] bis [2-8/3]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t} + \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \left(\frac{\partial \overline{v'_x v'_x}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'_x v'_y}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v'_x v'_z}}{\partial z} \right) \\ + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial z^2} \right) + \bar{f}_x \end{aligned} \quad [2-10/1]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial t} + \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - \left(\frac{\partial \overline{v'_y v'_x}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'_y v'_y}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v'_y v'_z}}{\partial z} \right) \\ + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_y}{\partial z^2} \right) + \bar{f}_y \end{aligned} \quad [2-10/2]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial t} + \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial y} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - \left(\frac{\partial \overline{v'_z v'_x}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'_z v'_y}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v'_z v'_z}}{\partial z} \right) \\ + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial z^2} \right) + \bar{f}_z \end{aligned} \quad [2-10/3]$$

Diese Gleichungen werden auch als die Reynoldsschen Gleichungen bezeichnet.

Der zweite und der dritte Term auf der rechten Seite der Gleichungen [2-10/1] bis [2-10/3] können zusammengefaßt als die Reynoldsschen Spannungen und die Stokesschen Reibungsspannungen interpretiert werden, so daß gilt:

$$\sum \tau_{i,j} = -\rho v'_i v'_j + \mu \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \quad [2-11]$$

für $i, j = x, y, z$.

In der Regel überwiegen die Reynoldsschen Spannungen gegenüber den Stokesschen Reibungsspannungen um Größenordnungen. Demzufolge können die Stokesschen Reibungsspannungen vernachlässigt werden, nur bei Strömungen in der Nähe fester Wände sind sie zu berücksichtigen. Die Anwendung der Grenzschichttheorie⁶ vereinfacht die Reynoldsschen Gleichungen, d.h. daß bei Strömungsvorgängen der freien Turbulenz die Anwesenheit des Turbulenzgebietes keine nennenswerte Rückwirkung auf das umgebende Strömungsfeld hat.

Im folgenden sollen die Kontinuitäts- und die Bewegungsgleichung für ein zylindrisches Koordinatensystem abgeleitet werden, da im folgenden nur noch axialsymmetrische Strömungsvorgänge betrachtet werden.

2.3 Mathematische Beschreibung axialsymmetrischer Strömungen

Für eine stationäre, inkompressible und axialsymmetrische Strömung ohne äußere Volumenkräfte lassen sich die Gl. [2-9] und [2-10/1] bis [2-10/3] in einem zylindrischen Koordinatensystem (x, r und ϕ) darstellen (Abb. 2-2). Dabei weist die x -Koordinate in Richtung der Strömung, r ist der radiale Abstand und v_x, v_r, v_ϕ sind die Geschwindigkeitskomponenten in axialer, radialer und azimuthaler Richtung [RAJARATNAM1976 / SCHLICHTING1933 / ROTTA1972].

Für die Kontinuitätsgleichung erhält man dann in x -, r - und ϕ -Richtung

$$\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} + \frac{\bar{v}_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_\phi}{\partial \phi} = 0 \quad [2-12]$$

und für die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \bar{v}_r \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} + \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial x} - \frac{\bar{v}_\phi \bar{v}_\phi}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} - \frac{\bar{v}_r}{r^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_r}{\partial x^2} \right) \\ - \left(\frac{\partial}{\partial r} \overline{v'_r v'_r} + \frac{\partial}{\partial x} \overline{v'_r v'_x} + \frac{\overline{v'_r v'_r}}{r} - \frac{\overline{v'_\phi v'_\phi}}{r} \right) \end{aligned} \quad [2-13/1]$$

⁶ von L. Prandtl [SCHLICHTING1965]

$$\bar{v}_r \frac{\partial \bar{v}_\phi}{\partial r} + \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_\phi}{\partial x} + \frac{\bar{v}_r \bar{v}_\phi}{r} = \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_\phi}{\partial r} - \frac{\bar{v}_\phi}{r^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_\phi}{\partial x^2} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial r} \overline{v'_r v'_\phi} + \frac{\partial}{\partial x} \overline{v'_\phi v'_x} + 2 \frac{\overline{v'_r v'_\phi}}{r} \right) \quad [2-13/2]$$

$$\bar{v}_r \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial r} + \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial x^2} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial r} \overline{v'_r v'_x} + \frac{\partial}{\partial x} \overline{v'_x v'_x} + \frac{\overline{v'_r v'_x}}{r} \right). \quad [2-13/3]$$

Darin sind p der Druck in irgendeinem Punkt des betrachteten Strömungsgebietes und ν die kinematische Zähigkeit. Unter der Annahme, daß die axialsymmetrische

$v_\phi = 0$ ist, entfallen alle Terme in den obigen

Gleichungen, die v_ϕ enthalten. Des weiteren kann angenommen werden, daß der Geschwindigkeitsgradient in radialer Richtung viel größer als in axialer Richtung ist⁷ und daß für hohe Reynolds-Zahlen die Schubspannungen, resultierend aus der Viskosität, vernachlässigbar klein gegenüber denen der Turbulenz sind.

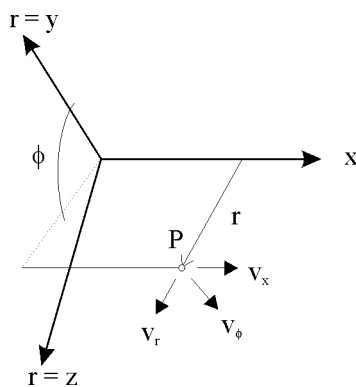


Abb. 2-2: Bezeichner im zylindrischen Koordinatensystem

In [WYGNANSKI1969] wird nachgewiesen, daß die turbulenten Scherspannungen in axialer und radialer Richtung gleich sind. Damit entfällt Gleichung [2-13/2] und die Gleichungen [2-13/1] und [2-13/3] lassen sich vereinfachen zu:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r} \overline{v'_r v'_r} \quad [2-14]$$

$$\bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \bar{v}_r \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \overline{v'_x v'_x} - \frac{\partial}{\partial r} \overline{v'_x v'_r} - \frac{\overline{v'_x v'_r}}{r}. \quad [2-15]$$

⁷ Die Geschwindigkeit in axialer Richtung ist sehr viel größer als in radialer Richtung.

Mit $-\rho \overline{v'_x v'_r}$ für die Reynoldssche Schubspannung und $\mu \partial \overline{v}_x / \partial r$ für die Newtonsche Schubspannung⁸ kann dann mit $\tau = \rho(-\overline{v'_x v'_r} + \nu \partial \overline{v}_x / \partial r)$ und der integrierten Gleichung [2-14] die Gleichung [2-15] wie folgt geschrieben werden:

$$\overline{v}_x \frac{\partial \overline{v}_x}{\partial x} + \overline{v}_r \frac{\partial \overline{v}_x}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\overline{p}}{dx} + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial}{\partial r} \tau r. \quad [2-16]$$

In den meisten praktischen Anwendungen spielt der Druck keine Rolle, so daß sich die Gleichung [2-16] zu

$$\overline{v}_x \frac{\partial \overline{v}_x}{\partial x} + \overline{v}_r \frac{\partial \overline{v}_x}{\partial r} = \frac{1}{\rho r} \frac{\partial}{\partial r} \tau r \quad [2-17]$$

vereinfachen läßt. Die Gleichungen [2-12] und [2-17] sind die vereinfachten Bewegungsgleichungen für einen stationären, inkompressiblen vollentwickelten Freistrah in einem homogenen Umgebungsfluid⁹.

2.4 Impuls- und Energiegleichungen für die axialsymmetrische Strömung

Wird Gleichung [2-17] mit ρr multipliziert und in den Grenzen $r=0$ bis $r=\infty$ integriert, dann erhält man die folgende Gleichung für den Impuls einer axialsymmetrischen Strömung in einer homogenen, turbulenzfreien Umgebung¹⁰

$$\int_0^{\infty} \rho v_x r \frac{\partial v_x}{\partial x} dr + \int_0^{\infty} \rho v_r r \frac{\partial v_x}{\partial r} dr = \int_0^{\infty} r \frac{\partial}{\partial r} \tau dr. \quad [2-20]$$

Jedes der obigen Glieder kann mit der Liebnitz-Regel auch in folgender Weise geschrieben werden¹¹ [REDDICK1962]:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \rho v_x r \frac{\partial v_x}{\partial x} dr &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x^2 r) r dr \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{\pi} \rho v_x^2 \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} 2\pi r dr \end{aligned} \quad [2-21]$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \rho v_r r \frac{\partial v_x}{\partial r} dr &= \left| \rho v_x v_r r \right|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \rho v_x r \frac{\partial v_r}{\partial r} dr = \int_0^{\infty} \rho v_x r \frac{\partial v_x}{\partial r} dr \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \rho v_x^2 \int_0^{\infty} 2\pi r dr \end{aligned} \quad [2-22]$$

⁸ In erster Näherung kann der Term $\mu \partial \overline{v}_x / \partial r$ vernachlässigt werden [ROTTA1972].

⁹ Die Zone des vollausbildeten Strahles beginnt nach dem Referenzquerschnitt.

¹⁰ Im weiteren gilt für die gemittelten Geschwindigkeiten $\overline{v}_i = v_i$.

¹¹ Die allgemeine Form der Liebnitz-Regel (Parameterintegral) lautet

$$\int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) dy = \frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, y) dy + f(x, a) \frac{da}{dx} - f(x, b) \frac{db}{dx}.$$

$$\int_0^{\infty} r \frac{\partial}{\partial r} \tau dr = |r\tau|_0^{\infty} = r[\tau(\infty) - \tau(0)] = 0. \quad [2-23]$$

Die Substitution der Glieder in der Gl. [2-20] mit den Gleichungen [2-21] bis [2-23] führt zur Gl. [2-24], die die Impulsänderung in einer axialsymmetrischen Strömung beschreibt:

$$\frac{d}{dx} \rho v_x^2 \int_0^{\infty} 2\pi r dr = 0. \quad [2-24]$$

Aus Gl. [2-24] folgt, daß die Impulsänderung in axialer Richtung Null bzw. daß der Impuls in axialer Richtung konstant ist.

Die Energiegleichung erhält man, wenn Gleichung [2-17] mit $\rho v_x r$ multipliziert und in den Grenzen $r = 0$ bis $r = \infty$ integriert wird:

$$\int_0^{\infty} \rho r v_x^2 \frac{\partial v_x}{\partial x} dr + \int_0^{\infty} \rho r v_x v_r \frac{\partial v_x}{\partial r} dr = \int_0^{\infty} v_x r \frac{\partial}{\partial r} \tau dr. \quad [2-25]$$

Die Anwendung der Liebnitz-Regel auf die Gl. [2-25] führt zu den Gleichungen [2-26], [2-27] und [2-28]:

$$\int_0^{\infty} \rho r v_x^2 \frac{\partial v_x}{\partial x} dr = \frac{1}{4} \frac{1}{\pi} \rho v_x^2 \int_0^{\infty} 2\pi \frac{\partial v_x}{\partial x} r dr \quad [2-26]$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \rho r v_x v_r \frac{\partial v_x}{\partial r} dr &= \int_0^{\infty} r v_r \frac{\partial}{\partial r} \frac{\rho v_x^2}{2} dr \\ &= \left| r v_r \frac{\rho v_x^2}{2} \right|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{\rho v_x^2}{2} \frac{\partial r v_r}{\partial r} dr \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{\pi} \rho v_x^2 \int_0^{\infty} 2\pi \frac{\partial v_x}{\partial x} r dr. \end{aligned} \quad [2-27]$$

Der Additionsterm der Gl. [2-25] läßt sich mit den Gl. [2-26] und [2-27] dann schreiben als

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} \rho r v_x^2 \frac{\partial v_x}{\partial x} dr + \int_0^{\infty} \rho r v_x v_r \frac{\partial v_x}{\partial r} dr \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{\pi} \rho v_x^2 \int_0^{\infty} 2\pi \frac{\partial v_x}{\partial x} r dr + \frac{1}{4} \frac{1}{\pi} \rho v_x^2 \int_0^{\infty} 2\pi \frac{\partial v_x}{\partial x} r dr \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \rho v_x^2 \int_0^{\infty} 2\pi r dr, \end{aligned} \quad [2-28*]$$

wobei sich der Integrand als die durch eine ringförmigen Fläche transportierte kinematische Energie interpretieren läßt. Der Schubspannungsterm der Gl. [2-25] läßt sich in folgender Weise mit der Liebnitz-Regel umwandeln:

$$\int_0^{\infty} v_x r \frac{\partial}{\partial r} \tau dr = |v_x r \tau|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} r \tau \frac{\partial v_x}{\partial r} dr = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} 2\pi r dr \frac{\partial v_x}{\partial r}. \quad [2-28]$$

Gleichung [2-28] repräsentiert die Turbulenzproduktion in einer turbulenten

Die Substitution der Glieder in Gl. [2-25] mit den Gl. [2-26], [2-27] und [2-28] liefert die Gleichung:

$$\frac{d}{dx} v_x \rho v_x^2 \int_0^{\infty} 2\pi r dr = -\tau \frac{\partial v_x}{\partial r} \int_0^{\infty} 2\pi r dr. \quad [2-29]$$

Diese besagt, daß die Abnahme der kinetischen Energie der Zunahme der Turbulenzproduktion entspricht [RAJARATNAM1976].

2.5 Empirische Ansätze zur Lösung der partiellen Differentialgleichungen

Die obigen Gleichungen sind gekoppelte partielle nichtlineare Differentialgleichungen, d.h. sie sind nur unter großen Vereinfachungen analytisch lösbar. Grundlage dafür sind empirische Ansätze, die den Term der gemittelten Schwankungsbewegungen ersetzen und somit die Gleichungen schließen. Eine Möglichkeit der Schließung ist die rein phänomenologische Beschreibung der scheinbaren Schubspannung mit dem Austauschansatz nach Boussinesq [PRANDTL1912]. Dabei wird angenommen, daß die Reynoldssche Schubspannung, ähnlich dem Newtonschen Reibungsgesetz $\mu(d\bar{v}_x/dr)$ der laminaren Strömung, der Impulsaustauschgröße A_t proportional ist:

$$-\overline{\rho v'_x v'_r} = A_t \frac{d\bar{v}_x}{dr}. \quad [2-30]$$

Dabei ist die Austauschgröße A_t kein Stoffbeiwert wie der Zähigkeitsbeiwert μ , sondern hängt außerdem von der mittleren Geschwindigkeit \bar{v}_x und ihrer Verteilung ab. Wird die Wirbelviskosität¹² ϵ_τ mit der Relation $\epsilon_\tau = A_t/\rho$ eingeführt, dann gilt:

$$-\overline{\rho v'_x v'_r} = \rho \epsilon_\tau \frac{d\bar{v}_x}{dr}. \quad [2-31]$$

Ein weiterer Ansatz resultiert aus der Mischungswegtheorie nach Prandtl. Dabei werden zwei Schichten mit einem infinitesimalem Abstand l betrachtet (Abb. 2-3). Die untere Schicht soll die Geschwindigkeit v_x und die obere die linear genäherte Geschwindigkeit $v_x + l(dv_x/dr)$ haben. Ein Flüssigkeitsteilchen, welches wegen der Schwankungsbewegung von der oberen in die untere Schicht bewegt wird, nähert sich mit einer horizontalen Relativgeschwindigkeit von $v'_x = l(dv_x/dr)$. Da ein definiertes fluides Raumgebiet als Kontinuum aufgefaßt wird, muß sich ein

Flüssigkeitsteilchen aus der unteren Schicht zur oberen hin bewegen, und zwar mit der Geschwindigkeit $v'_r = l(dv_x/dr)$. Daraus läßt sich ableiten, daß durch einen horizontalen Schnitt pro Flächeneinheit eine Masse $\rho l(dv_x/dr)$ mit einer relativen Geschwindigkeitsgradienten von $l(dv_x/dr)$ bewegt wird [HUTTER1995]. Der Impulsfluß ist dann

$$-\overline{\rho v'_x v'_r} = \rho \left(l \frac{d\bar{v}_x}{dr} \right)^2. \quad [2-32]$$

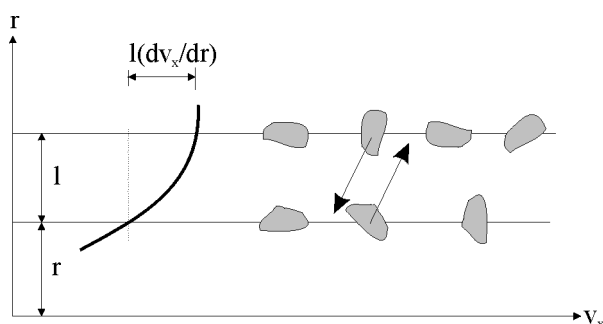


Abb. 2-3: Schematische Darstellung zu Herleitung des Prandtlischen Mischungsweghypothese

Da das Vorzeichen der Reynoldsschen Schubspannung vom Vorzeichen des Geschwindigkeitsgradienten abhängt, gilt für die Gl. [2-32]:

$$-\overline{\rho v'_x v'_r} = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{v}_x}{dr} \right| \frac{d\bar{v}_x}{dr}. \quad [2-33]$$

Weitere empirische Ansätze wurden durch Reynolds, Taylor und Bradshaw aufgestellt [ROTTA1972] [RODI1978]. Andere Möglichkeiten für die mathematische Beschreibung von turbulenten Strömungen sind:

- direkte numerische Simulation (DNS)
Die Navier-Stokes-Gleichungen werden diskretisiert und für ein hinreichend feines Gitter aufgelöst, um die kleinsten auftretenden Wirbel in einer Strömung darstellen zu können. Die dafür benötigte Anzahl von Gitterpunkten übersteigt im allgemeinen die heutige zur Verfügung stehende Rechenleistung [GRIEBEL1995].
- k-ε-Turbulenzmodelle

¹² Die scheinbare Zähigkeit ist ein Maß der Turbulenzstärke.

Für die Modellierung der Reynoldsspannungen werden die turbulente kinetische Energie k und deren Dissipationsrate ε eingeführt. Zur Lösung muß unter anderem die Annahme getroffen werden, daß die turbulente Wirbelviskosität proportional dem Quotienten der quadrierten kinetischen Energie und der Dissipationsrate ist [RODI1978]

- Large-Eddy-Simulation (LES, Grobstruktursimulation)

Diese Simulation ist eine Mischung aus DNS und einem k - ε -Modell und geht von der Annahme aus, daß die Turbulenz im wesentlichen aus großen, energiereichen Wirbeln besteht, die durch das numerische Verfahren berechnet werden können und aus kleinen, energiearmen Wirbeln, die nicht numerisch behandelt werden können, aber modellierbar sind¹³ [BREUER1996].

Eine gute und umfangreiche Zusammenstellung von Turbulenzmodellen finden sich in [RODI1996].

Bestandteil aller Modellierungen turbulenter Strömungen sind, neben den partiellen Differentialgleichungen, auf Grund der in ihnen vorkommenden gekoppelten Glieder, empirische Ansätze, die zu Konstanten führen. Dabei ist die Genauigkeit des Turbulenzmodells abhängig von der Allgemeingültigkeit und von der Anzahl der eingeführten empirischen Konstanten und Funktionen.

2.6 Zusammenfassung

Die Strömungslehre verwendet zur Beschreibung der hydraulischen Probleme die Kontinuumshypothese. Die makroskopische Betrachtung des Strömungsvorganges liefert Flüssigkeitsteilchen, deren Durchmesser größer als der der einzelnen Atome und Moleküle sind und schafft damit die Möglichkeit, Flüssigkeiten und Gase als Kontinua aufzufassen. Die Zustandsgrößen, wie Temperatur, Druck und Geschwindigkeit können nun phänomenologisch beschrieben und auf die Energie- und Entropiegleichung angewendet werden. Die ein Strömungsgebiet kennzeichnenden Gesetze liegen somit als gekoppelte partielle Differentialgleichungen vor. Die wichtigsten Gleichungen sind die Kontinuitäts- und die Impulsgleichungen. Die erste Gleichung beschreibt den Erhalt von Masse und die

¹³ LES verneint, daß turbulente Strömungen einen stochastischen Prozeß darstellen; es werden Strukturen betrachtet, die ein hohes Maß an Ordnung besitzen, großskalig sind und charakteristische Lebensdauern aufweisen.

zweite beschreibt die Bewegung fluider Elemente (Flüssigkeitsteilchen). Viele Strömungsvorgänge werden zwar durch dieses Gleichungssystem beschrieben, sind aber allgemein analytisch nicht lösbar [FLETCHER1991].

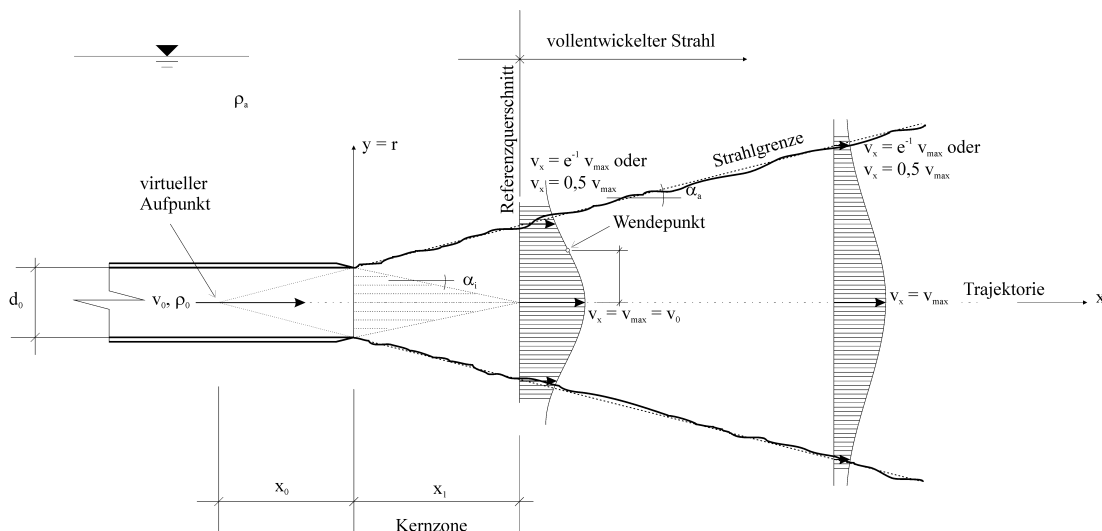
Um trotzdem hydraulische Probleme beschreiben zu können, werden verschiedene Verfahren angewandt (numerische Verfahren, dimensionsanalytische Verfahren, etc.). Grundlage ist jedoch in allen Fällen, daß die nichtlinearen gekoppelten Glieder der partiellen DGL durch empirische Ansätze ersetzt werden.

ruhenden homogenen Umgebung gleichen Fluids

Die phänomenologische Betrachtung eines Strahls liefert folgende Beschreibung: Turbulente Freistrahlen gehören zur Gruppe der freien Turbulenz¹⁴, d.h. am Rand eines Strömungsgebiets rufen die unterschiedlichen Geschwindigkeiten Austauschvorgänge hervor. Es bilden sich Diffusionszonen, deren Breite senkrecht zur Strahltrajektorie mit der Lauflänge des Strahls zunimmt. In dieser Mischungszone werden die am Strahlrand angrenzenden Flüssigkeitsteilchen von den sich ausbildenden Wirbeln erfaßt und beschleunigt. Die Flüssigkeitsteilchen im Strahlinneren werden durch Geschwindigkeitsschwankungen und Wirbel längs und quer zur Strömungsrichtung in Laufrichtung abgebremst. Durch den Zustrom von

¹⁴ Unter freier Turbulenz versteht man Strömungsvorgänge ohne feste Begrenzung.

Flüssigkeitsteilen aus der Umgebung wächst der Volumenstrom mit der Lauflänge des Strahls an und die Geschwindigkeit nimmt ab. Aus zahlreichen Beobachtungen konnte festgestellt werden, daß die Ausbreitung des Strahls in einigem Abstand zur Einleitung, sehr genau proportional zur Entfernung x ist [PRANDTL1993].



Impulsstrahl in einem homogenen Fluid
 $\rho_a = \rho_0$

Abb. 3-2: Skizze eines turbulenten, runden Freistrahls in einem homogenen Umgebungsfluid

Dichteunterschiede zwischen Strahl- und Umgebungsmedium beeinflussen den Strömungsverlauf (aufsteigend oder absteigend) des Strahls. Es können 3 Gruppen unterschieden werden (Dichte des Strahlmediums ρ_0 , Dichte des Umgebungsmediums ρ_a , Nah-/Fernfeld $t_{0/1}$):

Gruppe 1: $\rho_0 = \rho_a$ - auftriebs- oder abtriebsfreie Strahlen

Gruppe 2: $\rho_0 < \rho_a$ - auftriebsbedingter Strahl

$\rho_0 > \rho_a$ - abtriebsbedingter Strahl

Gruppe 3: $\rho_0(t_0) < \rho_a(t_0) \cap \rho_0(t_1) > \rho_a(t_1)$ - intermediärer Strahl

Bei der Darstellung der Gesetzmäßigkeiten zur Erfassung der Strömungscharakteristiken eines turbulenten Freistrahls wird von einer stationären Strömung sowie von homogenen und isothermen Verhältnissen zwischen Strahl und Umgebungsmedium ausgegangen ($\rho_0 = \rho_a$).

Entsprechend den Strömungsbedingungen kann der Freistrahls in zwei Zonen unterteilt werden: Kernzone und Zone des vollentwickelten Strahls (Abb. 3-2). Im Bereich der Kernzonenlänge existiert ein paraboloidförmiger Potentialkern mit der

maximalen Geschwindigkeit v_0 des Geschwindigkeitsprofils unmittelbar am Ort der Einleitung. Die Form und die Länge des Kerns wird durch den inneren Diffusionswinkel α_i , der von der Anfangsturbulenz an der Austrittsstelle und der Form des Austrittsquerschnitts abhängt, bestimmt [KRAATZ1989]. Je nach Autor wird das Ende der Kernzone in Abhängigkeit der dimensionslosen Größe x_1/d_0 bzw. $x_1/A_0^{1/2}$ festgelegt (Tab. 3-1). Für die Berechnung der Länge der Kernzone von fluiden Freistrahlen hat sich die Berechnungsvorschrift nach [KRAATZ1989] durchgesetzt. Am Ende der Kernzonenlänge mit $x = x_1$ bildet sich ein Geschwindigkeitsprofil heraus, das mit allen Geschwindigkeitsprofilen entlang der Strahltrajektorie affin ist.

x_1/d_0	$x_1/\sqrt{A_0}$	
4,7	5,3	[ABROMOVICH1963]
6,2	7,0	[KRAATZ1989]
4,2 – 7,3	4,7 – 8,2	[RAJARATNAM1976]
7	7,9	[WYGNANSKI1969]
4,5		[SPRAWOSCHNIK...]

Tab. 3-1: Dimensionslose Kernzonenlänge für axialsymmetrische Freistrahlen, nach [Freimann1998]

Im weiteren soll nur die Zone des vollentwickelten Strahls¹⁵ betrachtet werden.

3.2 Freistrahlen in einem unbegrenzten homogenen Umgebungsfluid gleicher Stoffeigenschaften

3.2.1 Grundlagen

Gleichung [2-24] zeigte, daß, unter der Annahme konstanten Drucks¹⁶, der Impuls in axialer Richtung einer axialsymmetrischen Strömung konstant ist. Daraus folgt, daß der Impuls unmittelbar an der Einleitung genauso groß wie der Impuls in jedem Querschnitt entlang der Trajektorie sein muß, d.h. der Impuls ist die entscheidende die Strömung charakterisierende Größe. Der Impuls für einen runden Strahl ergibt sich aus der Integration der Gl. [2-24] in den Grenzen von 0 bis r zu

$$I = \rho v_z^2 \int_0^r 2\pi r dr = \rho v_z^2 2\pi \frac{r^2}{2} \Big|_0^r = \rho v_z^2 \pi r^2 = \text{const.} \quad [3-1/1]$$

¹⁵ Die Zone des vollentwickelten Strahls wird auch als Zone der voll ausgebildeten Turbulenz bezeichnet, bzw. diese Zone kann als freie Turbulenz interpretiert werden.

Daraus folgt mit $v_x = v_0$, $r = d_0/2$, wobei d_0 der Durchmesser der Einleitung ist, und $I = I_0$ für den Anfangsimpuls

$$I_0 = \rho v_0^2 \frac{\pi}{4} d_0^2 = \text{const.} \quad [3-1/2]$$

Die Gleichungen [3-1/1] und [3-1/2] besagen, daß der im Strahl beförderte Impulsstrom in allen Querschnitten konstant ist, und zwar gleich dem aus der Düse austretenden Impulsstrom.

Für die vollausgebildete Turbulenz in einiger Entfernung von der Einleitung¹⁷ und unter der Annahme, daß die molekulare Diffusion sowie der Einfluß der Einleitungsgeometrie vernachlässigbar sind, gilt für die Geschwindigkeit v_{\max} entlang der Trajektorie:

$$v_{\max} = f(I_0, \rho, x). \quad [3-2]$$

Darin sind I_0 der Impuls des Strahls am Ort der Einleitung, ρ die Dichte und x die Entfernung vom Einleitungsort.

Für die mathematische Behandlung der Strahl-turbulenz existieren zwei grundlegende empirische Ansätze: Schlichtings Ansatz des Mischungsweges nach Prandtl und Reichardts Theorie, daß das Normalverteilungsgesetz der Beobachtungsfehler auf die Geschwindigkeitsverteilung normal zur Strahltrajektorie anwendbar ist. Es wird im weiteren auf diese zwei Theorien eingegangen.

3.2.2 Theorie nach Schlichting

Probleme der freien Turbulenz, und somit auch der Freistrahlen, können mit Hilfe der Grenzschichttheorie beschrieben werden. Die geringe Ausbreitung normal zur Strahltrajektorie im Vergleich zur Lauflänge eines Strahls und der große Geschwindigkeitsgradienten in Querrichtung sind die charakteristischen Merkmale der Mischungsweghypothese und somit der Grenzschichttheorie.

Bevor die für den Strahl charakteristischen Gleichungen abgeleitet werden, sollen in einem ersten Schritt die Zunahme der Strahlbreite und die Abnahme der Geschwindigkeit entlang der Strahltrajektorie abgeschätzt werden.

¹⁶ Dem Strahl wird ein konstanter Druck des Umgebungsfluids aufgeprägt, d.h. der Druckgradient in

¹⁷ Die vollausgebildete Turbulenz in einem Freistrahle beginnt mit dem Ende der Kernzone, d.h. ab dem Referenzquerschnitt.

Unter der Annahme, daß die Breite der Mischzone (halbe Strahlbreite) mit der Entfernung x zunimmt, hat es sich als zweckmäßig erwiesen, den Mischungsweg l der halben Strahlbreite r proportional zu setzen, daraus folgt:

$$\frac{l}{r} = \text{const.} = C_1. \quad [3-3]$$

Ferner kann angenommen werden, daß die zeitliche Zunahme der halben Strahlbreite proportional der Schwankungsgeschwindigkeit in radialer Richtung ist

$$\frac{Dr}{Dt} \propto v'_r. \quad [3-4]$$

Darin ist D/Dt der substantielle Differentialquotient (siehe Abschnitt 2.2). Nach Abb. 2-2 ist $v'_r \propto l(dv_x/dr)$ und es gilt für die Zunahme der Strahlbreite

$$\frac{Dr}{Dt} \propto l \frac{dv_x}{dr} \quad [3-5]$$

und näherungsweise gilt mit

$$\frac{dv_x}{dr} = C_2 \frac{v_{\max}}{r} \quad [3-6]$$

für Gl. [3-5]

$$\frac{Dr}{Dt} = C_3 \frac{1}{r} v_{\max}. \quad [3-7]$$

Aus der Annahme, daß die halbe Strahlbreite r mit der Entfernung x zunimmt, gilt

$$\frac{Dr}{Dt} \propto v_{\max} \frac{dr}{dx} \quad [3-8]$$

und mit Gl. [3-7]

$$\frac{dr}{dx} = C_4 \frac{1}{r} = \text{const.} \quad [3-9]$$

somit ist

$$r = C_5 x. \quad [3-10]$$

Bei Freistrahlen nimmt also die halbe Strahlbreite proportional mit der Lauflänge x des Strahles zu.

Die Beziehung zwischen v_{\max} und x erhält man aus der Gl. [3-1/1], es muß gelten

$$I = C_6 \rho v_{\max}^2 r^2 \quad [3-11]$$

und daraus folgend

$$v_{\max} = C_6 \frac{1}{r} \sqrt{\frac{I}{\rho}}. \quad [3-12]$$

Wird für I/ρ der kinematische Impuls K , der für die gesamte Lauflänge des Strahls konstant ist, eingeführt, so ist die Abnahme der Zentralgeschwindigkeit des Strahls allein von der Entfernung von dem Ort der Einleitung abhängig und es gilt mit Gl. [3-10]:

$$v_{\max} = C_6 \frac{1}{x} \sqrt{K}. \quad [3-13]$$

Die Kennzahlen C_i ($i = 1 \dots 6$) sind empirische Konstanten.

Die Potenzgesetze für die Breitenzunahme und die Geschwindigkeitszunahme mit dem Abstand x vom Ort der Einleitung lassen sich nun für den runden turbulenten Freistrahler wie folgt anschreiben:

$$r \propto x \quad [3-10/1]$$

$$v_{\max} \propto x^{-1}. \quad [3-13/1]$$

Im Sinne der Grenzschichttheorie wird nun die Bewegungsgleichung nur in x -Richtung berücksichtigt und der Druck als konstant angenommen. Aus der differentiellen Bewegungsgleichung, dem Impulserhaltungssatz und den oben angeführten Überlegungen entwickelte Schlichting, ähnlich dem laminaren Strahl [SCHLICHTING1933] [SCHLICHTING1965], die Gleichung für die Geschwindigkeit v_x in axialer Richtung für einen runden turbulenten Strahl:

$$v_x = \frac{3}{8} \frac{1}{\pi \varepsilon_0 x} \frac{K}{[1 + \eta^2/4]^2} \quad [3-14]$$

$$\text{mit } \eta = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{\sqrt{K}}{\varepsilon_0} \frac{r}{x}.$$

Darin ist K der kinematische Impuls, ε_0 die scheinbare kinematische Zähigkeit, x der Abstand von der Quelle entlang der Trajektorie und r der Abstand normal zur Trajektorie.

Der Druckgradient dp/dx kann vernachlässigt werden, da konstanter Druck im Umgebungsmedium auf den Strahl wirkt. Wegen konstantem Druck muß der gesamte Impuls in r -Richtung unabhängig von r sein:

$$K = \frac{I}{\rho} = 2\pi \int_{r_1=0}^{r_2 \rightarrow \infty} v_x^2 r dr = \text{const.} \quad [3-15]$$

Die Integration der Gleichung [3-15] in den Grenzen $r_1 = 0$ und $r_2 = d/2$ und der Berücksichtigung der Kontinuitätsgleichung mit

$$Q = v_x A = v_0 A_0 = v_0 \frac{\pi}{4} d_0^2 \quad [3-16]$$

für einen runden Freistrahл führt zu

$$K = \frac{\pi}{4} d_0^2 v_0^2 = \text{const.} \quad [3-17]$$

Darin ist d_0 der Durchmesser an der Einleitung und v_0 die Anfangsgeschwindigkeit am Ort der Einleitung. Das führt mit der empirischen Konstante $\varepsilon_0/\sqrt{K} = 0,0161$ und der von Reichardt ermittelten halben Strahlbreite von $r_{0,5} = 0,0848x$ [SCHLICHTING1965] zu der Gleichung

$$v_x = 6,57 \cdot \frac{d_0}{x} \cdot v_0 \cdot \left[1 + 0,4139 \left(\frac{r}{r_{0,5}} \right)^2 \right]^{-2} \quad [3-18]$$

mit $r = 0$. Daraus folgt für $v_x = v_{\max}$ die dimensionslose Geschwindigkeitsverteilung entlang der Strahltrajektorie

$$\frac{v_{\max}}{v_0} = \frac{6,57}{x/d_0} \quad [3-19]$$

und senkrecht zur Trajektorie

$$\frac{v_x}{v_{\max}} = \left[1 + 0,4139 \left(r/r_{0,5} \right)^2 \right]^{-2}. \quad [3-20]$$

Der Durchfluß Q im Abstand x von der Einleitung ist dann

$$Q_x = 0,404 \sqrt{K} x = 0,404 \sqrt{\frac{\pi}{4}} d_0 v_0 x. \quad [3-21/1]$$

und mit Gl. [3-16]

$$\frac{Q_x}{Q_0} = 0,404 \frac{1}{\sqrt{\pi/4}} \frac{x}{d_0} = 0,456 \frac{x}{d_0}. \quad [3-21/2]$$

Die vorstehenden Gleichungen beruhen auf der turbulenztheoretischen Betrachtung von Geschwindigkeitsfeldern. Eine weitere Beschreibung eines Freistrahls ist über einen induktiven turbulenztheoretischen Ansatz möglich [REICHARDT1951] [SCHLICHTING1965].

3.2.3 Theorie nach Reichardt

Bei der Auswertung umfangreicher Messungen in Strömungsfeldern der freien Turbulenz stellte Reichardt fest, daß sich die affinen Geschwindigkeitsprofile außerhalb der Kernzone mit der Exponentialfunktion beschreiben lassen. Grundlage war die Erkenntnis von Reichardt, daß die turbulenten Ausbreitungsvorgänge große

Ähnlichkeit mit den molekularen Vorgängen des Konzentrationsausgleiches oder der Wärmeleitung haben. Zum Beispiel ist die turbulente Impulsausbreitung eines Freistrahles mit wachsender Entfernung von seinem Ursprung vergleichbar mit der molekularen Temperatursausbreitung einer Wärmemenge mit wachsendem Zeitabstand von ihrer ursprünglichen singulären Verteilung. Reichardt stellt fest, daß in Anlehnung an die Theorie der Wärmeleitung, die Gaußsche Fehlerfunktion zur Beschreibung der dimensionslosen Geschwindigkeitsverteilung in Freistrahlen herangezogen werden kann. Aus seinen eigenen Versuchsergebnissen und denen anderer Wissenschaftler (Förthmann, Liepmann und Laufer) stellt er die Gleichungen für die Verteilung der Geschwindigkeit bzw. des Impulstransportes auf [REICHARDT1951].

Aufbauend auf den Ergebnissen von Reichardt wurden die Gleichungen für die Geschwindigkeitsverteilung entlang und normal zur Strahltrajektorie und die dazugehörigen Gleichungen zur Beschreibung der Transportkapazität von Freistrahlen weiterentwickelt [ABRAHAM1963, LIST/B1982, KRAATZ1989]. List und Kraatz werteten unabhängig voneinander umfangreiche Messungen verschiedener Autoren aus und ermittelte die Koeffizienten für die folgenden Gleichungen (Abb. 3-3).

Die dimensionslose Geschwindigkeitsverteilung normal zur Trajektorie ist

$$\frac{v_x}{v_{\max}} = e^{-0,5\left(\frac{r}{Cx}\right)^2} . \quad [3-22]$$

Darin ist v_{\max} die Geschwindigkeit auf der Strahltrajektorie, r der orthogonale Abstand zur Trajektorie, x der Abstand von der Einleitung und C eine experimentell zu ermittelnde Konstante. Wird die charakteristische Strahlausbreitung nicht auf den Wendepunkt, sondern auf den Abstand bezogen, bei dem die Geschwindigkeit v_x gerade halb so groß wie die Geschwindigkeit auf der Trajektorie v_{\max} ist, dann gilt mit $r_{0,5}$ als orthogonaler Abstand von der Trajektorie für die Gl. [3-22]:

$$\frac{v_x}{v_{\max}} = e^{\ln 0,5\left(\frac{r}{r_{0,5}}\right)^2} . \quad [3-23]$$

Eine weitere Begrenzung der charakteristischen Strahlausbreitung ist vorrangig in der angelsächsischen Literatur mit e^{-1} angegeben [LIST1982]. Dann kann für die Gl. [3-22] die dimensionslose Geschwindigkeitsverteilung geschrieben werden:

runden turbulenten Freistrahle nach [Kraatz1989]

Die Abnahme der Zentralgeschwindigkeit mit $A_0 = \frac{\pi}{4} d_0^2$ lautet:

$$\frac{v_{\max}}{v_0} = 7 \frac{\sqrt{A_0}}{x} = \frac{6,2}{x/d_0}. \quad [3-25]$$

3.2.4 Weiter Formeln zur Charakterisierung von axialsymmetrischen Freistrahlen

Die Abnahme der Geschwindigkeit auf der Strahlachse kann auch wie folgt bestimmt werden:

nach [ABRAMOVICH1963]

$$\frac{v_{\max}}{v_0} = \frac{5,35}{1,03 + \frac{x}{d_0}}, \quad [3-26]$$

nach [CUGAEV1975]

$$\frac{v_{\max}}{v_0} = \frac{0,96}{0,29 + \frac{0,08x}{d_0/2}}, \quad [3-27]$$

und nach [SPRAVOCNIK1982]

$$\frac{v_{\max}}{v_0} = 10,7 \frac{d_0/2}{x + 2,06 d_0/2}. \quad [3-28]$$

Die dimensionslose Geschwindigkeitsverteilung senkrecht zur Strahlachse kann berechnet werden:

nach [VOITKUNSKI1982]

$$\frac{v_x}{v_{\max}} = 1 - 6\eta^2 + 8\eta^3 - 3\eta^4 \quad [3-29]$$

$$\text{mit } \eta = 0,385 \frac{r}{r_{0,5}},$$

und nach [SPRAVOCNIK1982]

$$\frac{v_x}{v_{\max}} = 1 - 3\eta^2 + 3\eta^3 \quad [3-30]$$

$$\text{mit } \eta = \frac{r}{0,22(x + 1,03d_0)}.$$

Einen Vergleich der verschiedenen Berechnungsweisen für die dimensionslose Geschwindigkeitsverteilung quer zur Strahltrajektorie und der dimensionslosen Verteilung der Geschwindigkeit entlang der Trajektorie zeigen die Abbildungen 3-4 und 3-5.

3.2.5 Konzentrationsverteilung eines Tracers in Freistrahlen

Entsprechend der Prandtlschen Theorie ist die Geschwindigkeit eines Flüssigkeitsteilchens eine mit ihm für die Zeitdauer seiner Existenz festverbundenen Eigenschaft [Ruden1933]. Daraus folgt, daß jede andere diesem Element anhaftende Eigenschaft, wie Farbe oder Temperatur, die gleiche Verteilung wie die Geschwindigkeitsverteilung aufweist. Dem ist nicht so. In einer turbulenten Strömung kollidieren die feinverteilten Tracerpartikel und beeinflussen so den ihnen aufgeprägten Impuls, wobei ihre Identität erhalten bleibt. So sind die Unterschiede bezüglich der gemittelten Konzentration zwischen zwei Punkten weniger als die entsprechenden Unterschiede bezüglich des Impulses der Flüssigkeitsteilchens [Abraham1963].

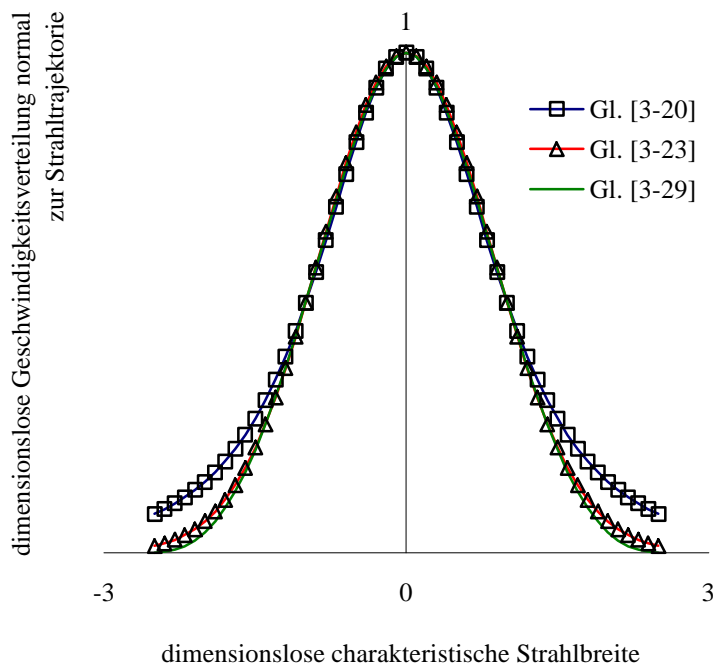


Abb. 3-4: Dimensionslose Verteilung der Geschwindigkeit normal zur Trajektorie eines fluiden Strahles in einem homogenen Wasserkörper gleicher Dichte

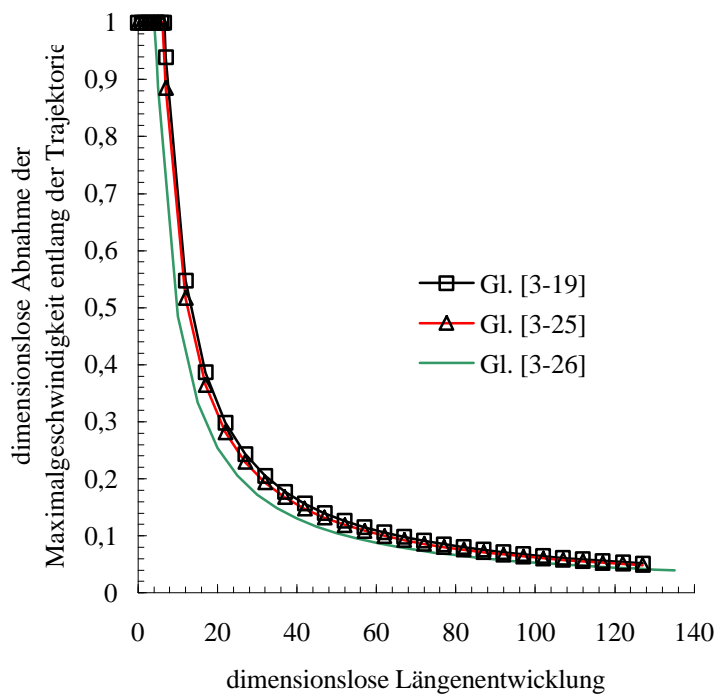


Abb. 3-5: Dimensionslose Abnahme der Maximalgeschwindigkeit mit der Lauflänge eines fluiden Strahles in einem homogenen Wasserkörper gleicher Dichte

Für die dimensionslose Geschwindigkeitsverteilung in allgemeiner Schreibweise nach der Theorie von Reichardt gilt:

$$\frac{v_x}{v_{\max}} = e^{-k(t/t_{0,5})^2} \quad [3-31]$$

Darin ist k eine empirisch zu ermittelnde Konstante (siehe vorangegangene Gleichungen). Die dimensionslose Konzentrationsverteilung eines konservativen Tracers normal zur Trajektorie ergibt sich nach [Abraham1963] in ähnlicher Weise. Es gilt:

$$\frac{c_x}{c_{\max}} = e^{-\lambda k(t/t_{0,5})^2}, \quad [3-32]$$

wobei λ eine andere, das Konzentrationsprofil kennzeichnende empirische Konstante ist. Aus der Betrachtung der Impulsverhältnisse für ein Tracerpartikel und ein Flüssigkeitsteilchen muß dann gelten: $\lambda < 1$.

Die Veränderung der Konzentration eines Tracers in einem Impulsstrahl wird hauptsächlich von der Einmischrate beeinflusst. Nach Taylor ist die Einmischrate proportional dem Produkt aus der Geschwindigkeit auf der Trajektorie und der charakteristischen Breite [LIST/A1983]. Es gilt dann

$$\frac{Q_e}{Q_0} = 0,25 \frac{x}{\sqrt{A_0}} = 0,282 \frac{x}{d_0} \quad [3-33]$$

sowie nach [SPRAVOCNIK1982]

$$\frac{Q_e}{Q_0} = 0,155 \frac{x}{d_0/2} = 0,310 \frac{x}{d_0} \quad [3-34]$$

und nach [TRUCKENBRODT1992]

$$\frac{Q_e}{Q_0} = 0,456 \frac{x}{d_0} \quad [3-35]$$

Wie oben beschrieben, hat die Konzentrationsverteilung eines Tracers im Freistrahls orthogonal zur Trajektorie ein ähnliches Profil wie die zugehörige Geschwindigkeitsverteilung. Das Verhältnis zwischen der charakteristischen Breite und dem Abstand vom Ort der Einleitung beträgt 0,126 mit einer Genauigkeit von 0,004 [LIST1982]. Die dimensionslose Gleichung der Konzentrationsverteilung lautet dann:

$$\frac{c}{c_{\max}} = e^{-\left(\frac{r}{0,126x}\right)^2} \quad [3-36]$$

Die Breite des Turbulenzgebietes ist nicht exakt bestimmbar. Deshalb ist es üblich, die Ausbreitung durch die charakteristische Breite $r = r_{0,5}$ zu kennzeichnen, bei der

$v_x = 0,5v_{\max}$ ist. Nach Kraatz liegt α_a zwischen 12° und 14° . Mit einem mittleren Winkel von 14° ist die Strahlbreite d_x im Abstand x von der Einleitstelle dann

$$d_x = d_0 + 0,5x. \quad [3-41]$$

In Tabelle 3-2 ist eine Übersicht verschiedener Autoren für den äußeren Diffusionswinkel α_a angegeben. Dieser Winkel wird im folgenden auch als Ausbreitungswinkel bezeichnet.

α_a	
10°	[ECK1961]
15°	[CUGAEV1975]
$12^\circ 30'$	[SERGEL1981]
12°	[SPRAVOCNIK1982]

Tab. 3-2: Ausbreitungswinkel α_a nach verschiedenen Autoren

Weitere Relationen zur Beschreibung von axialsymmetrischen Freistrahlen in einem homogenen Wasserkörper finden sich in [Rajaratnam1976] [Wieghardt1965] [Rotta1971] etc.

3.3 Freistrahlen in einem unbegrenzten, stratifizierten Umgebungsfluid

Wenn Wasser am Ende eines Rohres in ein Umgebungsfluid anderer Dichte austritt, so ist dieser freie Wasserstrahl unmittelbar nach dem Austritt aus der Öffnung einer Auftriebskraft unterworfen ($\rho_0 < \rho_a$), welche der Differenz der Dichte zwischen dem austretenden Wasser und dem Umgebungsmedium proportional ist ($F_{\text{Auftrieb}} \propto \Delta\rho$). Neben seiner kinetischen Energie beeinflussen auch das Potential der Auftriebskräfte den Zustand der Strahldiffusion und den Verlauf der Strahlbahn. Diese Energien werden durch den Mechanismus der freien Turbulenz des Strahls mit der umgebenden Flüssigkeit dissipiert. Diese Dissipation bewirkt eine Ausweitung in die umgebende Flüssigkeit und eine Vermischung mit der umgebenden Flüssigkeit, eine Verlangsamung der mittleren Strahlgeschwindigkeit und eine relative Abnahme der Dichteunterschiede zwischen Strahlflüssigkeit und umgebender Flüssigkeit. Die Strahlmasse ist entlang der Strahlachse nicht konstant. Der Strahl schichtet sich in die Höhe ein, wo seine Auftriebsgeschwindigkeit verschwindet. Aufgabe ist die Ermittlung der sich stetig verändernden Konzentrations-, Dichte- und Temperaturprofile infolge turbulenter Diffusion

Ein vertikaler nach oben gerichteter turbulenter Freistrah mit einer Dichte, die kleiner ist als die Dichte des Umgebungsfluides¹⁸ an der Einleitungsstelle, mischt das dichtere Umgebungsfluid in den Strahl ein. Diese Flüssigkeitsmenge induziert in den Strahl einen negativen Auftrieb, welcher den Impuls des Strahles abbaut. Ist der Impulsstrom vollständig abgebaut, dann breitet sich der Strahl horizontal aus. Das setzt voraus, daß eine Bewegung des Strahls einzig aus der Differenz der Umgebungsichte und der Strahldichte resultiert.

In welcher Form ein Strahl vorliegt, ob Auftriebsstrahl oder Impulsstrahl kann mit Hilfe der Richardson-Zahl Ri_0 für die Anfangsbedingungen bestimmt werden [PAPANICOLAOU1988]:

$$Ri_0 = \frac{Q_0 \sqrt{B}}{\sqrt[4]{K_0^5}} \quad [3-42]$$

Darin sind Q_0 der Durchfluß an der Einleitung, B der Auftrieb mit $B = g \Delta\rho / \rho_a Q_0$ und K_0 der kinematische Impuls mit $K_0 = Q_0 v_0$. Ist Ri_0 sehr klein, dann liegt ein reiner Impulsstrahl vor, im entgegengesetzten Fall ein reiner Auftriebsstrahl.

Für einen turbulente Freistrahlen unter Dichteeinfluß und einer charakteristischen Strahlausbreitung nach [3-24] gelten nach [LIST/A1982] folgende Gleichungen für die Einschichthöhe h :

$$h = 3,8 \left(\frac{B}{N^3} \right)^{1/4}, \quad [3-43]$$

wenn der Koeffizient $\frac{I_0 N}{B} < 1$ ist und

$$h = 3,8 \left(\frac{B}{N^2} \right)^{1/4}, \quad [3-44]$$

wenn $\frac{K_0 N}{B} > 1$. Im ersten Fall handelt es sich um einen Strahl mit ausgeprägtem Auftrieb und im zweiten Fall dominiert der Impuls. Die Brunt-Väisälä-Frequenz¹⁹ N repräsentiert die Stärke der Stratifizierung eines Wasserkörpers:

$$N^2 = -\frac{g}{\rho} \frac{d\rho_a}{dz} \quad [3-45]$$

¹⁸ Es soll eine lineare Dichteschichtung vorausgesetzt werden.

¹⁹ Im Anhang wurde die Brunt-Väisälä-Frequenz über die Tiefe, am Beispiel des Schmalen Luzin / Carwitzer Becken aufgetragen.

d.h. wird ein infinitesimales Flüssigkeitsvolumen in einem linear stratifizierten Wasserkörper nach unten oder nach oben bewegt, so ist es im ersten Fall leichter und im zweiten Fall schwerer als seine fluide Umgebung, und eine Kraft resultierend aus der Dichtedifferenz versucht dieses Element in die Ausgangslage zurückzubringen. Die Größe der Kraft ändert sich mit dem Abstand des fluiden Elements von seinem Ursprung. Wird vorausgesetzt, daß auf dieses Volumenelement keine Viskosität wirkt, würde dieses Teilchen eine harmonische Pendelbewegung um seine Ursprungslage ausführen. Das Quadrat der Brunt-Väisälä-Frequenz gibt für stehende Gewässer die Stabilität der Schichtung an [HUTTER1995], es gilt:

$$N^2 \geq 0 \rightarrow \text{stabile Schichtung}$$

$$N^2 < 0 \rightarrow \text{instabile Schichtung}$$

Die numerische Lösung und deren graphische Darstellung von horizontal eingeleiteten Strahlen in eine linear stratifizierten fluiden Umgebung finden sich in [Vischer1976] entsprechend der Auswertung nach Fan und Brooks. Auch hier wird wieder die Annahme getroffen, daß die Geschwindigkeitsprofile im Strahl zueinander ähnlich sind und der Gaußschen Glockenkurve entsprechen. Ebenso sind die Dichte- und Konzentrationsprofile aufgebaut.

Grundlage ist, daß in einem stratifizierten Wasserkörper mit der Dichte²⁰ ρ_a die Wegentwicklung der Trajektorie von der Dichtedifferenz zwischen Strahl und Umgebungsfluid abhängt, des weiteren von der Erdbeschleunigung g , dem Durchmesser der Einleitung d_0 und der Strahlgeschwindigkeit \bar{v}_0 an der Einleitung.

Die densimetrische Froude-Zahl beschreibt diesen Vorgang:

$$Fr_{\Delta} = \frac{v_0}{\sqrt{\left| \frac{\rho_a - \rho_0}{\rho_a} \right| g d_0}} \quad [3-46]$$

Die Grenzwertbetrachtung der Froude-Zahl führt zur Beschreibung der Dichteunterschiede zwischen Strahl und Umgebungsfluid mittels:

$$Fr_{\Delta} = \infty \Rightarrow \rho_a - \rho_0 = 0,$$

$$0 < Fr_{\Delta} < \infty \Rightarrow \rho_a - \rho_0 \neq 0 \text{ und}$$

$$Fr_{\Delta} \approx 0 \Rightarrow \rho_0 \gg \rho_a \cup \rho_0 \ll \rho_a.$$

²⁰ Das ist die Dichte des Seewassers auf der Höhe der Einleitung.

Ein weiterer Parameter ist die Stratifizierungszahl T . Sie ist ein Maß für die Stabilität der Dichteschichtung:

$$T = \frac{\rho_0 - \rho_a}{-\frac{d\rho}{dz}d_0} . \quad [3-47]$$

Darin ist $d\rho/dz$ der Dichtegradient im, den Freistrahл umgebendem Wasser. Die Beschreibung der Strahlparameter erfolgt mit Hilfe der Kenngrößen p_0 , m_0 und q_0 , die in Diagrammen ausgewertet wurden, und mit den Hilfwerten η_B , ξ_B und q_2 Aussagen über die Einschichthöhe, die Strahlänge, die Strahldicke und das

$$p_0 = 1,37^4 \sqrt[4]{Fr_\Delta} \sqrt[8]{T^3} , \quad [3-48]$$

$$m_0 = 0,324 \frac{Fr_\Delta^2}{T} , \quad [3-49]$$

$$q_0 = 2,38 \frac{\sqrt[4]{Fr_\Delta}}{\sqrt[8]{T^5}} . \quad [3-50]$$

Entsprechend der Verwendung der Diagramm nach [Vischer1976] (Abb. A-1 bis A-3 im Anhang) unter Zuhilfenahme der Bezeichner in Abb. 3-7 ergeben sich für die Einmischtiefe

$$h_B = p_0 d_0 \eta_B , \quad [3-51]$$

für die Strahlänge

$$l_B = p_0 d_0 \xi_B , \quad [3-52]$$

für die Strahldicke

$$d_2 = 0,464 p_0 d_0 \frac{1}{\sqrt[4]{m_0}} q_2 \quad [3-53]$$

und für das Mischverhältnis

$$\frac{Q_2}{Q_0} = 2 \frac{q_2}{q_0} . \quad [3-54]$$

Der Term q_2/q_0 entspricht dabei der Verdünnung auf der Strahltrajektorie und das

Q_2/Q_0 der gesamten Verdünnung über den Querschnitt.

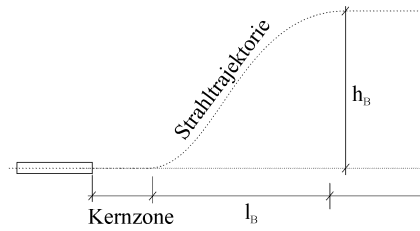


Abb. 3-7: Bezeichner der Strahltrajektorie nach [Vischer1976]

Eine geschlossene Gleichung für die Entwicklung der Trajektorie gibt Abraham und Anwar für suspendierte Stoffe im Strahl mit der Vertikalkoordinate h an [KRAATZ1989]:

$$\frac{h}{d_0 Fr_\Delta} = 0,0616 \left(\frac{x}{d_0 Fr_\Delta} \right)^{2,95} \quad [3-55/1]$$

Die zugehörige Abnahme der Maximalgeschwindigkeit auf der Strahltrajektorie, mit der tatsächliche Lauflänge s , beträgt:

$$\frac{v_{\max}}{v_0} = \frac{45,66}{(s/d_0)^{1,47}} \quad [3-55/2]$$

gültig für $s/d_0 \geq 13,46$.

Die Auswertung der Experimente für einen axialsymmetrischen, vertikalen turbulenten Freistrah, der mit einem Rhodamine G6 als Tracer versetzt wurde, ist umfangreich in [Papanicolaou1988] dargestellt. Es gilt mit den Gl. [3-16] und [3-42] und dem Auftrieb B :

$$B = g \cdot (\Delta\rho)_0 / \rho_a \cdot Q_0 \quad [3-56]$$

für $x/l_M < 1$ (Impulsstrahl) mit dem Längenmaßstab $l_M = K^{3/4} \cdot B^{-1/2}$:

$$\frac{v_0}{v_{\max}} = 0,149 \cdot \left(\frac{x}{d_0} + 2,56 \right) \quad [3-57]$$

mit der Fließgeschwindigkeit auf der Strahltrajektorie v_{\max} und dem Durchmesser der Einleitung d_0 ,

$$\frac{b_e}{d_0} = 0,104 \cdot \left(\frac{x}{d_0} + 2,58 \right) \quad [3-58]$$

mit der charakteristischen Strahlbreite b_e für $v_x = e^{-1} \cdot v_{\max}$ und

$$\frac{b_c}{d_0} = 0,139 \cdot \left(\frac{x}{d_0} - 2,51 \right) \quad [3-59]$$

mit der charakteristischen Strahlbreite für das Konzentrationsprofil b_c entsprechend $c_x = e^{-1} \cdot c_{\max}$. Für einen auftriebsbehafteten Impulsstrahl ist die charakteristische Strahlbreite b_e gegeben mit:

$$\frac{b_e}{l_M} = 0,0108 \cdot (x/l_M)^{0,995} \quad [3-60]$$

und die charakteristische Strahlbreite des Konzentrationsprofils b_c durch

$$\frac{b_c}{l_M} = 0,129 \cdot (x/l_M)^{0,994} . \quad [3-61]$$

Die dimensionslose Konzentrationsverteilung im Abstand x von der Einleitung und dem orthogonalen Abstand von der Strahltrajektorie r für den reinen Impulsstrahl ist

$$\frac{c_x}{c_{\max}} = e^{-52 \cdot (r/x)^2} \quad [3-62]$$

und für den reinen Auftriebsstrahl

$$\frac{c_x}{c_{\max}} = e^{-80 \cdot (r/x)^2} . \quad [3-63]$$

Nach [Papanicolaou1988] kann für den auftriebsbehafteten Impulsstrahl die dimensionslose Konzentrationsverteilung entsprechend obigen Gleichungen näherungsweise berechnet werden. Die Einmischrate Q_x ist durch Gleichung [3-64] gegeben:

$$\frac{Q_x}{Q_0} = 0,284 \cdot \left(\frac{x}{d_0} + 3,3 \right) . \quad [3-64]$$

Entsprechend der Dimensionsanalyse nach [Fischer1979] sind für einen Impulsstrahl gegeben:

$$\frac{I^{1/2}}{x \cdot v_{\max}} = 0,132 , \quad [3-65]$$

$$\frac{S \cdot Q_0}{x \cdot I^{1/2}} = 0,147 \quad [3-66]$$

$$\text{mit } S = c_0 / c_{\max}$$

und für einen Auftriebsstrahl

$$\frac{I^{1/2}}{x v_{\max}} = 0,260 \left(\frac{x}{l_M} \right)^{-2/3} , \quad [3-67]$$

$$\frac{S Q_0}{x I^{1/2}} = 0,070 \left(\frac{x}{l_M} \right)^{2/3} . \quad [3-68]$$

Für den auftriebsbehafteten Strahl ist der Übergang zwischen $1 < \frac{z}{l_M} < 5$ zu approximieren.

3.4 Schichtenströmung in einem stratifizierten Umgebungsfluid

Hat der Strahl aufgrund Anfangsimpuls und Auftrieb seine maximale Steighöhe erreicht, so breitet er sich im weiteren in horizontaler Richtung aus. Dabei hat der Strahl in seiner gesamten Lauflänge Fluid eingemischt und an Geschwindigkeit verloren. Nimmt die Geschwindigkeit nun weiter ab, so tritt irgendwann ein Zustand ein, bei dem der turbulente Austausch zwischen Strahl und Umgebungsmedium aufhört. Ist dieser Punkt erreicht, d.h. der Punkt wo kein vertikaler Massentransport stattfindet, dann bleibt die Höhe der Schicht konstant, und man spricht von einer Schichtenströmung. Die diesen Punkt beschreibende dimensionslose Kennzahl ist die Richardson-Zahl.

$$Ri = \frac{g \, dp/dz}{\rho (dv/dz)^2} \quad [3-69]$$

Darin sind dp/dz der vertikale Dichtegradient und dv/dz der vertikale Geschwindigkeitsgradient.

Soll ein Turbulenzballen aus der unteren Schicht (Strahl ρ_0) in die obere Schicht (Metalimnion ρ_a) gegen die Schwerkraft gehoben werden, so muß eine vom Dichteunterschied ($\rho_0 \neq \rho_a$) abhängige Arbeit verrichtet werden. Die dafür erforderliche Energie kommt aus der turbulenten Schwankungsbewegung, die proportional dem Quadrat des Geschwindigkeitsgradienten ist.

Aus Versuchen wurde ermittelt, daß der Austausch zwischen den Schichten zum Erliegen kommt, wenn die Richardson-Zahl größer als $1/24$. Der Strahl breitet sich ab diesen Punkt als Schichtenströmung aus [Kranawettreiser1989].

Die maximale Ausbreitungsgeschwindigkeit zweier übereinanderliegender Wasserkörper unterschiedlicher Dichte (Dichtesprung), läßt sich aus der Betrachtung der Impuls- und Druckverhältnisse in diesen Schichten herleiten [Kranawettreiser1989]:

$$v_{\max} = 0,866 \sqrt{g \frac{\Delta\rho}{\rho} h_1} \quad [3-70/1]$$

mit $\Delta\rho$ dem Dichteunterschied zwischen zwei Schichten, ρ die Dichte der Referenzschicht und h_1 die Dicke der Gesamtwassertiefe. Für die Anwendung in

einem Wasserkörper mit linearer Dichteverteilung muß Gl. [3-70/1] mit dem vertikalen Dichtegradient dp/dh erweitert werden:

$$v_{\max} = 0,866 \sqrt{g \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dh} h_2} \quad [3-70/2]$$

Darin ist h_2 der Abstand zwischen Wasserspiegel und Mittelpunkt der betrachteten Schicht. Gleichung [3-70/1] wurde durch Untersuchungen in der Talsperre Bleiloch bestätigt [KRANAWETTREISER1999].

Wird nun die Richardson-Zahl entsprechend der Gl. [3-70] in globale Parameter überführt, dann lautet sie:

$$Ri = \frac{g \Delta\rho / \rho h}{v^2} \quad [3-71]$$

was dem Quadrat der reziproken densimetrischen Froude-Zahl entspricht. Die Dicke der Schicht für den ebenen Fall ist nach [GELHAR1966]:

$$h = 6,84 \sqrt[4]{\frac{q x v}{g \frac{\Delta\rho}{\rho}}} \quad [3-72/1]$$

mit $\Delta\rho$ als Dichtedifferenz zwischen der oberen und unteren Begrenzung der Schicht und q als spezifischer Durchfluß. Die Erweiterung der Gl. [3-72/1] für die Anwendung auf radiale Abströmungen zeigt Gl. [3-72/2] [KRANAWETTREISER1999]:

$$h = 6,84 \sqrt[4]{\frac{\frac{Q}{2\pi} v}{g \frac{d\rho}{dh} \rho h}} \quad [3-72/2]$$

Die Erweiterung der Gl. [3-72/1] für den ebenen Fall auf den dreidimensionalen (radialen) Fall erfolgt entsprechend der Ableitung von Dichteströmungen ähnlicher Problematik nach [KRANENBURG1977].

Damit läßt sich die Strömung ab dem Einschichtpunkt hinsichtlich der Geschwindigkeit und der Dicke der Schicht beschreiben.

3.5 Zusammenfassung

Turbulente axialsymmetrische Freistrahlen gehören zur Gruppe der freien Turbulenzen. Freistrahlen sind dadurch gekennzeichnet, daß die dimensionslose

Geschwindigkeitsverteilung normal zur Strahltrajektorie unter anderem durch die Gaussche Glockenkurve beschrieben werden kann²¹.

Unterschieden werden die Strahlen je nach Dichteverhältnissen im Umgebungsmedium im Verhältnis zur Strahldichte selbst, in reine Impulsstrahlen, in reine Auftriebsstrahlen und in auftriebsbehaftete Impulsstrahlen bzw. in impulsbehaftete Auftriebsstrahlen. Die Temperatur bzw. die Konzentration vom mitgeführten Tracer werden als passive Strömungsbeimengungen aufgefaßt. Damit sind sie ebenfalls in ihrer dimensionslosen Verteilung quer zur Strahlachse mit der Gaußschen Glockenkurve beschreibbar. Bei der Einleitung von fluiden Strahlen in Wasserkörper andere Dichte wird die Strahltrajektorie in Abhängigkeit des Strahlimpulses und des Auftriebes abgelenkt. Die maximale Steighöhe des Strahles stellt den Einschichtpunkt dar. Im weiteren breitet sich der Strahl aus bis die Eigenschaften des Strahles aufhören zu existieren (kleine Geschwindigkeit) oder räumliche Grenzen erreicht werden (Seeboden, Wasseroberfläche, Metalimnion, etc.). Ist dieser Zustand erreicht, muß die Strömung als Schichtenströmung aufgefaßt werden.

²¹ Unter der Voraussetzung, daß der Impuls entlang der Lauflänge des Strahls konstant ist.

4 Interpretation der Freistrahlen als einer Folge von Wirbelringen

4.1 Einleitung

In den vorangegangenen Kapiteln wurde gezeigt, daß die Navier-Stokesschen Gleichungen als auch die daraus abgeleiteten Gleichungen zur Beschreibung von axialsymmetrischen Freistrahlen mit Hilfe der Theorien nach Schlichting und nach Reichardt auf stochastische Betrachtungen der turbulenten Prozesse in einer Strömung aufbauen. Das wichtigste Merkmal dieser Geschwindigkeitsprofile ist die Affinität der Profile untereinander entlang der Strahltrajektorie außerhalb der

Dabei wurden die den Strahl kennzeichnenden Profile aus Versuchen ermittelt und mit entsprechenden Analogien (Reichardt) theoretisch begründet.

Da es sich um stochastische Prozesse handelt, können mit einem gewissen Fehler auch andere Profilformen zur Beschreibung von Freistrahlen herangezogen werden. Bedingung ist, daß diese Profile, wie oben beschrieben, einander ähnlich sein müssen. Im folgenden soll eine lineare, von der Form her eine dreiecksförmige dimensionslosen Geschwindigkeitsverteilung normal zur Strahltrajektorie angenommen werden (Abb. 4-1). Des weiteren wird der lineare Geschwindigkeitsgradient als eine Geschwindigkeitsverteilung aufgefasst, die einem Wirbelring entspricht, bei dem der Wirbelfadendurchmesser gleich dem Wirbelringdurchmessers und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit doppelt so groß wie die Umfangsgeschwindigkeit ist (Abb. 4-3). Dem Verfasser ist bewußt, daß mit dieser Annahme ein Fehler eingeführt wird, der aber aufgrund der schwierigen analytischen Behandlung der turbulenten Vorgänge und der im besonderen Fall recht ungenauen Messungen zur Beschreibung der turbulenten Vorgänge, in erster Näherung vernachlässigt werden darf. Grundlage zur Überprüfung des Ansatzes sind im weiteren die Berechnungsvorschriften für den runden, turbulenten Freistrahle nach [Kraatz1989]. Zur Begrenzung des linearen Geschwindigkeitsprofils soll die Tangente in den Wendepunkt der Kurve nach Kraatz gelegt werden (siehe Anhang).

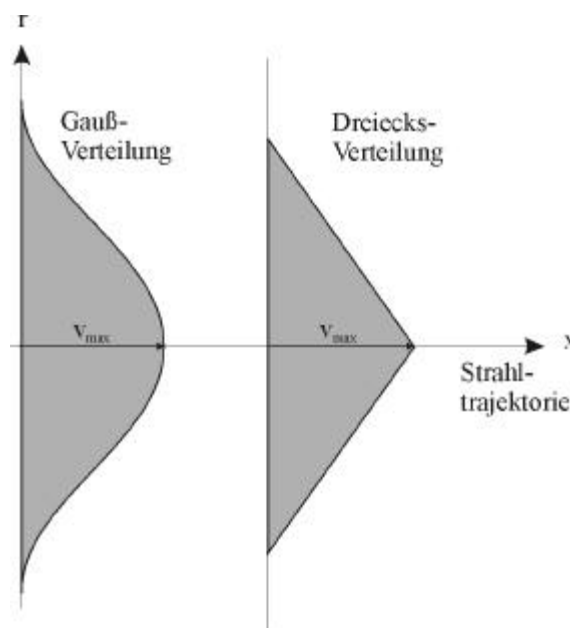


Abb. 4-1: Dimensionslose Geschwindigkeitsverteilung quer zur Strahltrajektorie

4.2 Grundlegende Gleichungen zur Beschreibung von Wirbelringen

Die komplexen Zusammenhänge von Wirbelströmungen haben bisher einen analytischen Zugang verwehrt. Nur für einige Sonderfälle, meist Wirbel in reibungsfreien Strömungen, sind die Bewegungsgleichungen einer Lösung zugänglich. Einen Sonderfall dieser komplexen Wirbelströmungen stellen die Ringwirbel dar. Umfangreiche Studien über die Ringwirbel wurden besonders in den 70er und 80er Jahren an der Universität Karlsruhe (SFB 80) [DURST1977/A], [DURST1977/B], [ARNOLD1975] und am Max-Planck-Institut Göttingen [BASFELD1983], [SCHNEIDER1978], [EHRHARDT1977], [DIDDEN1977], [POPPE1978], [SCHNEIDER1979], [CLAUS1978] durchgeführt. Neuere Arbeiten über die mathematische Lösung der Bewegungsgleichungen wurden von [KONSTANTINOV1996], [Antropov1998], [BRAND1994] und [GRIMM1994] vorgelegt. Da es sich jedoch im überwiegenden Fall um theoretische und versuchstechnische Behandlung von Wirbelringen handelt, die einerseits einen kleinen Wirbelfadendurchmesser im Verhältnis zum Wirbelringdurchmesser haben und andererseits sich im reibungsfreien Fluid bewegen, sind sie auf den vorliegenden Fall nicht anwendbar.

Es soll hier eine praktikable Beschreibung von Wirbelringen eingeführt werden. Dabei werden nur die hauptsächlichen Eigenschaften von Wirbelringen bzw. ihren Analogon, dem Wirbelpaar berücksichtigt.

Wie oben beschrieben wird die normalverteilte Geschwindigkeitsverteilung eines fluiden Freistrahls orthogonal zur Strahltrajektorie auf eine lineare Geschwindigkeitsverteilung approximiert. Die Verschiebung dieser linearisierten Geschwindigkeitsverteilung um genau die Hälfte der Maximalgeschwindigkeit führt zu einer Geschwindigkeitsdarstellung zweier Festkörperwirbel, die einen entgegengesetzten Drehsinn haben. In seiner räumlichen Ausdehnung hat dieser Festkörperwirbel eine toroide Form, wobei der Ringdurchmesser in gleicher Größenordnung wie der Querschnittsdurchmesser ist (Abb. 4-2).

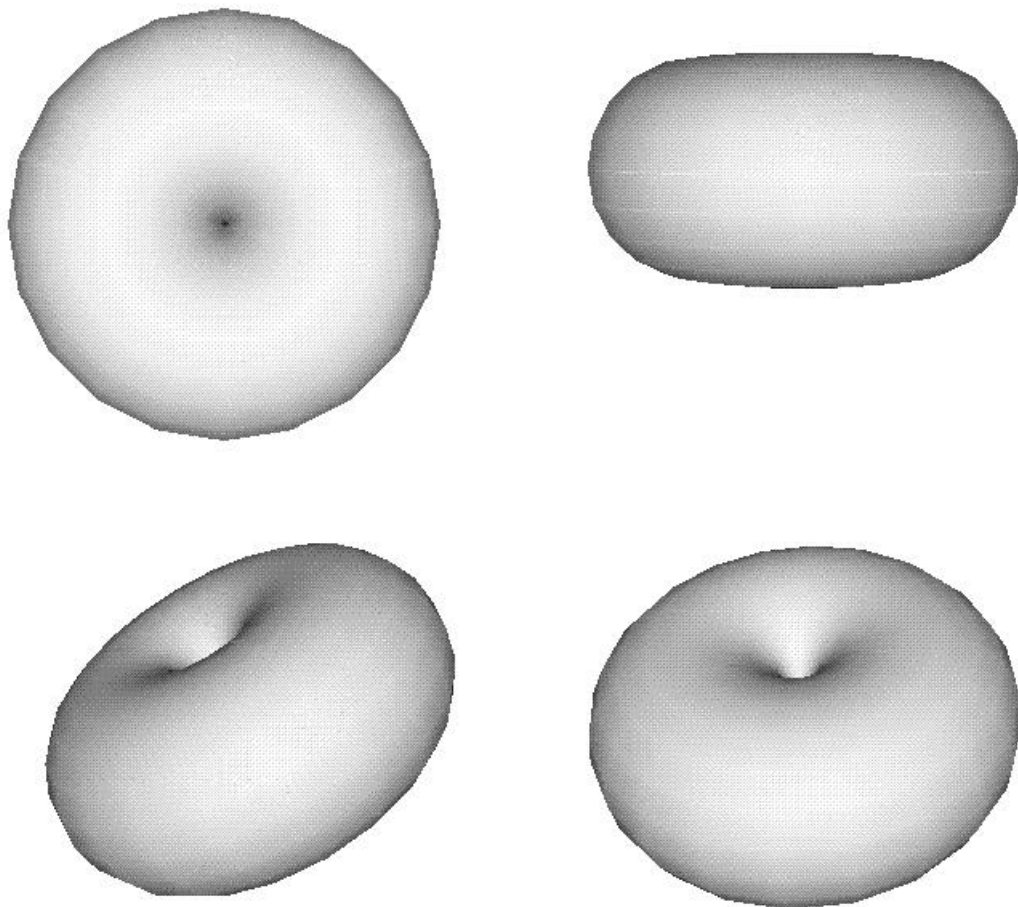


Abb. 4-2: Schematische Darstellung eines Wirbelrings mit $d = D$

Die Schwierigkeit besteht in der phänomenologischen Beschreibung der Strahl­turbulenz in seiner Ursache als Wirbelringturbulenz. In Kapitel 2 wurde gezeigt, daß die Reynoldsgleichungen als Beschreibung eines stochastischen Prozesses, der aus translatorischen und Rotationsbewegungen besteht, aufzufassen ist. Die Turbulenz besteht aus größeren und kleineren bis hin zu mikroskopisch kleinen Wirbelballen. Somit kann eine räumliche Grenze eines großen Wirbelballens definiert werden, die als Grenze eines Körpers aufgefaßt wird, der aus vielen

kleineren aber unterschiedlich großen Wirbelballen besteht [Albring1989]. Dementsprechend wird ein Torus als solch ein Körper aufgefaßt (Abb. 4-2). Die Bewegung des Ringwirbels ist dabei die Primärbewegung (Hauptbewegung) und die im Ringwirbel vorkommenden Wirbelballen die Sekundärbewegungen, die durch die

4.3 Nachweis der Ähnlichkeit von Impuls, Entrainment und Geschwindigkeit

Der Impuls ist das Integral über den Strahlquerschnitt in den Grenzen $r = 0$ für $v_x = v_{\max}$ und $r = d$ für $v_x = 0$:

$$I = \rho Q_0 v_0 = \int_{r=0}^{r=d/2} 2\pi r v(r)^2 dr . \quad [4-1]$$

Darin ist r der orthogonale Abstand zur Strahltrajektorie. Da die Geschwindigkeitsverteilung linear mit zunehmenden Abstand von der Strahltrajektorie abnimmt, läßt sich der Gradient wie folgt anschreiben

$$\frac{v_{\max}}{d} = \frac{v(r)}{d-r} \rightarrow v(r) = v_{\max} \left(1 - \frac{r}{d} \right) \quad [4-2]$$

und in die Gl. [4-1] eingesetzt, ergibt sich der Impuls als

$$\begin{aligned} I &= \int_{r=0}^{r=d/2} 2\pi r v_{\max}^2 \left(1 - \frac{r}{d} \right)^2 dr \\ &= 2\pi \rho v_{\max}^2 \left(\frac{r^2}{2} - \frac{2}{3} \frac{r^3}{d} + \frac{1}{4} \frac{r^4}{d^2} \right) \Big|_0^{d/2} \\ &= \frac{\pi}{6} \rho v_{\max}^2 d^2 . \end{aligned} \quad [4-3]$$

Gleichung [4-3] gibt die Beziehung zwischen dem Impuls und der Maximalgeschwindigkeit auf der Trajektorie wieder. Diese Gleichung ist Grundlage für die Berechnung der Wirbelgeometrie am Ende der Kernzonenlänge. Für diesen Punkt gilt für die Mittengeschwindigkeit $v_{\max} = v_0$ und mit Gl. [4-1] und [4-3] die Relation:

$$\frac{I}{\rho} = v_0 Q_0 = \frac{\pi}{6} v_0^2 d^2 . \quad [4-4]$$

Darin ist der Anfangsdurchfluß $Q_0 = \frac{\pi}{4} d_0^2 v_0$. Für den Wirbelfadendurchmesser im Referenzquerschnitt kann dann geschrieben werden:

$$d = \sqrt{6} \frac{d_0}{2} . \quad [4-5]$$

Entsprechend Abb. 4-3 wird die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v_f mit der Maximalgeschwindigkeit v_{\max} auf der Trajektorie gleichgesetzt. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist dabei doppelt so groß wie die Umfangsgeschwindigkeit v_u . Es gilt also:

$$v_{\max} = v_f = 2v_u. \quad [4-6]$$

Der so dargestellte Wirbelring entspricht dem Stromlinienbild nach, dem laminaren Oseen-Wirbel, wobei der Querschnitt des Wirbelrings als ein Wirbelpaar interpretiert werden muß. Kennzeichnend für den Oseen-Wirbel sind die konzentrischen Stromlinien um einen Mittelpunkt. Der Mittelpunkt ist im Zentrum der Wirbelfadenquerschnittsfläche. Unter dieser Annahme läßt sich für die Halbwertzeit t_H , das ist die Zeit, die vergeht, bis sich die Anfangsgeschwindigkeit halbiert und der Anfangsradius verdoppelt hat, für den laminaren Fall wie folgt berechnen:

$$t_H = \frac{\left(\frac{d}{2}\right)^2}{4\nu \ln 1,56}. \quad [4-7]$$

Die Umrechnung für den turbulenten Fall erreicht man, wenn statt der molekularen ν die vergrößerte Wirbelzähigkeit ν_w

$$\nu = \nu_w = \frac{v_u \frac{d}{2}}{Re_{\min}} \quad [4-8]$$

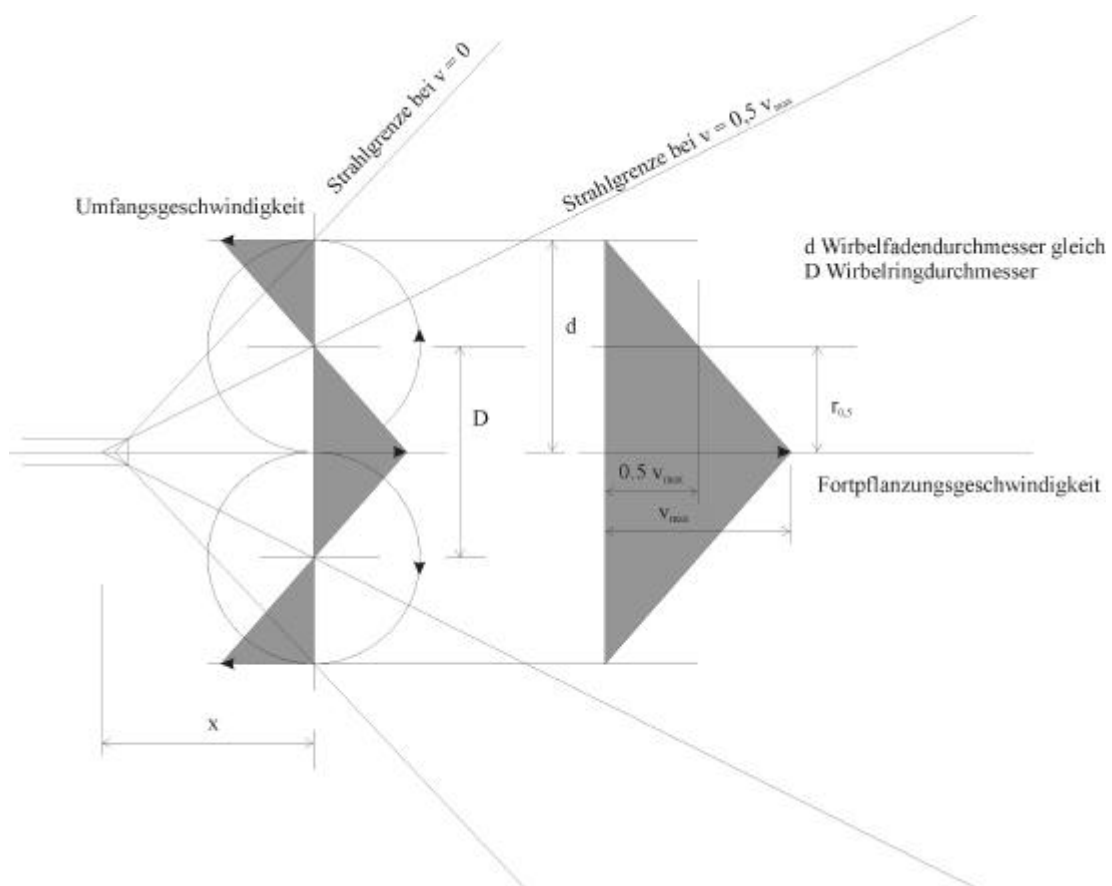
in die Gl. [4-7] eingesetzt wird [Albring1970]:

$$t_H = \frac{1}{4 \ln 1,56} \frac{\frac{d}{2} Re_{\min}}{v_u}. \quad [4-9]$$

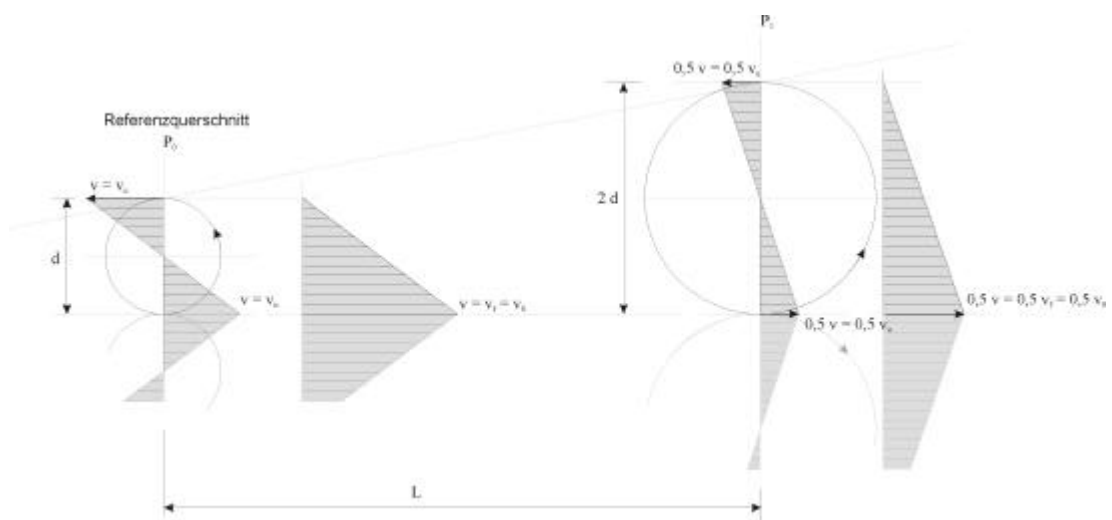
Aus Gl. [4-5] und [4-6] ergibt sich für die Halbwertzeit im Referenzquerschnitt

$$t_H = \frac{\sqrt{6}}{8 \ln 1,56} \frac{d_0 Re_{\min}}{v_0}. \quad [4-10]$$

Die Grenze zwischen laminaren und turbulenten Fließen gibt [ALBRING1970] mit $Re_{\min} = 30$ an. Gewonnen wurde dieser Wert aus Versuchen und Naturbetrachtungen. Andere Autoren [KRANAWETTREISER1998] setzen diese Grenze noch tiefer und geben nach Albring $Re_{\min} = 15$ für Strömungen im Nachlauf von Gittern an.



$x=0$ und $v_x=0,5v_{max}$



$$t_H = 10,33 \frac{d_0}{v_0}$$

[4-11]

Unter der Annahme einer linearen Abnahme der Fortpflanzungsgeschwindigkeit innerhalb der Halbwertszeit eines Wirbels ergibt sich für den Referenzquerschnitt vom Punkt 0 bis zum Punkt 1 (Abb. 4-3) eine Lauflänge L

$$L = 0,75v_0t_H \quad [4-12]$$

und mit Gl. [4-11]

$$L = 7,75d_0. \quad [4-13]$$

Wird nun die Kernzonenlänge mit $x_1 = 6,2d_0$ entsprechend [KRAATZ1989] eingeführt, läßt sich der Abstand x_{P1} des Wirbels für $d/2$ im Punkt 1 mit

$$x_{P1} = x_1 + L = 13,95d_0 \quad [4-14]$$

und die Maximalgeschwindigkeit auf der Trajektorie im Punkt 1 mit

$$v_{\max} = \frac{v_0}{2} \quad [4-15]$$

bestimmen. Die äquivalente Lauflänge für einen Freistrahler ergibt sich nach [Kraatz1989] mit Gl. [4-15] und Gl. [3-25]

$$x = 12,4d_0, \quad [4-16]$$

welche in gleicher Größenordnung wie Gl. [4-14] liegt. Der Ausbreitungswinkel α_a ergibt sich aus dem Wirbelfadendurchmesser $2d$ am Punkt 1 und dem Abstand x zwischen Einleitungsort und Punkt 1

$$\tan \alpha_a = \frac{2\sqrt{6}d_0/2}{13,95d_0} = 0,175. \quad [4-17]$$

Dieses Ergebnis stimmt gut mit der unteren Grenze des äußeren Diffusionswinkels nach [KRAATZ1989] [ECK1961] überein (siehe Tab. 3-2).

Der vorausgegangenen Ableitung für den Wirbelring lag die Annahme zu Grunde, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit doppelt so groß ist wie die Umfangsgeschwindigkeit. Für Wirbelringe bestehend aus einem viskosen Fluid ist jedoch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit kleiner als aus den oben betrachteten Potentialwirbel abgeleiteten Geschwindigkeiten.

4.4 Frequenzeigenschaften und Dichteverteilung bei Wirbelringen

Die Umlauffrequenz eines Wirbels ist definiert durch die Dauer einer Umdrehung, die ein Flüssigkeitsteilchen auf dem Umfang des Wirbelrands zurück legt, bezogen auf die Zeiteinheit. Es gilt

$$f_u = \frac{v_u}{\pi d} \quad [4-18]$$

und mit Gl. [4-5] und [4-6] im Referenzquerschnitt

$$f_u = \frac{v_0}{2\pi\sqrt{6} d_0/2} = \frac{1}{\pi\sqrt{6}} \frac{v_0}{d_0}. \quad [4-19]$$

Die Frequenz an einem Punkt P_n mit n -facher Verdopplung des Umfangs und n -facher Halbierung der Umfangsgeschwindigkeit ist mit Gl. [4-19]:

$$f_n = \frac{1}{\pi\sqrt{6}} \frac{v_0/2^n}{2^n d_0} = \frac{1}{\pi\sqrt{6}} \frac{1}{(2^n)^2} \frac{v_0}{d_0}. \quad [4-19]$$

Im Hypolimnion stehender Gewässer herrscht in den Sommermonaten eine stabile Dichteschichtung mit einer exponentiellen Verteilung der Dichte mit der Höhe H :

$$\rho_z = e^{-\frac{z}{H}} \rho_0, \quad [4-20]$$

worin ρ_0 die Dichte in der Höhe $z=0$ ist und H die zugehörige Höhe der gleichförmigen Dichteschicht (bei linearer Abnahme von ρ_0 auf Null). Unter dieser Voraussetzung nimmt die Brunt-Väisälä-Frequenz nach Gl. [3-45] einen konstanten Wert an [TURNER1973]:

$$N^2 = \frac{g}{H}. \quad [4-21]$$

Entsprechend der Beschreibung der Gl. [3-45] in Kapitel 3.3 kann nun die translatorische Frequenz zu einer rotatorischen Frequenz erweitert und mit der Umlauffrequenz des Wirbelrings gleichgesetzt werden. Dann ist

$$\frac{N}{2\pi} = f_n, \quad [4-22]$$

das zur Höhe H führt

$$H = \frac{3}{2} g (2^n)^4 \left(\frac{v_0}{d_0} \right)^{-2}. \quad [4-23]$$

H stellt genau die Höhe dar, bei der die Dichte bei konstantem Dichtegradienten [KRANAWETTREISER1988].

Der Zusammenhang zur Bestimmung der Dichte einer Suspension in der Tiefe z ist gegeben durch [KRANAWETTREISER1992]:

$$\rho_z = \rho + TS_z \left(1 - \frac{\rho}{\rho_F} \right) \quad [4-24]$$

mit ρ der Dichte von Wasser in g/cm^3 , ρ_f der Dichte des suspendierten Feststoffs in g/cm^3 und TS_z dem Trockensubstanzgehalt in der Tiefe z . Wobei die Einheit der Trockensubstanz der Einheit der Dichte gleich sein muß. Gl. [4-20] in [4-24] eingesetzt und nach dem Trockensubstanzgehalt umgestellt führt zu

$$TS_z = \rho \frac{e^{-\frac{z}{H}} - 1}{1 - \frac{\rho}{\rho_f}}. \quad [4-25]$$

Diese Gleichung erlaubt Aussagen über die Trockensubstanzverteilung (ist gleich der Konzentrationsverteilung von suspendierten Feststoffen) über die Höhe H bei definierten Strömungsbedingungen.

4.5 Zusammenfassung

Die Ersetzung der als Gaußsche Glockenkurve vorliegende dimensionslosen Geschwindigkeitsverteilung quer zur Strahlachse durch eine lineare Verteilung führt zum Ansatz, daß der turbulente Freistrahler als einer Folge von Wirbelringen interpretiert werden kann. Dabei wird der Querschnitt des Wirbelringes als ein Wirbelpaar angesehen. Durch diese Ersetzung ist es möglich die Dichteverteilung, und damit verbunden die Transportkapazität, in Abhängigkeit der Frequenz der Wirbelringe darzustellen. Grundlage ist die Ermittlung der Frequenz des Wirbelsystems sowie Abhängigkeit dieser Frequenz von der Lauflänge des Strahls mit Hilfe der Schwingungstheorie von Büniger (Auffinden von Resonanzzuständen) [Kranawettreiser1992].

5 Dichte von natürlichen Wässern

Im folgendem Kapitel werden die Eigenschaften des Wassers aufgezeigt. Verschiedene Verfahren zur Bestimmung der Dichte als Funktion von Temperatur, Druck und der Menge an gelösten Stoffe werden beschrieben und hinsichtlich ihrer Anwendbarkeit ausgewertet.

5.1 Eigenschaften von Wasser

Die Dichte von Wasser ist von der Menge an gelösten Stoffen, der Temperatur und dem Druck abhängig. Mit steigendem Gehalt an gelösten Stoffen nimmt die Dichte annähernd linear und mit zunehmender Wassertiefe streng linear zu.

Aufgrund der Struktur des Wassermoleküls und der Aggregatbildung der Moleküle weist Wasser einzigartige Eigenschaften auf. Das Wasser ist die einzige anorganische Verbindung, die unter natürlichen Bedingungen die Aggregatzustände fest, flüssig und gasförmig aufweist. Die Tabelle 5-1 stellt einige der wichtigsten Charakteristika zusammen.

Besonderen Einfluß hat das Wasser auf die Existenz und die Zusammensetzung aquatischer Lebensgemeinschaften. In erster Linie ist das Leben im Wasser von der Dichte, der Dichteanomalie, der Viskosität und den thermischen Eigenschaften

Charakteristiken von reinem Wasser

Dichte bei 25 °C	kg/m ³	997,075
maximale Dichte	kg/m ³	1000,000
Dichtemaximum	°C	3,94
Viskosität bei 25 °C	Pa s	0,890 10 ⁻³
Kinematische Zähigkeit bei 25 °C		0,89 10 ⁻⁶
Schmelzpunkt bei 10.1325 Pa	°C	0,000
Siedepunkt bei 10.1325 Pa	°C	100,000
Schmelzwärme	kJ/mol	6,0104
Verdampfungswärme	kJ/mol	40,66
Spezifische Wärme bei 15 °C	J/kg	4.186
Wärmeleitfähigkeit bei 25 °C	J/(cm s °C)	0,00569
Oberflächenspannung bei 25 °C	N/m	71,97 10 ⁻³
Dielektrizitätskonstante bei 25 °C	-	78,54

Tab. 5-1: Eigenschaften von reinem Wasser [SCHWOERBEL1993]

Wassermoleküle sind starke Dipolmoleküle. Aus der Anordnung der Protonen und Elektronen folgt der tetraedrischer Bau der Wassermoleküle mit asymmetrischer Ladungsverteilung, d.h. der Schwerpunkt der negativen Ladungen fällt nicht mit dem Schwerpunkt der positiven Ladungen zusammen. Die starke Polarität der H₂O-Moleküle bedingt das große Lösungsvermögen des Wassers für Salzionen und

Verbindungen aus polaren Molekülen. Demgemäß bilden die Wassermoleküle auch untereinander Assoziate, sogenannte Wasserstoffbrücken.

Die starke Assoziation führt auch zu dem relativ hohen Siedepunkt des Wassers. Läge ein linearer Bau des Wassermoleküls vor, dann würde dieser bei etwa -80 °C [HENNING1988] liegen. Auch die Dichteanomalie²² geht auf die Assoziation zurück. Des weiteren ist die Dichteänderung nicht linear proportional der Temperaturänderung (Abb. 5-1). Zwischen 24 °C und 25 °C ($\Delta\rho = 2,5 \cdot 10^{-4}\text{ g/cm}^3$) ist die Dichtedifferenz 30 mal so groß wie zwischen 4 °C und 5 °C ($\Delta\rho = 7,9 \cdot 10^{-6}\text{ g/cm}^3$). Darauf beruht zum Beispiel die Stabilität thermisch geschichteter Seen.

5.2 Dichte von Wasser in natürlichen Gewässern

Die Dichte von natürlichen Wässern ist von der Temperatur, dem Druck und dem Gehalt an gelösten Stoffen abhängig. Bei hydromechanischen Untersuchungen reicht in den meisten Fällen die Dichtebestimmung allein von der Temperaturabhängigkeit aus. Bei einigen hydraulischen Vorgängen jedoch, wie zum Beispiel Strömungen in stehenden Gewässern, ist eine genauere Beschreibung erforderlich. Im folgenden werden einige empirische Formeln für die Dichteberechnung aufgezeigt.

Für die Berechnung der Dichte existieren unterschiedliche Ansätze. Mit einem polynominalen Ansatz wird die Dichte ρ_T von reinem Wasser²³ in Abhängigkeit der Temperatur T mit der Gleichung [5-1/1] bestimmt [HUTTER1975]:

$$\rho_T = (0,059385T^3 - 8,56272T^2 + 65,4891T) \cdot 10^{-6} + 0,999843. \quad [5-1/1]$$

Darin ist ρ_T die Dichte von destilliertem Wasser in g/cm^3 gültig für Temperaturen zwischen 0 °C und 24 °C mit einer Genauigkeit von 10^{-6} und T die Temperatur von reinem Wasser in °C (Abb. 5-1). Weitere Berechnungsformen für die Dichte reinen Wassers lauten

$$\rho_T = \rho_{4\text{°C}} (1 - \beta_T (T - 4)^2), \quad [5-1/2]$$

mit $\beta_T = \text{const} = 7,17 \cdot 10^{-6}\text{ °C}^{-2}$ (*) nach [GOSSENS1979] bzw. mit $\beta_T = \text{const} = 0,68 \cdot 10^{-5}\text{ °C}^{-2}$ nach [BELETSKY1994] und dem Dichtemaximum $\rho_{4\text{°C}} = 1\text{ g/cm}^3$,

²² Dichteanomalie bedeutet, daß das Dichtemaximum oberhalb des Gefrierpunktes liegt.

²³ Mit reinem Wasser wird hier destilliertes Wasser bezeichnet.

$$\rho_T = \rho_{4^\circ\text{C}} - 7,3 \cdot 10^{-6} (T - 4)^2 \quad [5-1/3]$$

nach [SIMONS1972] und

$$\rho_T = 1 - \frac{(T - 3,98)^2 (T + 283)}{503570(T + 67,26)} \quad [5-1/4]$$

nach [LANDOLT-BÖRNSTEIN1985].

Alle obigen Formeln berechnen die Dichte in Abhängigkeit der Temperatur mehr oder weniger genau, die besten Ergebnisse in Übereinstimmung mit gemessenen Werten liefern die Gleichungen [5-1/1] und [5-1/4] (Abb. 5-1).

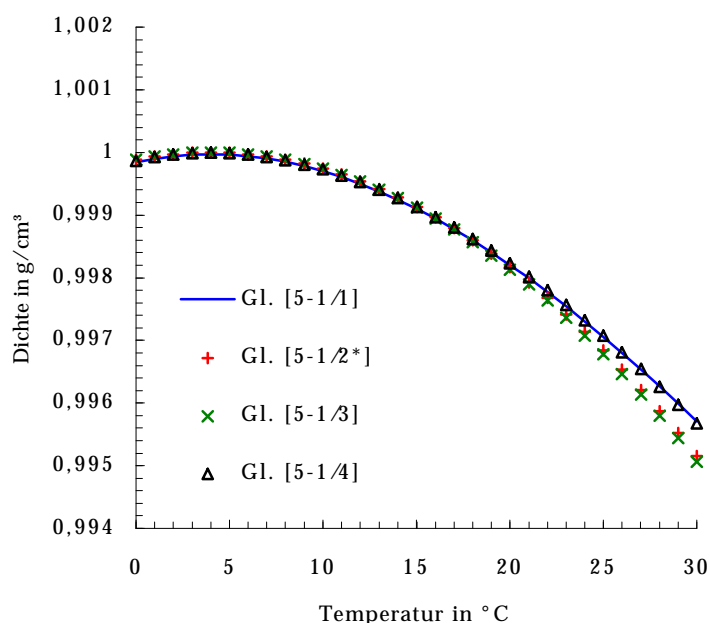


Abb. 5-1: Abhängigkeit der Dichte von der Temperatur nach Gl. [5-1a] bis [5-1d] (Gl. [5-1/2*] nach Gossens)

Der Gehalt an gelösten Salzen beeinflusst die Dichte und bestimmt über die Anzahl der freien Ionen die elektrische Leitfähigkeit der wässrigen Lösung. Da die Ionenbeweglichkeit von der Temperatur abhängig ist, muß die gemessene Leitfähigkeit auf eine Referenzleitfähigkeit bei einer bestimmten Temperatur umgerechnet werden²⁴. Die Dichte einer solchen Lösung läßt sich nach [BÜHRER1975] unter der Annahme, daß 1 mS/cm = 0,8 mg/cm³ gelöstes Salzes bei 20 °C entspricht, bestimmen zu

$$\rho_{T,\kappa} = \rho_T + 0,64 \cdot 10^{-6} \kappa_{20} \quad [5-2]$$

²⁴ Temperaturkorrekturfaktor der elektrischen Leitfähigkeit nach [WAGNER1996] und [BÜHRER1975], siehe Anhang.

mit

$$\rho_T = (0,059385T^3 - 8,56272T^2 + 65,4891T) \cdot 10^{-6} + 0,99984298 \quad [5-3/1]$$

und

$$\kappa_{20} = \kappa_T \left(\frac{-1,2226511 \cdot 10^{-5} T^3 + 1,14842 \cdot 10^{-3} T^2}{-5,41369 \cdot 10^{-2} T + 1,72118} \right). \quad [5-3/2]$$

Darin ist $\rho_{T,\kappa}$ die Dichte des Seewassers in g/cm^3 in Abhängigkeit von ρ_T , der Dichte von destilliertem Wasser in g/cm^3 und der Referenzleitfähigkeit κ_{20} bei 20°C in $\mu\text{S/cm}$, κ_T ist die gemessene Leitfähigkeit in $\mu\text{S/cm}$ (Abb. 5-2).

Unter Berücksichtigung von Salinität und Druck gibt [CHEN1977] für die Dichte $\rho_{T,\kappa,P}$ in g/cm^3 gültig für $T = 0 \dots 30^\circ\text{C}$, $S = 0 \dots 0,6 \text{ ‰}$ und $P = 0 \dots 180 \text{ bar}$ die Gleichung [5-4] an:

$$\rho_{T,\kappa,P} = \frac{\rho^*}{1 - P/K} \quad [5-4]$$

mit der salinitätskorrigierten Dichte ρ^*

$$\begin{aligned} \rho^* = & 0,9998395 + 6,7914 \cdot 10^{-5} T - 9,0894 \cdot 10^{-6} T^2 \\ & + 1,0171 \cdot 10^{-7} T^3 - 1,2846 \cdot 10^{-9} T^4 + 1,1592 \cdot 10^{-11} T^5 \\ & - 5,0125 \cdot 10^{-14} T^6 \\ & + S \cdot (8,221 \cdot 10^{-4} - 3,87 \cdot 10^{-6} T + 4,99 \cdot 10^{-8} T^2) \end{aligned} \quad [5-5]$$

und dem Druckbeiwert K in bar

$$\begin{aligned} K = & 19652,17 + 148,376T - 2,329T^2 \\ & - 1,3963 \cdot 10^{-2} T^3 - 5,90 \cdot 10^{-5} T^4 \\ & + P(3,2918 - 1,719 \cdot 10^{-3} T + 1,684 \cdot 10^{-4} T^2) \\ & + S(-0,8985 + 2,428 \cdot 10^{-2} T + 1,114 \cdot 10^{-2} P). \end{aligned} \quad [5-6]$$

Für die Salinität S in ‰ gilt:

$$S = 0,9951437g_T. \quad [5-8]$$

Des weiteren sind P der Druck in bar und g_T der totale Gehalt an gelösten Salzen pro Kilogramm Seewasser in g/kg . Unter der Annahme, daß $1 \text{ mS/cm} = 0,8 \text{ mg/cm}^3$ (gilt

3)2 nach [BÜHRER1975]) ist der totale Gehalt an gelösten Salzen

$g_T = 8 \cdot 10^{-4} \kappa_{20}$ und damit die Salinität $S = 7,9611496 \cdot 10^{-4} \kappa_{20}$.

‰] und Druck P [bar] nach [Chen1977]

Für die Berechnung globaler Strömungen in Abhängigkeit von der Temperatur und dem Gehalt an gelösten Stoffen sind die obigen Gleichungen ausreichend. Im

vorliegenden Untersuchungsfall wird jedoch eine chemische Substanz (Kalziumhydroxid) eingebracht, die im Laufe ihrer Ausbreitung ausfällt. Dieser Anteil an partikulärem Kalzit beeinflusst die Dichte. Im folgenden Abschnitt wird eine Formel aufgestellt, die diesen Mechanismus in Abhängigkeit vom [KRAWAWETTREISER1999].

Grundlage ist das Kalk-Kohlensäure-Gleichgewicht, in dem die gelösten Komponenten von Kohlendioxid CO_2 , Kohlensäure H_2CO_3 , Hydrogenkarbonat-Ionen HCO_3^- , Bikarbonat-Ionen CO_3^{2-} , Wasserstoff-Ionen H^+ , Hydroxid-Ionen OH^- , Kalzium-Ionen Ca^{2+} und Kalziumkarbonat CaCO_3 in komplexen Gleichgewichtsreaktionen miteinander verknüpft sind [JOHANNSEN1998].

Das aus der Atmosphäre in das Wasser eingetragene Kohlendioxid wird schnell hydratisiert



und bildet zusammen mit Wasser die Kohlensäure



Danach dissoziiert die Kohlensäure in Wasserstoff- und Hydrogenkarbonat-Ionen:



und das Hydrogenkarbonat wiederum in



Zu jeder Gleichgewichtsreaktion läßt sich das Löslichkeitsprodukt K (auch als Gleichgewichtskonstante bezeichnet) aus den Aktivitäten A'_i der gelösten Kationen und Anionen nach folgendem Schema angeben:

$$K_i = A'_{\text{Kation}} A'_{\text{Anion}} ; \quad [5-13]$$

zum Beispiel für Wasser: $K_{\text{H}_2\text{O}} = A'_{\text{H}^+} + A'_{\text{OH}^-}$.

Aus den aktuellen Aktivitäten der Ionen A_i und des Löslichkeitsproduktes K läßt sich nun der Sättigungsindex SI , der die Über- oder Untersättigung eines Systems kennzeichnet, für Kalziumkarbonat berechnen mit:

$$SI = \frac{A_{\text{Ca}^{2+}} A_{\text{CO}_3^{2-}}}{K_c} \quad [5-14]$$

wobei K_c für das Löslichkeitsprodukt

$$K_c = A_{\text{Ca}^{2+}} A_{\text{CO}_3^{2-}} \quad [5-15]$$

steht.

Die Aktivität A_i eines Ions ist eine Funktion von seinem dimensionslosen Aktivitätskoeffizienten f_i und der Konzentration c_i :

$$A_i = f_i \cdot c_i \quad [5-16]$$

Der Aktivitätskoeffizient kann nicht direkt gemessen werden, da einzelne Kationen und Anionen wegen des Neutralitätsprinzips nicht existieren können [KÜCHKER-KRISCHUN1990]. Entsprechend der Debye-Hueckel-Theorie [PROFT1993] läßt sich jedoch der Aktivitätskoeffizient näherungsweise bestimmen:

$$-\lg f_i = \frac{1825029(\epsilon T)^{-3/2} z_i^2 \sqrt{I}}{1 + 50,29671(\epsilon T)^{-1/2} d_i \sqrt{I}} \quad [5-17]$$

mit I in mol/l für die Ionenstärke der Lösung, T für die Temperatur in K, z_i für die Wertigkeit eines Iones, z.B. $z_{Ca} = 2$ und d_i für den Ionendurchmesser in Å . Die relative dielektrische Konstante von Wasser ϵ ist abhängig von der Temperatur:

$$\epsilon = 87,74 - 0,40008T + 9,398 \cdot 10^{-4} T^2 - 1,41 \cdot 10^{-6} T^3, \quad [5-18]$$

wobei in dieser Gleichung die Temperatur T in $^{\circ}\text{C}$ einzusetzen ist.

Die Ionenstärke I ist abhängig von der Konzentration der in einer Lösung vorkommenden Ionarten und den zugehörigen Wertigkeiten. In Lösungen, in denen zweiwertige Kationen (z. B. Ca^{2+}) überwiegen, und die spezifische Leitfähigkeit κ_{20} den Wert von $100 \mu\text{S}/\text{cm}$ nicht unterschreitet, kann die Ionenstärke nach folgender empirischer Beziehung bestimmt werden:

$$I = 1,835 \cdot 10^{-5} \kappa_{20}. \quad [5-19]$$

Aus dem Löslichkeitsprodukt für das Hydrogenkarbonat erhält man durch Umformen

CO_3^{2-} -Ionen

$$A_{\text{CO}_3^{2-}} = \frac{K_{\text{HCO}_3^-} \cdot A_{\text{HCO}_3^-}}{A_{\text{H}^+}} \quad [5-20]$$

und mit $A_{\text{H}^+} = 10^{-\text{pH}}$ den Sättigungsindex für Kalziumkarbonat

$$\text{SI} = \frac{K_{\text{HCO}_3^-} \cdot A_{\text{Ca}^{2+}} \cdot A_{\text{HCO}_3^-}}{K_c \cdot 10^{-\text{pH}}} \quad [5-21]$$

Aus der obigen Relation kann abgeleitet werden, daß es eine Abhängigkeit zwischen dem gemessenem pH-Wert in einem Gewässer und der vorhandenen Konzentration von Kalziumkarbonat gibt [SMITH1976] [PROFT1993]: der Sättigungsindex SI von Kalzit ist proportional dem pH-Wert.

In Auswertung der chemisch-physikalischen Parameter (Enclosure-Versuche im Dagowsee, Stechlinsee und Schmalen Luzin) und unter Zuhilfenahme der Abhängigkeit zwischen dem Sättigungsindex und dem pH-Wert lassen sich folgende empirische Gleichungen für die Dichte von Wasser in Hartwasserseen aufstellen [KRANAWETTREISER1999]:

$$\max \rho_{T,\kappa,\text{pH}} = \rho_{T,\kappa} + 15 \frac{0,268 + 5 \cdot 10^{-21} \text{pH}^{22,75}}{10^6} \left(1 - \frac{\rho_T}{2,71} \right) \quad [5-22]$$

$$\min \rho_{T,\kappa,\text{pH}} = \rho_{T,\kappa} + 15 \frac{0,25 + 10^{-10} \text{pH}^{11}}{10^6} \left(1 - \frac{\rho_T}{2,71} \right). \quad [5-23]$$

Die Gleichung [5-22] gibt die Dichte im Epilimnion als Funktion der Temperatur, Leitfähigkeit und Konzentration an Kalziumkarbonat an. Hierbei wurde berücksichtigt, daß im Epilimnion eine ausgeprägte autochthone Kalzitfällung vorhanden ist. Im Hypolimnion ist auf Grund der geringeren Temperaturen und des niedrigeren pH-Wertes eine autochthone Kalzitfällung stark behindert. Für diesen Fall berücksichtigt die Gleichung [5-23] die Kalzitkonzentration nach der Einleitung von Kalziumhydroxid.

5.3 Auswertung und Zusammenfassung

Unter Vernachlässigung der entsprechenden Glieder für die Leitfähigkeit $\kappa_{20} = 0$, die Salinität $S = 0$ und dem Druck $P = 0$ ist die Dichte von Wasser allein von der Temperatur abhängig. Für diesen Fall existiert eine gute Übereinstimmung der berechneten Werte in Auswertung der Gleichungen [5-1/1], [5-2] und [5-4] mit den gemessenen Werten nach [SWITZER1999] (Abb. 5-4).

Im weiteren soll der Einfluß des Druckes auf den Dichtegradienten nach Gleichung [5-4] untersucht werden. Dazu soll die Salinität $S = 0$ sein und die Temperatur konstant: für den ersten Fall $T = 10^\circ\text{C}$ und für den zweiten Fall $T = 20^\circ\text{C}$. Die Druckkoordinate soll von 0 m bis 50 m anwachsen. Aus der Abb. 5-5 läßt sich zeigen, daß die Dichte mit der Tiefe linear zunimmt wobei die Dichtedifferenz, abhängig von der Temperatur, konstant ist: für 10°C $\Delta\rho = 4,5 \cdot 10^{-6} \text{ g/cm}^3$ und für 20°C $\Delta\rho = 4,7 \cdot 10^{-6} \text{ g/cm}^3$. Das zeigt, daß der Einfluß des Druckes mit zunehmender Temperatur anwächst.

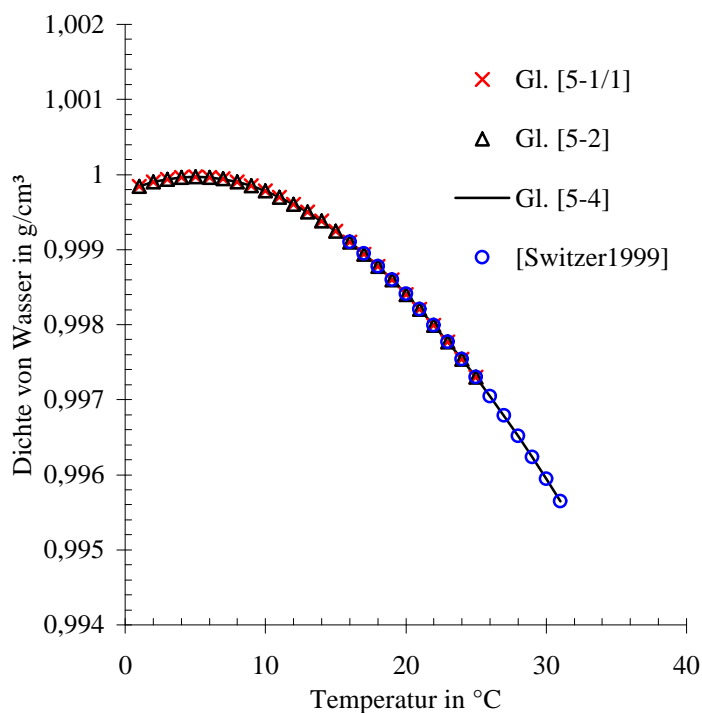


Abb. 5-4: Dichtezunahme in Abhängigkeit der Temperatur in einem homogenen Wasserkörper

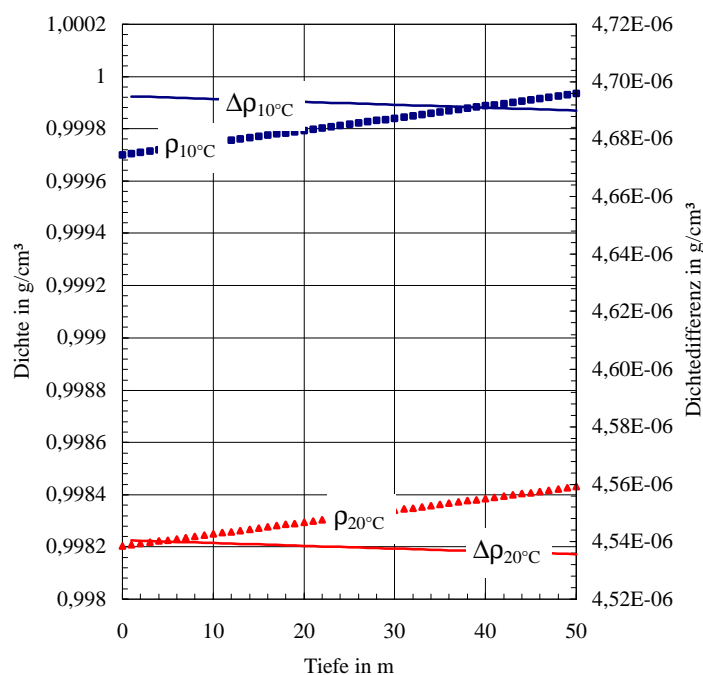


Abb. 5-5: Dichtegradient in Abhängigkeit der Druckzunahme (Wassertiefe) für 10 °C und 20 °C nach Gl. [5-4]

Die Dichtezunahme auf Grund der Temperatur beträgt je nach Lage der Temperatur (siehe oben) zwischen $\Delta\rho = 5,7 \cdot 10^{-5} \text{ g/cm}^3$ für den unteren und $\Delta\rho = 2,8 \cdot 10^{-4} \text{ g/cm}^3$ für den oberen Temperaturbereich. Aus der Größenordnung

der Dichtedifferenzen, einerseits des Druckes andererseits der Temperatur, läßt sich schließen, daß der Einfluß der Tiefenzunahme berücksichtigt werden muß.

Werden jedoch, wie im vorliegenden Untersuchungsfall des Schmalen Luzin, dynamische Vorgänge²⁵ betrachtet, so gibt die Gleichung [5-4] nicht die tatsächliche vertikale Dichteentwicklung wieder. Folgende Betrachtung soll diese Aussage erläutern.

Es soll ein finiter Flüssigkeitskörper mit definierten Abmessungen an der Oberfläche eines homogenen Wasserkörpers existieren. Ein zweites Flüssigkeitsvolumen aus einer tieferen Schicht hat, wenn die definierten Abmessungen beibehalten werden, entsprechend der Gl. [5-4] eine höhere Dichte (unter Vernachlässigung der

$T = \text{const.}, S = \text{const.}$). Wird nun der obere

Flüssigkeitskörper in diese untere Schicht des zweiten Flüssigkeitselementes gebracht muß in Abhängigkeit der Dichtezunahme, also dem Auftrieb entgegen, scheinbar eine Arbeit geleistet werden. Daraus folgt, daß die Dichtezunahme in Abhängigkeit der Tiefenzunahme berücksichtigt werden muß. Diese Ansicht ist dahingehend falsch, daß, wenn ein Flüssigkeitskörper vertikal bewegt wird, er in jedem horizontalen Schnitt entsprechend dem Druckgradienten die Dichte genau dieser Schicht annimmt. Dabei muß vorausgesetzt werden, daß der betrachtete Flüssigkeitskörper so klein ist, daß eine Dichtedifferenz entlang seiner vertikalen Kantenlänge gegen Null geht. Die Anwendung der Gl. [5-4] kann dann nur für solche Fälle sinnvoll sein, wo statische Probleme der Hydromechanik untersucht werden sollen.

Die Anwendung der oben gegebenen Gleichungen für die Dichtebestimmung ist in den Abbildungen 5-6 und 5-7 dargestellt. Dabei wurde einmal der Zustand vor der Einleitung von Ca(OH)_2 und danach betrachtet. In beiden Fällen liefert die Dichteberechnung unter ausschließlicher Berücksichtigung von der Wassertemperatur zu geringe Werte. Erst mit der Gl. [5-2], die sowohl Temperatur als auch Leitfähigkeit beachtet, werden die Dichteverhältnisse im Gewässer besser beschrieben (zu gleichen Ergebnissen führt die Gl. [5-4] wenn der Druckterm vernachlässigt wird). Des weiteren ist aus Abb. 5-6 ersichtlich, daß bei fehlendem bzw. vernachlässigbarem geringen Gehalt an partikulärem Kalzit im Hypolimnion die Gl. [5-22] und [5-23] durch G. [5-2] bestätigt werden. Die Gl. [5-4] liefert

²⁵ Dynamische Vorgänge sind hier Bewegungsvorgänge aufgrund von Dichtedifferenzen.

entsprechend der Dichtezunahme mit der Tiefenzunahme für eine hydrodynamische Beschreibung der Bewegungsvorgänge im Hypolimnion zu große Werte.

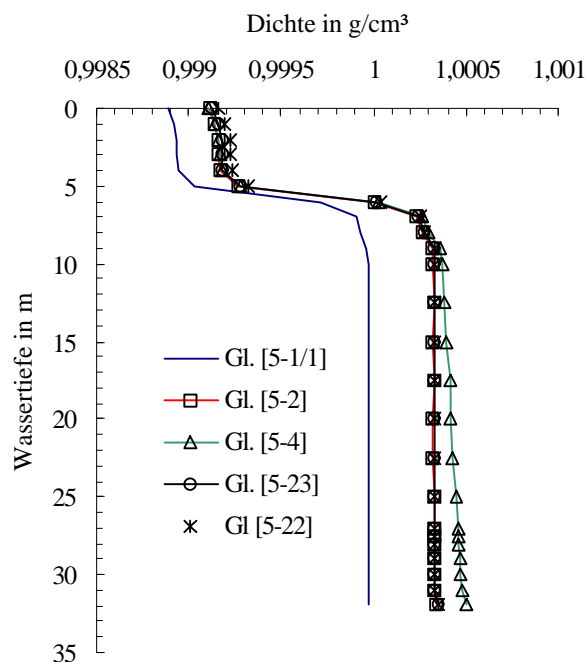


Abb. 5-6: Dichteprofil im Schmalen Luzin / Carwitzer Becken am 25. Juni 1996 vor der Zugabe von Kalkmilch

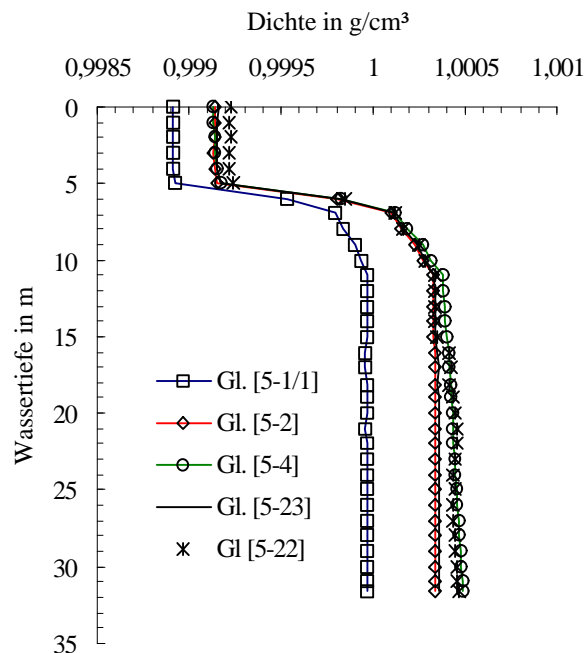


Abb. 5-7: Dichteprofil im Schmalen Luzin / Carwitzer Becken am 9. Juli 1996 nach der Zugabe von Kalkmilch

Die Abb. 5-7 zeigt die Veränderung im Hypolimnion nach der Zugabe von Kalkmilch. Die erhöhte Konzentration von Kalzitkristallen wird nur durch die Gl. [5-22] wiedergegeben, da die Kalzitkonzentration weder mit der Leitfähigkeit noch

mit der Salinität korrespondiert. Gleichung [5-23] liefert nur für das Epilimnion korrekte Werte, für das Tiefenwasser sind die berechneten Dichten zu groß, da eine nichtvorhandene autochthone Kalzitkristallbildung berücksichtigt wird.

Abschließend soll darauf hingewiesen werden, daß zwar die Ergebnisse der Berechnungen entsprechend den vorgegebenen Gleichungen und der damit verbundenen Genauigkeit der Koeffizienten eine Exaktheit widerspiegeln, die so nicht existiert, daß aber für die Darstellung der Dichtegradienten diese Vorgehensweise zwingend notwendig ist.

6 Großversuch "Schmaler Luzin"

Im folgenden Kapitel wird der Schmale Luzin als Experimentalgewässer und die zum Verfahren gehörende Pilotanlage vorgestellt. Vorausgehend werden einige Informationen zur Kalzitfällung gegeben.

6.1 Restaurierung eutrophierter Hartwasserseen

6.1.1 Einleitung

Die Eutrophierung stehender Gewässer hat in den letzten Jahrzehnten rapide zugenommen. Auslöser ist die Anreicherung von Pflanzennährstoffen wie Phosphor- und Stickstoffverbindungen aus landwirtschaftlichen und kommunalen Quellen. Die Schwierigkeit bei der Beurteilung des Eutrophikationspotentials eines stehenden Gewässers liegt in der relativ hohen Verweildauer und der damit verbundenen Akkumulation von Nährstoffen, die eine schnelle Selbstreinigung wie bei Fließgewässern nicht möglich macht. Je nach limnologisch-morphometrischen Parametern eines Sees müssen für die Limitierung der Eutrophikation entsprechende Seetherapien erarbeitet und festgelegt werden. Folgende Tabelle (Tab. 6-1) stellt die wichtigsten Verfahren nach [DVWK1988] zusammen:

Seetherapie

Sanierung (Einzugsgebiet)	Restaurierung (Gewässer)
Abwasserumleitung	Belüftung der Seen
Phosphatfällung in Kläranlagen	Hypolimnische Belüftung
Schönungsteiche	Zwangszirkulation
Vorbecken	Tiefenwasserentnahme
Entphosphatung	Hydraulische Maßnahmen ^a
Sumpfbeete	Entschlammung
Sickerbecken / Filter	Sedimentabdeckung
Verringerung des Nährstoffeintrages aus	Chemische Behandlung des Sedimentes
Phosphatretention in Fließgewässern	Chemische Behandlung des Wassers
	Einsatz von Herbiziden und Algiziden
	Entkrautung
	Biologische Maßnahmen ^b

^aVerdünnung, Spülung, Wasseraustausch

^bEinsatz pflanzenfressender Fische, Beeinflussung des Nahrungsnetzes

Tab. 6-1: Maßnahmen zur Sanierung und Restaurierung eutrophierter Seen nach [DVWK1988]

Am IGB²⁶ wurde ein Verfahren zur Restaurierung von Hartwasserseen entwickelt, das den limnologischen Prozeß "Kalzitfällung" im Hypolimnion künstlich induziert. Dabei soll die Verstärkung der Kalzitfällung einerseits und die verhinderte

²⁶ Institut für Gewässerökologie und Binnenfischerei im Forschungsverbund Berlin e.V., Abteilung Limnologie geschichteter Seen, Alte Fischerhütte 2, 16775 Neuglobsow

Auflösung der Kalzitkristalle im Tiefenwasser andererseits die dauerhafte Einlagerung von Phosphorverbindungen im Sediment fördern.

6.1.2 Das öko-technologische Verfahren "Künstlich induzierte Kalzitfällung"

In norddeutschen stratifizierten Seen, die einen hohen Kalzium- und Karbonatanteil haben und eutrophiert sind, treten intensive saisonale Kalzitfällungen auf (Abb. 6-1a) [KOSCHEL1997] [DITTRICH1997]. Dieser Prozeß wird verstärkt, wenn der CO₂-Gehalt abnimmt und der pH-Wert und die Temperatur zunehmen. Dabei hängen Kohlendioxid-Reduzierung und pH-Wert-Zunahme hauptsächlich von der Photosynthese ab. Die Kalzitfällung und die Kalzitsedimentation bewirken unter anderem eine Kopräzipitation von organischen und anorganischen Stoffen²⁷, eine erhöhte Sedimentation von Seston, die Selbstflockung von suspendierten Partikeln und die Lichtlimitation des Phytoplanktons. Wird nun dieser Prozeß der natürlichen Kalzitfällung künstlich im Hypolimnion induziert, so kann der Trophiegrad eines Gewässers deutlich verbessert werden. Die Zugabe von Kalziumhydroxid in das Tiefenwasser beschränkt die Rücklösung des autochthon im Epilimnion gebildeten Kalzits und verschiebt das Kalk-Kohlensäure-Gleichgewicht (durch pH-Wert-Erhöhung) zum Karbonat hin. Damit ist wiederum eine Übersättigung mit Kalziumkarbonat verbunden, das zu einem Ausfallen der Kalzitkristalle führt. Der aus dem Sediment rückgelöste Phosphor wird dann bereits während der Sommerstagnation wieder im Sediment festgelegt.

Die Zunahme der Kalzitfällung in kalzium- und karbonatreichen Standgewässern kann realisiert werden durch [KOSCHEL1997]:

- Zugabe von Kristallisationskeimen
- Beeinflussung des CO₂-Haushalts
- Förderung der organischen Kalzitfällung
- Aufspülen kalzithaltiger Sedimente
- direkte Beeinflussung der Kalzium-Karbonat-Gleichgewichte durch Zugabe von Ca(OH)₂ im Hypolimnion (Abb. 6-1b)

²⁷ Phosphor ist einer der wichtigste Primärnährstoff.

Luzin [KOSCHEL1998]

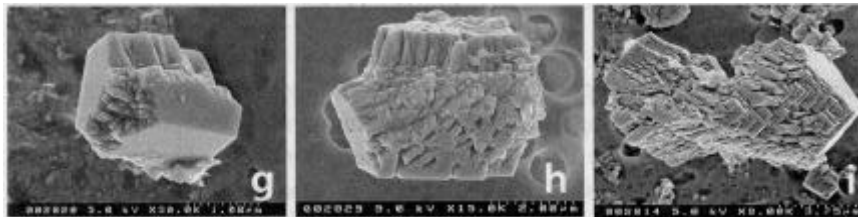


Abb. 6-1b: Kalzitkristalle nach der $\text{Ca}(\text{OH})_2$ -Zugabe im Hypolimnion des Schmalen Luzin [KOSCHEL1998]

Zusammenfassend kann bemerkt werden, daß die Kalzitfällung mit seeinternen chemischen und biologischen Reaktionen verbunden ist, die den Stoffhaushalt im Gewässer beeinflussen und insgesamt gegen die Eutrophierung im Gewässer gerichtet sind [KOSCHEL1983]. Eine umfangreiche Darstellung der künstlich induzierten Kalzitfällung im Schmalen Luzin findet sich in [DITTRICH1998] und allgemein zur Kalzitfällung in [KÜCHLER1990].

Diese direkte Beeinflussung der Kalzium-Karbonat-Gleichgewichte wurden im Schmalen Luzin angewandt.

6.2 Charakteristika des Schmalen Luzin

Der Schmale Luzin liegt im Feldberger Seengebiet, Mecklenburg-Vorpommern. Er ist ein tief eingesenkter, langer, schmaler Rinnensee (Abb. 6-2), der durch eine Schwelle (Das Schmal) in zwei morphologisch und limnologisch vergleichbare Becken geteilt ist (Tab. 6-2). Der See ist ca. 7 km lang und von 150 m bis 300 m breit. Seine 1,34 km² Oberfläche weist bei Normalwasser eine Meeresspiegelhöhe von ca. 84,1 m NN auf. Die größte Tiefe beträgt 34 m, die mittlere Tiefe 14,7 m. Das Einzugsgebiet umfaßt 29,60 km² und ist damit ca. 22 mal größer als die Seeoberfläche. Der Schmale Luzin ist mit dem Breiten Luzin durch einen Durchlaß und mit dem Haussee über den Seerosenkanal verbunden. Der Abflußkanal, die Baek, mündet nach 400 m mit einer Höhendifferenz von 0,4 m in den Garwitzer See. Der mittlere Abfluß beträgt am Pegel Baek ca. 158 l/s (Abb. 6-3).

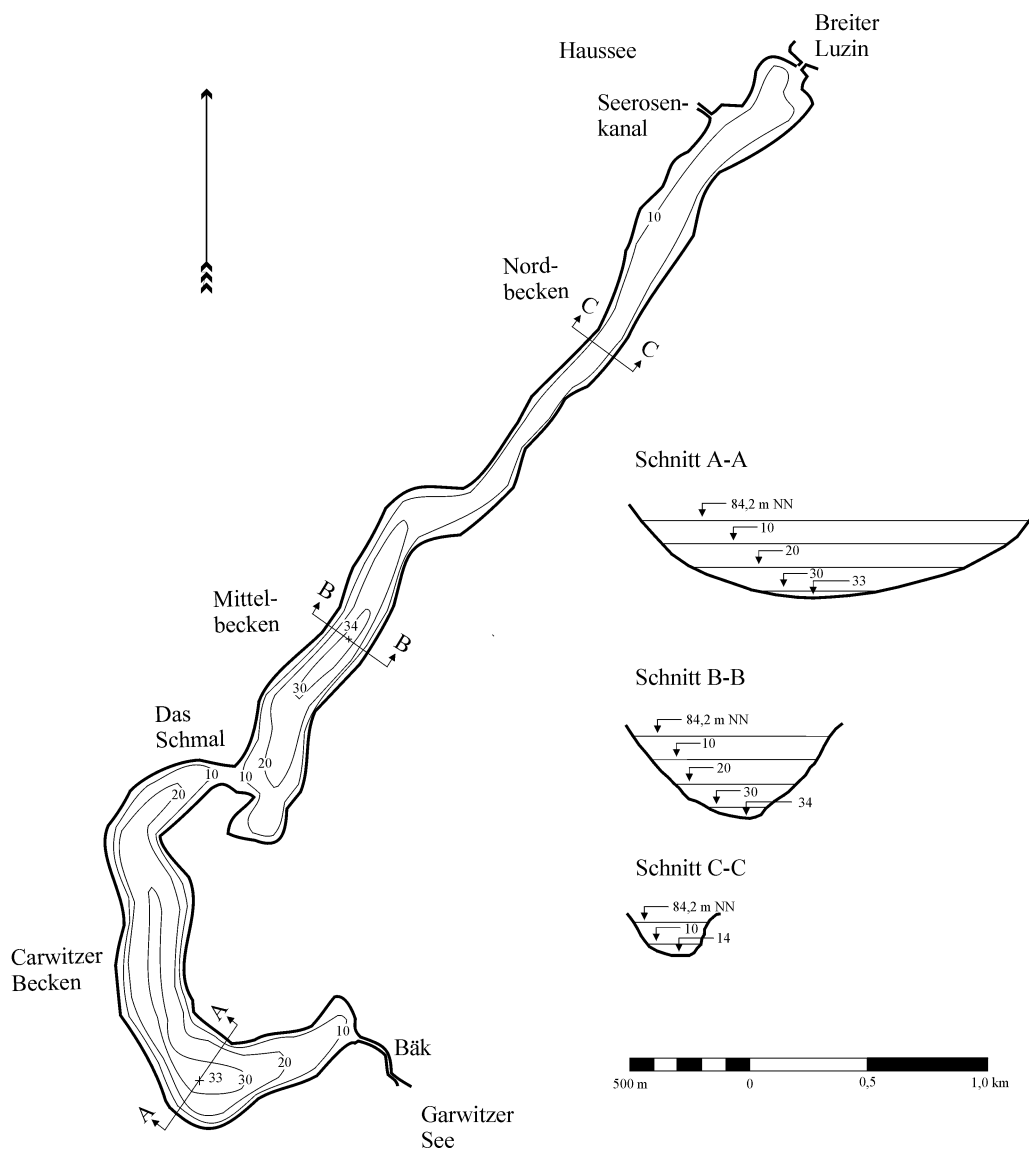


Abb. 6-2: Morphometrie des Schmalen Luzin [JORDAN1986]

Mitte der zwanziger Jahre war der Schmale Luzin ein oligotrophes Gewässer. Mit Zunahme der Eintragung von Phosphor und Stickstoff aus landwirtschaftlichen und kommunalen Quellen ist er seit den fünfziger Jahren meso- bis eutroph [KOSCHEL 1995]. Trotz der rückläufigen Belastung seit den achtziger Jahren hat sich der Trophiegrad des Sees aufgrund der langen theoretischen Verweilzeit kaum verbessert.

Der Schmale Luzin ist vom dimiktischen Mischungstyp. Das heißt für das vorliegende Untersuchungsgebiet, daß die Sommerstagnation nach der Frühjahrsvollzirkulation Ende April einsetzt und bis Anfang November anhält. Die Temperatur des Tiefenwassers bleibt während der gesamten sommerlichen Schichtungsperiode relativ konstant (Abb.6-4). Der Winter 1995/1996 war durch eine sehr lang anhaltenden Eisbedeckung gekennzeichnet.

Limnologische und morphometrische Charakteristika	Schmaler Luzin	Carwitzer Becken	Mittelbecken ⁴
Seeoberfläche [m ²]	1.341.750	576.250	765.500
Seevolumen [m ³]	20.581.125	10.504.625	10.076.500
Volumen Hypolimnion ¹ [Mio. m ³]	9,0	5,4	3,6
max. Seetiefe [m]	34	33	34
mittlere Seetiefe [m]	15	18	13
mittlerer Durchmesser [m]	1.307	857	987
relative Tiefe [-]	0,026	0,038	0,034
Einzugsgebiet am Pegel Baek [km ²]	29,60		
mittlerer Abfluß der Baek (1995-1997) [l/s]	158		
mittlere Verweilzeit [m ³ /(m ³ /a)]	4,14		
TP ² [µg/l]	37	38	36
CaCO ₃ ² [mg/l]	0,20	0,22	0,17
pH-Wert ²	8,5	8,5	8,5
Sauerstoffkonzentration ³ [mg/l]	0	0	0
Sichttiefe ² [m]	5,2	5,2	5,3
Chlorophyll a ² [µg/l]	4,0	4,0	4,0
Schichtungstyp	dimiktisch		

¹ Sommer (> 10 m)

² Jahresmittel für die euphotische Zone (0 bis 10 m) 1992 bis 1994

³ Hypolimnion (15 m), am Ende der Sommerstagnation 1992 bis 1994

⁴ einschließlich Nordbecken

Tab. 6-2: Limnologische und morphometrische Kriterien [Jordan1986] [Koschel 1998]

Im Anschluß an die Eisschmelze im April 1996 kam es zur Sommerschichtung ohne einer vorhergehenden Vollzirkulation. Im Herbst und Winter 1996 blieb aufgrund der meteorologischen Bedingungen ebenfalls die Vollzirkulation aus. Erst im Februar 1997 wurde der schmale Luzin vollständig durchmischt.

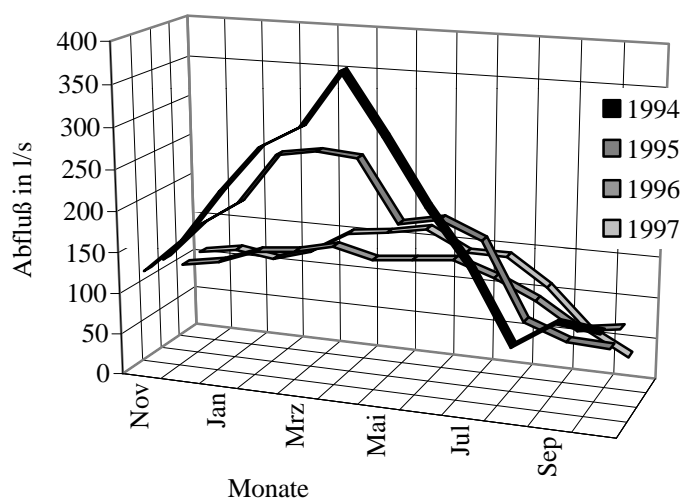


Abb. 6-3: Abfluß am Pegel Baek [STAUN1997]

Für 1996 ergaben sich folgende Temperaturverhältnisse im Carwitzer Becken: Im Epilimnion stieg die Temperatur im August auf Maximalwerte von 21,8 °C²⁸. Im Hypolimnion lag die Temperatur vor Inbetriebnahme der Anlage von Mai bis Juni zwischen 4,3 und 4,9 °C. Während des Betriebszyklus wurden die Temperaturen im Hypolimnion vergleichmäßig ohne das das Metalimnion beeinflusst wurde. Die Temperaturen betragen beispielsweise am 23. Juli 1996 in den Tiefen zwischen 10 und 30 m einheitlich 5,4 °C und am 2. Oktober 1996 zwischen 15 und 30 m einheitlich 5,7 °C. Das Metalimnion war während der gesamten Betriebszeit sehr stabil (Abb. 6-4). Ähnlich Aussagen gelten für 1997 (siehe Anlage Abb. A6-1/3).

Eutrophe Seen sind durch ein anoxisches Hypolimnion gekennzeichnet (O₂-Konzentration kleiner als 4,5 mg/l). Das Diagramm in der Abbildungen 6-5 zeigt die Sauerstoffkonzentration vor und während der hypolimnischen Belüftung für das Jahr 1996. Trotz Zugabe von Sauerstoff (Luft) hat sich das anoxische Milieu im Tiefenwasser nicht verändert. Für das Jahr 1997 zeigen die Diagramme (siehe Anlage Abb. A6-2 und A6-4) für das Carwitzer Becken und das Mittelbecken eine Zunahme der Sauerstoffkonzentration; in den Sommermonaten sogar bis über das Doppelten des Grenzwertes von 4,5 mg/l.

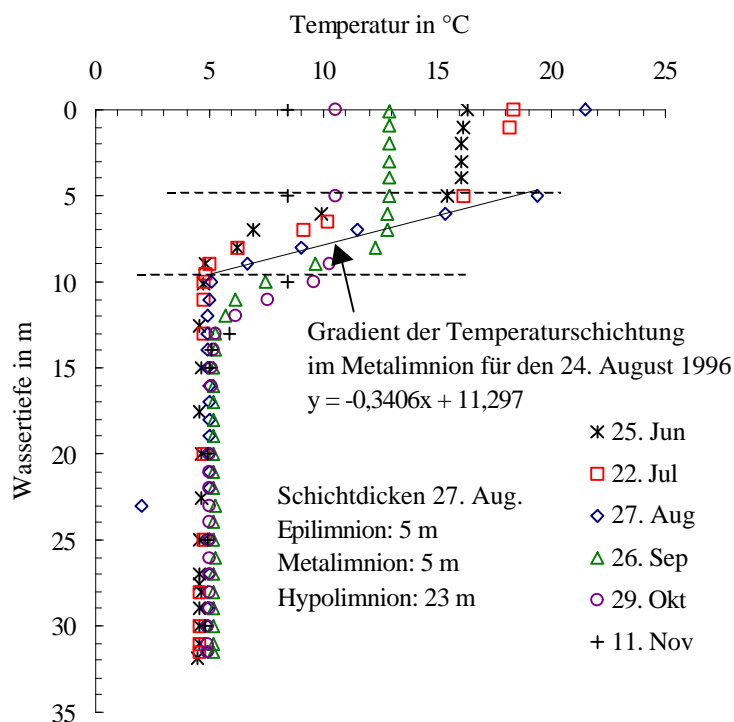


Abb. 6-4: Temperaturverteilung im Schmalen Luzin / Carwitzer Becken 1996 am Meßpunkt 0 (TIBEAN)

²⁸ Die Wassertemperatur der oberen Schicht des Epilimnions läßt sich gut an Hand der Lufttemperaturen korrelieren (siehe Anhang Abb. A6-7)

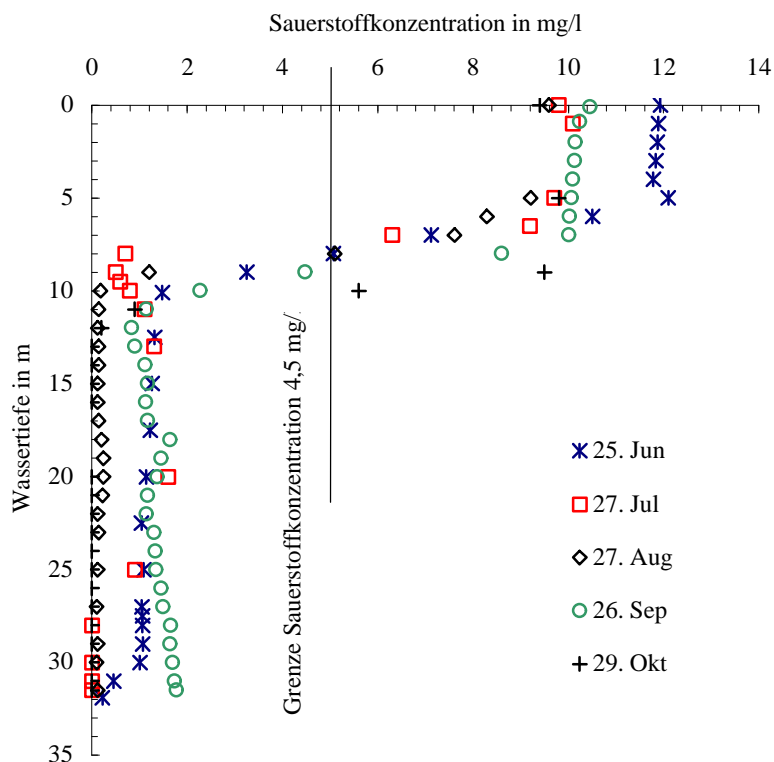


Abb. 6-5: Konzentrationsverteilung des Sauerstoffs im Schmalen Luzin / Carwitzer Becken 1996 am Meßpunkt 0 (TIBEAN)

6.3 Die Pilotanlage im Schmalen Luzin

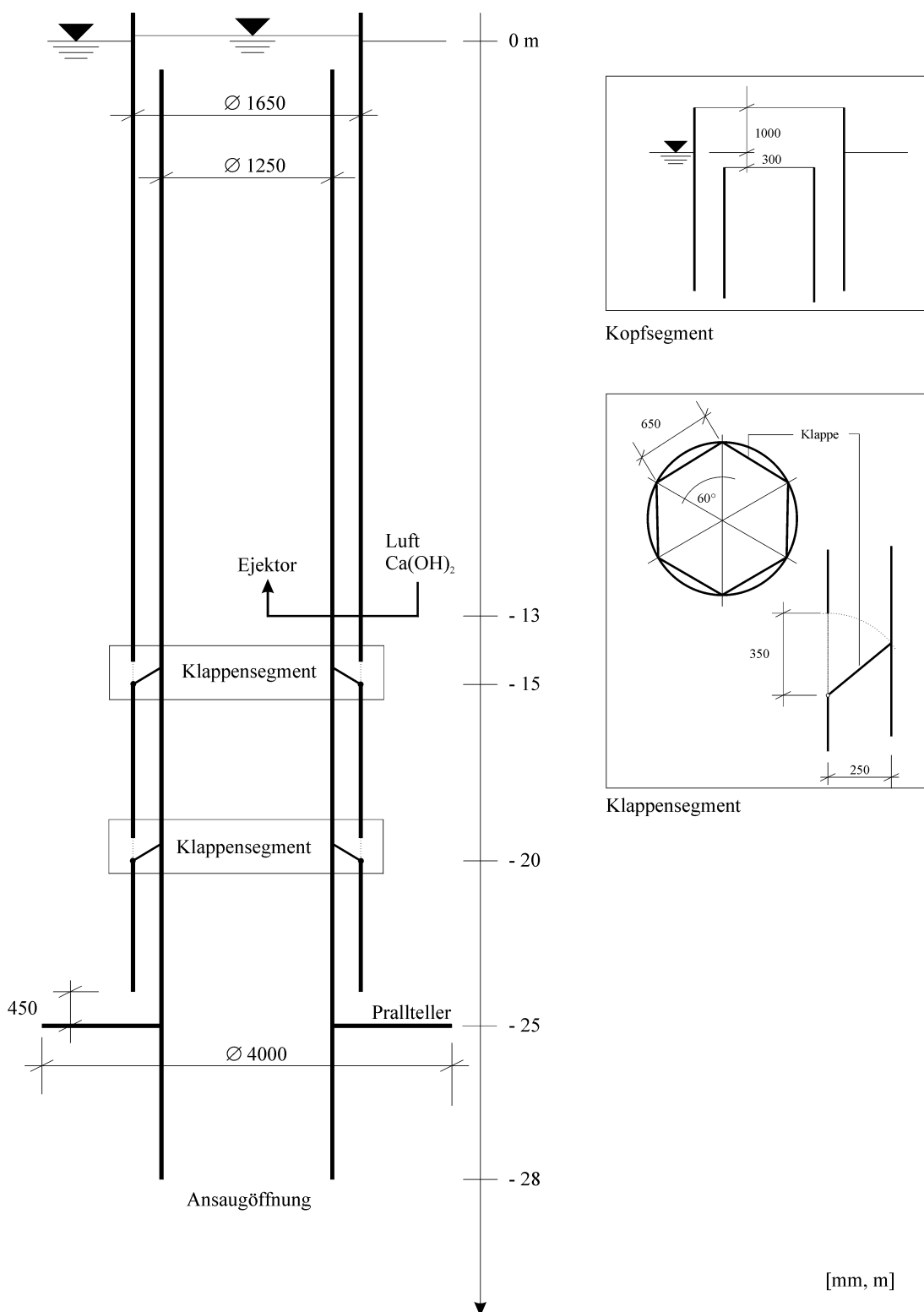
Die Pilotanlage kombiniert die hypolimnische $\text{Ca}(\text{OH})_2$ -Zugabe mit einer Tiefenwasserbelüftung unter Aufrechterhaltung der sommerlichen thermischen Schichtung. Sie besteht aus einer Tiefenwasserbelüftungsanlage, einem Bedienponton und einer Landstation (Abb. 6-6).

Die Pilotanlage gestattet eine pH-Wert-gesteuerte²⁹ und mengenvariable Einmischung von Kalkmilch in das Hypolimnion über Ausströmöffnungen in unterschiedlichen Tiefenhorizonten. Die TIBEAN (Abb. 6-7) entnimmt das Wasser aus der tiefsten Schicht des Hypolimnions über eine Rohrleitung (Steigrohr). In diese Leitung wird über einen Ejektor sowohl Luft als auch $\text{Ca}(\text{OH})_2$ zugegeben. Durch den Lufteintrag in das vertikale Steigrohr wird infolge des Mammutpumpeneffektes ein Wasserdurchfluß zwischen 3000 und 4400 m^3/h gefördert³⁰. An der Wasseroberfläche gast die Luft aus und das nur noch mit $\text{Ca}(\text{OH})_2$ befrachtete Wasser wird in den

²⁹ Bei einem pH-Wert von 9,5 schaltet die Anlage die Zufuhr von $\text{Ca}(\text{OH})_2$ ab.

³⁰ Für den Typ TIBEAN 1250 S wurden ein Durchfluß von 4374 m^3/h ermittelt.

2 (30 m³) und einer Kalkmilch-Anmischstation, des
weiteren gehört zur Station ein Misch- und Förderaggregat sowie ein Silo (16 m³)
zum Anmischen von 15 t 30 %-er Kalkmilch [HEISER1996] [KOSCHEL1998].



Je nach Betriebszyklus wurde die Pilotanlage im Carwitzer Becken oder im Mittelbecken an der jeweils tiefsten Stelle verankert. Die Landstation befindet sich am Steilufer des Schmalen Luzin.

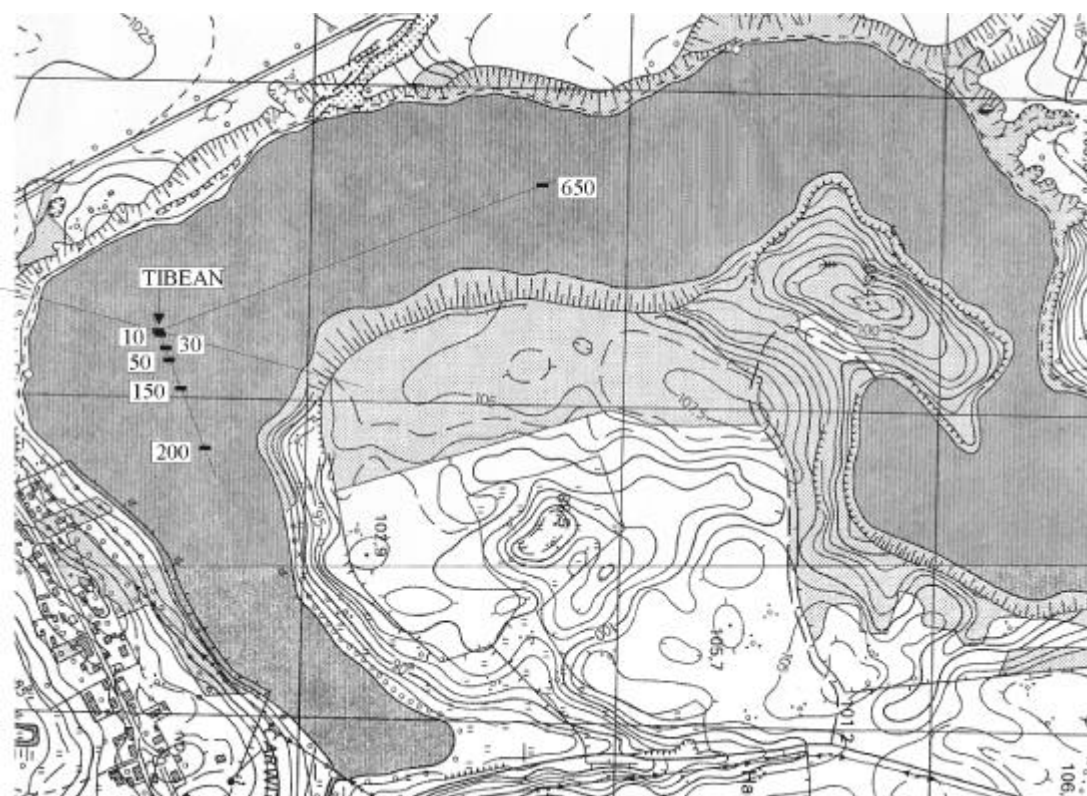
	1996 Carwitzer Becken	1996 Mittelbecken	1997 Carwitzer Becken	1997 Mittelbecken
Luft [m ³]	416.000	116.000	532.000	628.000
Ca(OH) ₂ [t]	140	-	91	96
Zyklen	26.06. – 04.09. 05.09. – 05.10.	20.08. – 04.09.	26.05. – 25.06. ¹ 20.08. – 14.10. ¹	26.06. – 19.08. ² 15.10. – 13.11. ²

¹davon Ca(OH)₂-Zugabe: 26.05. – 12.06. und 20.08. – 03.10.

²davon Ca(OH)₂-Zugabe: 26.06. – 19.08. und 15.10. – 05.11.

Tab. 6-3: Betriebszyklen, Ca(OH)₂-Zugabe und Belüftung im Schmalen Luzin 1996 und 1997 [KOSCHEL1998]

Im Jahre 1996 wurde nur im Carwitzer Becken die Anlage mit einer Ca(OH)₂-Zugabe betrieben. Dabei betrug der Eintrag von Ca(OH)₂ insgesamt 140 t und der Sauerstoffeintrag 400.000 m³ (siehe Anlage Abb. A6-5). Im darauffolgendem Jahr wurde auch das Mittelbecken mit Ca(OH)₂ und Sauerstoff beaufschlagt, dabei wurden 91 t Ca(OH)₂ in das Carwitzer Becken und 96 t Ca(OH)₂ in das Mittelbecken eingebracht (Tab.6-3) (siehe Anlage Abb. A6-6).



Im Carwitzer Becken wurden mit 7 Meßpunkten (Abb. 6-8) und im Mittelbecken mit 3 Meßpunkten unter anderem Temperatur, Leitfähigkeit, pH-Wert, Sauerstoffkonzentration und -sättigung im Freiwasser aufgenommen.

6.5 Angaben für die hydraulische Beurteilung

Für die Simulation der Ausbreitungsvorgänge muß aufgrund der Nichtbestimmbarkeit der hydraulischen Parameter mit Bereichen gearbeitet werden. Auch die, für eine Pilotanlage, typischen Anfangsschwierigkeiten bei der Dosierung und Zugabe der Inhaltsstoffe lassen nur eine Berechnung mit Bereichsgrenzen zu.

Die transportierte Wassermenge im TIBEAN wird in der technischen Beschreibung mit 3000 bis 4400 m³/h angegeben, wobei aus Vergleichsmessungen der TIBEAN im Sacrower See ein Durchfluß von 4374 m³/h ermittelt wurde. Aus dem Mantelrohrdurchmesser (1,65 m) und dem Steigrohrdurchmesser (1,25 m) läßt sich die Ringspaltfläche zu 0,911 m² und daraus abgeleitet eine mittlere Geschwindigkeit von 0,915 bis 1,342 m/s ableiten. Der effektive Austrittsquerschnitt ist 0,152 m² mit einem effektiven Durchmesser von 0,440 m.

Da im untersuchten Zeitraum nur die Klappen beaufschlagt wurden, braucht die hydraulische Wirkung des Pralltellers im folgenden nicht berücksichtigt werden. Das Klappensegment besteht aus sechs Öffnungen, die 650 mm lang und 350 mm hoch sind, die Austrittsfläche ist dann 6 x 0,2275 m². Wird wieder der gleiche Volumenstrom von 3000 bis 4400 m³/h für die Austrittsgeschwindigkeit herangezogen, so ergeben sich Werte zwischen 0,610 bis 0,895 m/s. Da diese Fließgeschwindigkeiten viel kleiner als die im Ringspalt sind und die Austrittsöffnung im Vergleich zum Ringspalt größer ist und somit einen geringeren Einfluß auf die Turbulenz des austretenden Fluids hat, ist die maßgebende Geschwindigkeit (Anfangsfließgeschwindigkeit) die im Ringspalt. Die Einleitgeometrie hat nur im Nahfeld des Strahls einen Einfluß, so daß der Rechteckquerschnitt der Öffnung zu einem effektiven Kreisquerschnitt umgesetzt werden darf, es gilt: $A_{\text{Recheck}} = A_{\text{Kreis}} = 0,2275 \text{ m}^2 \rightarrow d_0 = 0,538 \text{ m}$.

Die Austrittsrichtung des Strahls wird durch die Geometrie des Schließmechanismus bestimmt. Die Klappen legen sich an das Steigrohr an, was bei einer Öffnung von 350 mm und einem Spaltabstand von ca. 250 mm zu einem Winkel von 55° führt. Die Strahltrajektorie wird also aus der horizontalen um 55° nach unten abgelenkt.

Da nur im Nahfeld die Einleitgeometrie (hier Rechteck) einen Einfluß auf den Strahl hat, der im Fernfeld nicht mehr wirkt, kann die Annahme getroffen werden, daß der Strahl ein runder turbulenter Strahl ist. Seine Anfangsgeschwindigkeit ist dann 0,915

bis 1,342 m/s bei einem Volumenstrom von 0,139 bis 0,204 m³/s. Dabei ist jeder Klappe ein Strahl zugeordnet.

Die Zugabe von Kalziumhydroxid wurde mit einer Pumpe, die zwischen 100 und 700 l/h fördert, realisiert. Dabei schaltete sich die Pumpe aus, wenn ein pH-Wert von 9,5 erreicht wurde. Trotz dieser diskontinuierlichen Zugabe kann für die weitere Berechnung ein Mittelwert bestimmt werden. Denn auch die geringen Fließgeschwindigkeiten und die relativ großen Zeiträume zwischen den Meßaufnahmen lassen nur eine Abschätzung zu. Für die Überprüfung der Strahltheorie und der neuentwickelten Theorie wurde ein Zeitraum gewählt, bei dem eine relativ hohe und gleichmäßige Zugabe von Kalziumhydroxid erfolgte.

Datum	Zugabe pro Tag [l/d]	Zugabe Ca(OH) ₂ [l/h]	Konzentration der Lösung [%]
08.07.96	4901	204	31
09.07.96	10906	454	31
10.07.96	18358	765	31
11.07.96	10302	429	31
12.07.96	8240	343	31
13.07.96	13159	548	31
14.07.96	13225	551	31

Tab. 6-4: Zugabe von Ca(OH)₂ nach Betriebstagebuch TIBEAN Schmalter Luzin

Der erste Meßtermin für die hydraulische Auswertung der Ausbreitungsgeometrie ist der 12. Juli 1996. Bis zu diesem Zeitpunkt wurden insgesamt 48587 l Kalkmilch, was einer stündlichen Zugabe von 450 l entspricht, eingeleitet. Die Dichte für das Gemisch aus Kalkmilch und Seewasser ist nach Gl. [5-23] beispielsweise unmittelbar an der Ausleitung (15 m Klappe) zu $\rho_0 = 1,00036027 \text{ g/cm}^3$ für den 12.7.96 bestimmt worden.

Die Anfangsdichte des Strahls läßt sich aus der Dichte des unbeeinflussten Wassers in 28 m Tiefe berechnen, wobei die Zugabe von Kalkmilch mit 330 g/l berücksichtigt werden muß. Folgende Annahmen sind für die Berechnung erforderlich:

- Konzentration Kalkmilch: 330 g/l
- Zugabe Kalkmilch: 450 l/h
- Zugabe Tiefenwasser: 3000 bis 4400 m³/h
- Temperatur Tiefenwasser: 4,85 °C (28 m am 1.7.1996)
- Dichte Tiefenwasser: 1,00033062 g/cm³ (28 m am 1.7.1996)

Aus der Zumischung von Tiefenwasser zur Kalkmilch ergibt sich eine Konzentration für Ca(OH)_2 von 0,04949 bis 0,03375 g/l, was einer bezogenen Leitfähigkeit von 61,9 bis 42,2 $\mu\text{S/cm}$ entspricht. Die Dichte des Strahls unmittelbar an der Einleitung ist dann nach Gl. [5-23] von 1,00037024 bis 1,0003576 g/cm^3 .

7 Auswertung und Zusammenfassung

7.1 Die Konzentrationsverteilung von suspendierten Stoffen in fluiden Strahlen

Die Konzentrationsverteilung in einem fluiden Strahl wird über die Einmischrate bestimmt. Die Abnahme der Konzentration eines mitgeführten suspendierten Tracers erfolgt allein aus der Gleichgewichtsbetrachtung zwischen Anfangsvolumenstrom und Volumenstrom im Abstand x von der Einleitung. Der Gehalt an suspendiertem Tracer bleibt dabei konstant.

Unter der Annahme, daß das Kalziumhydroxid (74,1 g/mol) im TIBEAN vollständig zu Kalziumkarbonat (100,1 g/mol) reagiert, ergibt sich bei einer Zugabe von 450 l/h 30 %-iger Kalkmilch ein Massenstrom von 200,6 kg/h Kalziumkarbonat mit einer Reindichte von $\rho = 2,71 \text{ g/cm}^3$. Diese Annahme kann getroffen werden, da der Volumenstrom an gefördertem Tiefenwasser und die Zugabe von Luft eine genügende Menge an Reaktionspartnern bereitstellt. Die Zugabe von Kalzium (40,1 g/mol) erfolgt in Form von CaCO_3 mit 13,38 kg/h je Öffnung, was einer Anfangskonzentration von 18,22 mg/l entspricht.

Durch die Einmischung von Umgebungsflüssigkeit nimmt die Konzentration linear mit der Lauflänge des Strahls ab. Sie beträgt beispielsweise in einem Abstand von 57 m von der TIBEAN 0,863 mg/l und im Abstand von 650 m (MP 650) 0,078 mg/l (Abb.7-1), wobei letzterer Wert nur für den Fall der freien Turbulenz gilt. Da die Einschichtung nach einem Abstand von 69 m von der Einleitung erfolgt (Abb.7-3), ist für den weiteren Verlauf der Berechnung der Ca-Konzentration die Zunahme des Volumenstroms innerhalb der Schichtenströmung heranzuziehen.

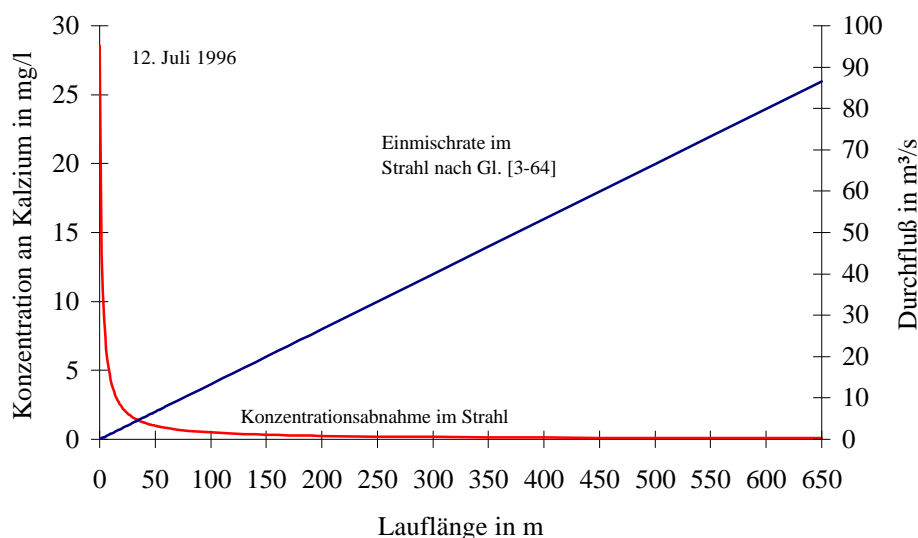


Abb. 7-1: Abnahme der Konzentration von Kalzium und Zunahme des Volumenstroms im Strahl im Schmalen Luzin / Carwitzer Becken am 12. 7.1996

Im Vergleich zu den Werten aus der Verdünnung im Strahl ist die Kalzium-Konzentration für eine Lauflänge des Wirbelrings bei einer 4-fachen Verdopplung des Wirbelringdurchmessers (57,26 m) 7,659 mg/l und bei $n = 7$ (439,18 m) 0,002 mg/l (Abb.7-2). Die Berechnung der Konzentrationsverteilung von suspendierten Stoffen mit Hilfe der Theorie nach Büniger liefert im vorliegenden Untersuchungsfall für den Bereich bis zu $x/d_0 = 450$ höhere Werte als bei der Verdünnung. Der Grund dafür ist, daß bei der Berechnung der Ca-Konzentration die mögliche maximal Transportkapazität für ein Wirbel bestimmt wird.

Aufgrund des großen Volumenstroms im Vergleich zur geringen Kalkmilchzugabe führte die Befruchtung des Tiefenwassers nicht zu einer Übersättigung mit Kalziumkarbonat. Dementsprechend entsteht eine große Differenz zwischen den Werten aus der Verdünnung und denen der maximalen Transportkapazität des Wirbels. Wird die Sättigung eines fluiden Strahles erreicht, so läßt sich mit dieser Theorie das Konzentrationsfeld im Strahl, auf Grundlage des ihn beschreibenden Wirbelsystems, berechnen [KRANAWETTREISER1996]³¹.

³¹ Anwendung auf die ZIRKULAN in der TS Bautzen.

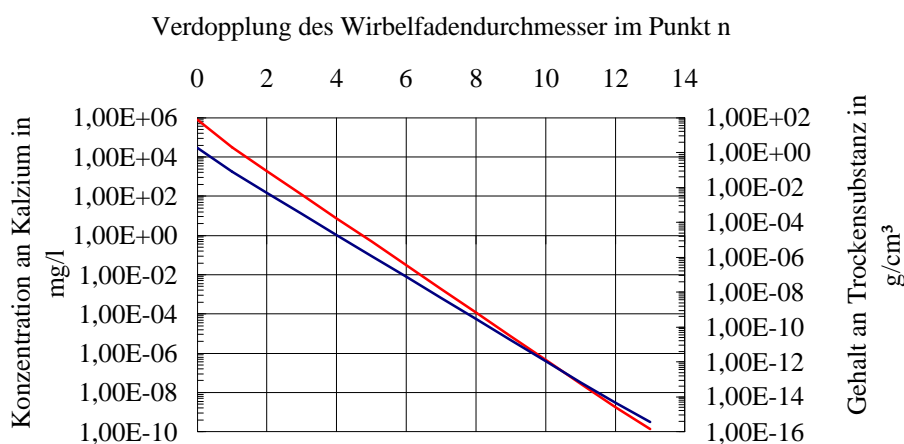


Abb. 7-2: Abnahme der Konzentration von Kalzium und Abnahme des Trockensubstanzgehaltes entsprechend der Theorie von Büniger im Schmalen Luzin / Carwitzer Becken am 12.7.1996 (rote Linie: Ca-Konzentration / blaue Linie: Trockensubstanzgehalt)

7.2 Ausbreitung der fluiden Strömung in Abhängigkeit der Dichteverhältnisse

Der fluide Strahl breitet sich solange entsprechend seinem Anfangsimpuls und seinem Auftrieb aus, bis er den Einschichtpunkt erreicht hat und in die horizontale Richtung umgelenkt wird. Nach Gl. [3-34] schichtet sich der Strahl (12.7.1996) im vertikalen Abstand vom Einleitungshorizont von 5,7 m ein, was in Verbindung mit Gl. [3-55/1] zu einem horizontalen Abstand vom Einleitungsort von 69 m führt. Maßgebend für die Bestimmung des Einschichtungspunktes sind die Dichteverhältnisse im Strahl und im Umgebungsmedium. Die Dichte des Strahls läßt sich unter Zuhilfenahme der Gl. [5-23] am Austrittsquerschnitt berechnen. Sie beträgt $\rho_0 = 1,0003576 \text{ g/cm}^3$. Dieses Ergebnis stimmt gut mit der berechneten Dichte entsprechend den gemessenen Parameter am 12.7.1996: Leitfähigkeit, Temperatur und pH-Wert von $\rho_0 = 1,00036027 \text{ g/cm}^3$ überein. Für das Umgebungsfluid ist die Dichte, nach Mittelung über 3 Meßtage bei relativ konstanten meteorologischen Bedingungen, $\rho_0 = 1,000330 \text{ g/cm}^3$.

Die maximal mögliche Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Schicht, hervorgerufen durch den vorhandenen Dichtegradient (Abb. 7-4), ist nach Gl. [3-70/2] in der Abbildung 7-5 dargestellt.

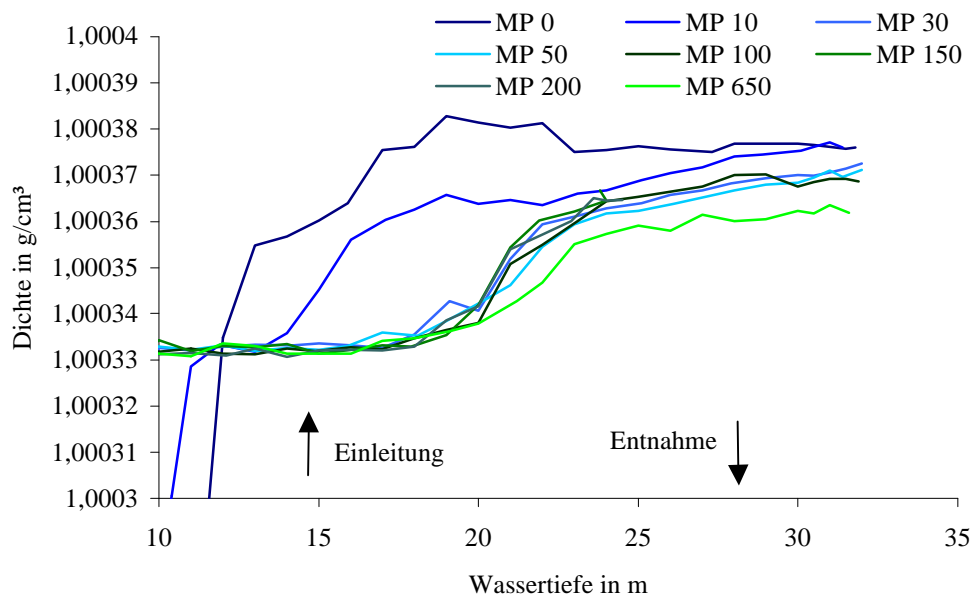


Abb. 7-4: Dichteverteilung im Hypolimnion im Schmalen Luzin / Carwitzer Becken am 12.7.1996

Die Abbildung 7-4 spiegelt die Tatsache wieder, daß im Gegensatz zur horizontal gerechneten Strahltrajektorie eine Umlenkung um 55° in vertikaler Richtung, entsprechend der Klappenstellung, erfolgt. Die Auslenkung der Trajektorie hat aber nur einen Einfluß auf den Nahbereich bis 10 m (MP 10).

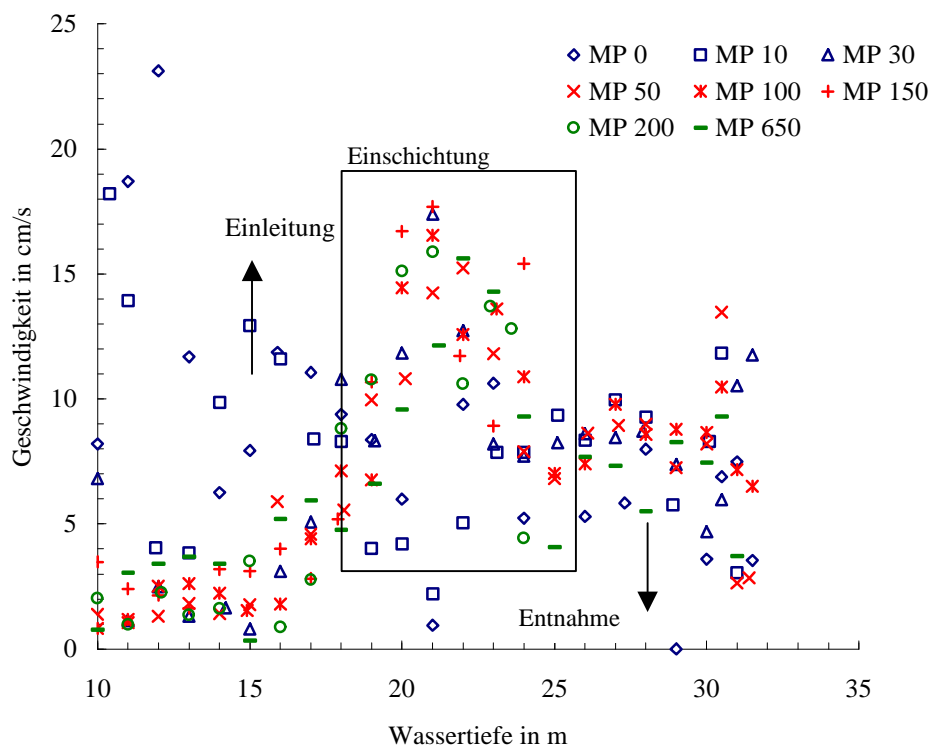


Abb. 7-5: Potentielle Ausbreitungsgeschwindigkeit im Hypolimnion im Schmalen Luzin / Carwitzer Becken am 12.7.1996

Schon im Meßprofil in 50 m Entfernung und weiter, sind die Dichteprofile einander ähnlich. So daß man davon ausgehen kann, daß sich der Strahl in einem Tiefenbereich zwischen 20 m und 25 m einschichtet, was auch die Berechnungen bestätigen. Aufgrund der gegebenen Dichteprofile sind maximale Ausbreitungsgeschwindigkeiten von 10 cm/s bis 15 m/s möglich.

Die Berechnung der Konzentrationsverteilung in Folge Verdünnung führt, bei Tracern die mit der Laufentwicklung des Strahls ausfallen, zu unrealen Transportkapazitäten. Erst die Einführung der Theorie nach Bünger ermöglicht dies. Des weiteren kann die Theorie nach Bünger auch auf Dichteströmungen angewendet werden.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß das entwickelte Verfahren für die Berechnung turbulenter Freistrahlen im Rahmen der gemachten Vereinfachungen sehr gute Ergebnisse liefert. Für weitere Untersuchungen birgt dieser Ansatz interessante Einsichten in die turbulenten Vorgänge bei Strömungen mit mehreren Phasen bzw. Dichtedifferenzen.

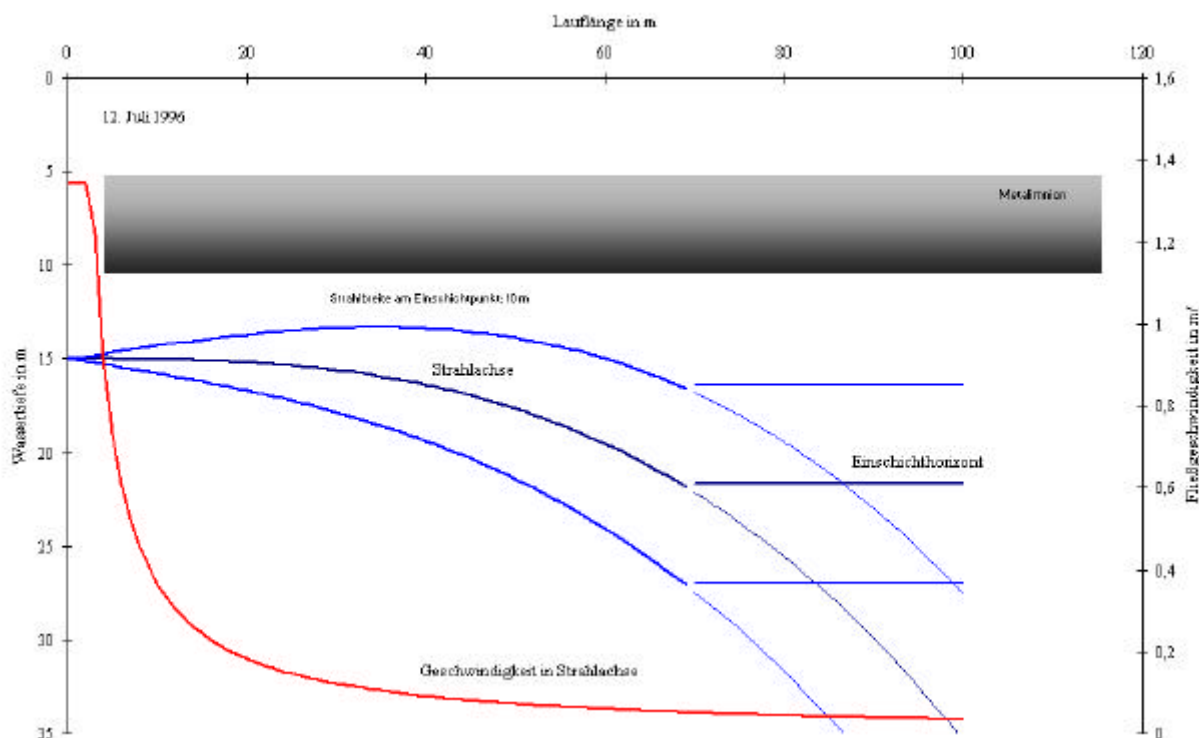


Abb. 7-3: Strahlentwicklung und Einschichtung im Schmalen Luzin / Carwitzer Becken am 12. Juli 1997

8 Literaturverzeichnis

- ABRAHAM1963 Abraham, G
Jet diffusion in stagnant ambient fluid
TU Delft, Dissertation 1963
- ABROMOVICH1963 Abromovich, GN
The theory of turbulent jets
MIT Press, Cambridge, Mass., 1963
- ALBRING1970 Albring, W
Angewandte Strömungslehre
Verlag Theodor Steinkopff Dresden 1970
- ALBRING1981 Albring, W
Elementarvorgänge fluider Wirbelbewegungen
Akademie Verlag 1981
- ANTROPOV1998 Antropov, I
Numerical simulation of shear flow and ring vortex interaction
DISSERTATION, FLORIDA INST. OF TECHNOLOGY 1998
- BECKER1967 Becker, HA / Hottel, HC / Williams, GC
The nozzle-fluid concentration field of the round, turbulent,
free jet
J. Fluid Mech. (1967), Vol. 30, Part 2, pp. 285-303
- BELETSKY1994 Beletsky, DV / Filatov, NN / Ibraev, RA
Hydrodynamics of Lakes Ladoga and Onega
Water Poll. Res. J. Canada, 1994, Vol. 29, No. 2/3, 365-383
- BETSCHLOR1973 Betschelor, D
Wedenije w dynamiku schidkosti 1973
- BETZ1932 Betz
Verhalten von Wirbelsystemen
Zeitschr. f. angew. Math. und Mech. Bd 12 H 3 1932
- BMBF1996 Forschungsvorhaben "Stehende Gewässer"
BMBF Statusseminar Dresden 1996
- BOHLE1983 Bohle, M
QUALITATIVE EIGENSCHAFTEN INTERNER BEWEGUNG DES
GENFERSEES
Schweiz.Z.Hydrol. 45/1.1983-196 ff 1983

- BORN1975 Born, U
Einleitung von gereinigtem Abwasser in den Brienzersee bei
Iseltwald
GWA 55.Jg.1975 Nr.3-197 ff
- BOZZOLO1983 Bozzolo, D et.al.
Mathematische Modelle zur Simulation von
Zirkulationsströmungen in einem See
Schweiz.Z.Hydrol. 45/1.1983-145 ff 1983
- BREUER1996 Breuer, M
Large-Eddy-Simulation
In: Rodi, W
Numerische Berechnung turbulenter Strömungen in Forschung
und Praxis
Kurzlehrgang 1996
Institut für Hydromechanik, Universität Karlsruhe
- BÜHRER1975 Bühler, H / Ambühl, H
Die Einleitung von gereinigtem Abwasser in Seen
Hydrologie 37/2,1975
- CHEN1977 Chen, Chen-Tung / Millero, Frank J
The use and misuse of pure water PVT properties for lake
waters
Nature Vol 266 Apr 1977 p 707 f
- CHIN-CHOU1995 Chin-Chou, C et.al.
A vortex ring iminging on a solid plane surface – Vortex
structure and surface force
Phys.Fluids 7(6), June 1995-1391 ff
- DAVIES1963 Davies, P O A L / Fisher, M J / Barratt M J
The characteristics of the turbulence in the mixing region of a
round jet
J. Fluid Mechanics 15, pp. 337-367, 1963
- DITTRICH1997/A Dittrich, M / Dittrich, T / Sieber, I / Koschel, R
A balance analysis of phosphorus elimination by artifical
Calcite precipitation in a stratified hardwater lake
Wat. Res. Vol. 31, No. 2., pp. 237-248,1997
- DITTRICH1997/B Dittrich, M / Heiser, A / Koschel, R
Induzierte Calcitfällung zur Restaurierung eutropher Seen am
Beispiel des Schmalen Luzin (Nord-Ost-Deutschland)
Vom Wasser, 89, 321-337 (1997)

- DITTRICH1998 Dittrich, M
Phosphorelimination in geschichteten Hartwasserseen durch
hypolimnisch induzierte Kalzitfällung kombiniert mit
Tiefenwasserbelüftung
Brandenburgische Technische Universität, Diss. 1998
- DURST1977 Durst, F / Simons, M
Beitrag zur Theorie der Wirbelringbewegung
Universität Karlsruhe, SFB 80/T/108 1977
- DVWK1988 Sanierung und Restaurierung von Seen
DVWK Merkblatt zur Wasserwirtschaft
213/1988
- FERNANDEZ1994 Frenandez, V M et.al.
Near-singular collapse and local intensification of a
„Lissajous-elliptic“ vortex ring
Phys. Fluids 6(7), July 1994 –2242 ff
- FLETCHER1991 Fletscher, CAJ
Computational Techniques for Fluid Dynamics
Springer Verlag, Berlin, 1991
- FREIMANN1998 Freimann, R
Einfluß verschiedener Öffnungsgeometrien auf die
Entwicklung turbulenter Strahlen
Mitteilungsheft 64, TU München, Lehrstuhl für Hydraulik und
Gewässerkunde, 1998
- GÄCHTER1983 Gächter, R et.al.
Mögliche Maßnahmen zur Restaurierung des Sempachersees
Schweiz.Z.Hydrol. 45/1.1983-246 ff 1983
- GELHAR1966 Gekhar, W / Mascolo, M
Non-diffusive characteristics of slow viscous stratified flow
towards a line sink
Report No. 88/1966, Hydrodynamics Laboratory, MIT
- GEORGE1977 George, Willian K / Alpert, Ronald L / Tamanini, Francesco
Turbulence measurements in an axisymmetric buoyant plume
Int. J. Heat Mass Transfer. Vol. 20 pp. 1145-1154, 1977
- GÖRTLER1942 Görtler, H
Berechnung von Aufgaben der freien Turbulenz auf Grund
eines neuen Näherungsansatzes
Zeitschr. f. angew. Math. und Mech. Bd 22 H 5 1942
- GOSENS1979 Gossens, LHJ
Reservoir destratification with bubble columns
TU Delft, Dissertation 1979

- GRAF1983 Graf, W H
Hydrodynamics of the Lake of Geneva
Schweiz.Z.Hydrol. 45/1.1983-62 ff 1983
- GRIEBEL1995 Griebel, M et al.
Numerische Simulation in der Strömungsmechanik
Vieweg Verlag, Braunschweig, 1995
- GRINSTEIN1995 Grinstein, F E
Self-induced vortex ring dynamics in subsonic rectangular jets
Phys.Fluids 7(10), Oct 1995
- Hakanson1981 Hakanson, L
A Manual of Lake Morphometry
Springer Verlag Berlin 1981
- Heiser1996 Heiser, A / Koschel, R
Künstlich induzierte Kalzitfällung mit Tiefenwasserbelüftung
im Schmalen Luzin – Erste Ergebnisse
Deutsche Gesellschaft für Limnologie, Jahrestagung 1996 –
Schwedt. Erweiterte Zusammenfassung: 236-240
- HELMHOLTZ1858 Helmholtz, H
Ueber Wirbelbewegungen
Wilhelm Engelmann 1858
- HENNING1988 Henning, Otto
Naturwissenschaftliches Grundwissen für Ingenieure des
Bauwesens, Band 1: Chemie im Bauwesen
Verlag für Bauwesen, Berlin 1988
- Hepperle1996 Hepperle, D / Krienitz, L
The extracellular calcification of zoospores of *Phacotus*
lenticularis (Chlorophyta, Chlamydomonadales)
European Journal of Phycology No. 31, pp. 11-21, 1996
- HINZE1966 Hinze, J O
Turbulence
McGraw-Hill Book Company, 1966
- HOLLAN1987 Hollan, E et.al.
Comparison of multisonde observations with a model of
thermal stratification in Lake Constance
Lausanne / AIRH-IAHR Congress 111 ff 1987
- HUPFER1997 Hupfer, M et.al.
Konzeptionelle Ansätze zur Steuerung des Phosphat-Haushaltes
von Seen durch interne Maßnahmen
Wasser&Boden 49. Jg. 12/1997

- HUTTER1975 Hutter, K / Trösch, J
Über die hydrodynamischen und thermodynamischen
Grundlagen der Seezirkulation
Mitt. VAW Nr. 20, 1975
- HUTTER1978 Hutter, K
Die Einleitung von Abwasser in Seen
GWA 58.Jg. 1978 Nr.5-257 ff
- HUTTER1983/A Hutter, K
Strömungsdynamische Untersuchungen im Zürich- und im
Luganersee
Schweiz.Z.Hydrol. 45/1.1983-101 ff
- HUTTER1983/B Hutter, K
Hydrodynamics of Lakes
Springer Verlag 1983
- HUTTER1995 Hutter, K
Fluid- und Thermodynamik
Springer Verlag, Berlin, 1995
- HUTTER1996 Hutter, Kolumban
Dynamik umweltrelevanter Systeme
Springer Verlag Berlin 1996
- IMBODEN Imboden, D
Mixing and Transport in Lakes: Mechanisms and Ecological
Relevance
- IWASA1987 Iwasa, Y et.al.
Eutrophication processes in stratified reservoirs
Lausanne / AIRH-IAHR Congress 202 ff 1987
- JOHANNSEN1998 Johannsen, K / Ferrarini, D
Diagramm zur Berechnung des Kalk-Kohlensäure-
Gleichgewichts in der Trinkwasseraufbereitung
bbr 6/98, 49. Jg., S. 16 ff
- JORDAN1986 Jordan, H-J / Jordan, M / Richter, WM
Topographisch-morphometrische Erfassung der Gewässer der
Feldberger Seenlandschaft unter limnologischen Aspekten
In: Natur und Naturschutz in Mecklenburg, Band 13,
Greifswald – Waren, 1986
- KIYA1992 Kiya, M et.al.
Numerical simulation and flow-visualization experiment on
deformation of pseudo-elliptic vortex rings
Fluid Dynamic Research 10(1992)117-131 North-Holland

- KOBUS1983 Kobus, H et.al.
Durch Luftblasen erzeugte Auftriebsstrahlen
Wasserwirtschaft 73(1983)11-393 ff
- KOEHLER1989 Koehler, G
Untersuchungen zum maßgebenden Windereignis für die
Bemessung des Freibords von Rückhaltebecken und
Talsperren
Wasserwirtschaft 79 (1989) 1
- KOLECNIKOVA1982 Kolecnikova, A W et.al.
Turbulentneuje
Moskau 1982
- KONSTANTINOV 1991 Konstantinov, M et.al.
Motion of a Vortex Ring generated in an Ideal Fluid near Solid
Walls
Fluid Mechanocs-Soviet Research, Vol.20,No.3,May-June
1991-1 ff
- KOSCHEL1997 Koschel, R / Babenzien, H-D / Casper, P / Dittrich, M /
Gonsiorczyk, T / Heiser, A / Hepperle, D / Kasprzak, P /
Krienitz, L. / Roßberg, R / Schlegel, I
Vom Calcitkristall zur Gewässerökotechnologie
Jahresforschungsbreicht 1996, Heft 4/1997, Berichte des IGB
- KOSCHEL1998 Koschel, R / Dittrich, M / Casper, P / Gonsiorczyk, T / Heiser,
A /Hepperle, D / Rossberg, R
Induzierte hypolimnische Calcitfällung zur Restaurierung
geschichteter eutropher Seen
Abschlußbericht des BMBF-Forschungsvorhabens
“Maßnahmen zur Beseitigung nutzungseinschränkender
Qualitätseigenschaften stehender Gewässer“ 1993-1998
- KRAATZ1989 Kraatz, W
Flüssigkeitsstrahlen
in:
Bollrich et.al., Technische Hydromechanik Bd. 2
Verlag für Bauwesen, Berlin 1989
- KRANAWETTREISER 1999 Kranerwetteiser, J
Transportprozesse in stehenden Gewässern
Bauhaus-Universität Weimar, 1999 (unveröffentlicht)
- KRANAWETTREISER 1987 Kranawetteiser, Joerg
Auslegung der Destratifikationsanlage für den Speicher
Deesbach
Arbeitsbericht 1987

- KRANAWETTREISER 1988 Kranawettreiser, J
Schwingungen im Zusammenhang mit Strömungsvorgängen
Bericht 1988, Hydrolabor Schleusingen, (unveröffentlicht)
- KRANAWETTREISER 1992 Kranawettreiser, J
Hydromechanische Grundlagen für eine verbesserte
Bemessung von Sedimentationsanlagen
Wissenschaftliche Zeitschrift HAB Heft 1/2 Ausgabe B 1992
- KRANAWETTREISER 1996 Kranawettreiser, J
Strahlinduzierte Wirbelsysteme als Mittel zur Förderung des
Stofftransportes
BMBF-Statusseminar, Dresden 1/2 Oktober 1996
- KÜCHLER 1990 Küchler-Krischun, J
Nukleierung der Calcitfällung durch Phytoplanktonalgen
Universität Konstanz, Diss. 1990
- LANDOLT 1985 Landolt-Börnstein
Physikalisch-chemische Tabellen
Springer Verlag, Berlin, 5. Auflage, 1985
- LEUTHEUSSER 1987 Leutheusser, H J et.al.
Dependence of Wind set-up on Reynolds Number of induced
Flow
Lausanne / AIRH-IAHR Congress 132 ff 1987
- LI 1987 Li, W
Vertical plane buoyant jets in static environment
Lausanne / AIRH-IAHR Congress 155 ff 1987
- LIESS Liess, C et.al.
Experimente zum Einfluß der Anfangsbedingungen auf die
Instabilität von Ringwirbeln
ZAMM T 206 ff
- LIST 1982/A List, E J
Mechanics of turbulent buoyant jets and plumes
in:
Rodi, Wolfgang; Turbulent buoyant jets and plumes
Pergamon Press Ltd. Oxford, 1982
- LIST 1982/B List, E J
Turbulent jets and plumes
Ann. Rev. Fluid Mech. 14: 189-212, 1982
- LONGMIRE 1992 Longmire, Ellen K / Eaton, John K
Structure of a particle-laden round jet
J.Fluid Mech. (1992) vol. 236 pp 217 ff

- LUGOWZOW.1975 Lugowzow, B A
Über die Bewegung eines turbulenten Wirbelrings und den
durch sie bedingten Stofftransport
Uni Karlsruhe SFB 80/TE/50 1975
- MAGYAR1932 Magyar, F
Das Wirbelsystem der ebenen turbulenten Strömung
Zeitschr. f. angew. Math. und Mech. Bd 12 H 3 1932
- MARCO1995 Marco
Towards numerical modelling of cooling water discharges and
related phenomena
Delft Hydraulics 1995
- MARCUS1994 Marcus, D L et.al.
Numerical simulation of viscous vortex ring interaction with a
density interface
Phys. Fluids 6(4), Apr 1994 –1505 ff
- MARJANOVIC1987 Marjanovic, N et.al.
Effect of density stratification on water quality
Lausanne / AIRH-IAHR Congress 179 ff 1987
- MENG1995 Meng, H et.al.
Instantaneous flow field in an unstable vortex ring measured
by holographic particle velocimetry
Phys.Fluids 7(1),Jan 1995
- MORTIMER1974 Mortimer, C H
Lake hydrodynamics
Mitt. Internat. Verein. Limnol. 20 /Stuttgart/ S.124-197 1974
- MÜLLER1933 Müller, W
Laminare Ausbreitungsvorgänge in der zähen Flüssigkeit
Zeitschr. f. angew. Math. und Mech. Bd 13 H 6 1933
- NITSCHKE1994 Nitsche, M et.al.
A numerical study of vortex ring formation at the edge of a
circular tube
J.Fluid Mech. (1994), vol. 139 ff
- NOUTSOPOULOS
1987 Noutsopoulos, G et.al.
The round vertical Jet with negative buoyancy
Lausanne / AIRH-IAHR Congress 142 ff 1987
- NYFFELER1983 Nyffeler, U et.al.
Chemical and geochemical studies of Lake Biel
II. A chemical approach to lake mixing
Schweiz.Z.Hydrol. 45/1.1983-45 ff 1983

- PAPANICOLAOU 1988 Papanicolau, Panos N / List, E John
Investigations of round vertical turbulent buoyant jets
J. Fluid Mech. 195 pp. 314-391, 1988
- PAUL1934 Paul, E
Bewegung eines Wirbels in geradlinig begrenzten Gebieten
Zeitschr. f. angew. Math. und Mech. Bd 14 H 2 1934
- PEDRIZZETTI1991 Pedrizzetti, G
Vortex ring – moving sphere chaotic interaction
Entropy and energy dissipation in water resource
Conf. 26-28 June 1991, Maratea, Italy
- POLICASTRO1973 Policastro, A J
Thermal discharges into lakes and cooling ponds
ASCE 1973
- POPPE1978 Poppe, Wilfried
Theoretische Untersuchung stationärer Ringwirbelströmungen
mit unstetiger Wirbelstärkenverteilung
MPI für Strömungsforschung, Bericht 29/1978
- PRANDEL1993 Prandel, L / Oswatisch, K / Wieghardt, K
Führer durch die Strömungslehre
Vieweg Verlag, Braunschweig, 1993
- PRANDTL1942 Prandtl, L
Bemerkungen zur Theorie der freien Turbulenz
Zeitschr. f. angew. Math. und Mech. Bd 22 H 5 1942
- PROFT1993 Proft, G / Stutter, E
Calcite Precipitation in Hard Water Lakes in Calculation and
Experiment
Int. Revue ges. Hydrobiol. 78, 1993, 2, pp. 177-199
- QU-YUAN1995 Qu-Yuan, Y et.al.
Unsteady evolutions of vortex ring
Phys.Fluids 7(4), Apr 1995-795 ff
- RAJARATNAM1976 Rajaratnam, N
Turbulent jets
Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam 1976
- RECKNAGEL1980 Recknagel, A
Physik, Bd. Mechanik
VEB Verlag Technik Berlin 1980
- REICHARDT1940 Reichardt, H
Die Wärmeübertragung in turbulenten Reibungsschichten
Zeitschr. f. angew. Math. und Mech. Bd 20 H 6 1940

- REICHARDT1941 Reichardt, H
Über eine neue Theorie der freien Turbulenz
Zeitschr. f. angew. Math. und Mech. Bd 21 H 5 1941
- REICHARDT1951 Reichardt, Hans
Gesetzmäßigkeiten der freien Turbulenz
VDI Forschungsheft 414, Düsseldorf , 2.Auflage 1951
- RODI1978 Rodi, W
Turbulenzmodelle und ihre Anwendung auf Probleme des
Wasserbaus
Habilitationsschrift, Mai 1978
Institut für Hydromechanik, Universität Karlsruhe
- RODI1982 Rodi, Wolfgang
Turbulent buoyant jets and plumes
Pergamon Press Ltd. Oxford, 1982
- RODI1996 Rodi, W
Numerische Berechnung turbulenter Strömungen in Forschung
und Praxis
Kurzlehrgang 1996
Institut für Hydromechanik, Universität Karlsruhe
- ROTTA1971 Rotta, J C
Turbulente Strömung
B.G.Teubner 1971
- RUDEN1933 Ruden, P
Turbulente Ausbreitungsvorgänge im Freistrahle
Naturwissenschaften, Berlin: 21 (1933) H. 5
- SAFFMANN1992 Safmann, P G
Vortex Dynamics
Cambridge University Press 1992
- SCHATZMANN1983 Schatzmann, M
Integralverfahren zur Berechnung von Auftriebsstrahlen
Wasserwirtschaft 73(1983)11-416 ff
- Schlichting1933 Schlichting, Hermann
Laminare Strahlausbreitung
Zeitschr. f. angew. Math. und Mech. Bd 13 H 4 1933
- SCHLICHTING1965 Schlichting, Hermann
Grenzschicht-Theorie
Verlag G. Braun, Karlsruhe, 5. Auflage 1965

- SCHNEIDER1980 Schneider, H H
Turbulentes Entrainment über eine Dichtezwischenschicht mit
einem Freistrahls als Turbulenzquelle
TU Berlin Mitt. Nr. 97 1980
- SCHNEIDER1982 Schneider P E M
Structure and behavior of a turbulent ring vortex
Max-Planck-Inst. Bericht Nr. 12/1982
- SCHOLZ1990 Scholz, R
Umwälzung und Destratifikation durch linienförmigen
Drucklufteintrag
Dissertation TU Dresden 1990
- SCHWOERBEL1993 Schwoerbel, J
Einführung in die Limnologie
Gustav Fischer Verlag, Jena, 1993
- SHARIFF1992 Shariff, K et.al.
Vortex Rings
Annu.Rev.Fluid Mech. 1992. 24:235-79
- SHARIFF1994 Shariff, K et.al.
A numerical study of three-dimensional vortex ring
instabilities: viscous corrections and early nonlinear stage
J.Fluid Mech. (1994), vol.279, pp351-375
- SHIMIZU1995 Shimizu, S
Simulation of Axisymmetric Jet Issuing from a Nozzle with
Collar
JSME International Journal, Series B, Vol.38,No.1,1995
- SIGLOCH1996 Sigloch, H
Technische Fluidmechanik
VDI Verlag, Düsseldorf, 1996
- SIMONS1972 Simons, TJ
Development of numerical models of Lake Ontario
Conf. great Lakes Res. IAGLR 15, pp. 655-672 (1972)
- SMITH1976 Smith, M / Martell, AE
Critical stability constants
Vol. 4, Inorganic Complexes,
Plenum Press, New York, 1976
- SPURK1992 Spurk, JH
Dimensionsanalyse in der Strömungslehre
Springer Verlag 1992

- SPURK1996 Spurk, JH
Strömungslehre
Springer Verlag, Berlin, 1996
- STAUN1997 Staatliches Amt für Umwelt und Natur in Neubrandenburg
Abt. Hydrologie
17033 Neubrandenburg, Oelmühlenstraße 19
- TAUS1983 Taus, K
Ausbreitung eines Abwasserauftriebsstrahls in einem See-
Verifikation eines mathematischen Modells in der Natur
Schweiz.Z.Hydrol. 45/1.1983-177 ff 1983
- TENNEKES1972 Tennekes, H / Lumley, JL
A First Course in Turbulence
MIT Press, 1972
- THOMAS1969 Thomas, E A
Untersuchungen über die Auswirkungen und Folgen der
Einschichtung von Abwässern in Seen
GWA 49.Jg. 1969 Nr.11-378 ff
- TOLLMIEN1935 Tollmien, W
Über die Korrelation der Geschwindigkeitskomponenten in
periodisch schwankenden Wirbelverteilungen
Zeitschr. f. angew. Math. und Mech. Bd 15 H ½1935
- TRÖSCH1983 Trösch, J
Schichtungs- und Strömungsprobleme in Seen
Schweiz.Z.Hydrol. 45/1,1983
- TRUCKENBRODT
1988 Truckenbrodt, E
Lehrbuch der angewandten Fluidmechanik
Springer Verlag, Berlin, 1988
- TURNER1973 Turner, JS
Buoyancy Effects in Fluids
University Press, Cambridge, 1973
- VIRK1994 Virk, D et.al.
Dynamics of a polarized vortex ring
J.Fluid Mech. (1994) vol. 260 pp 23 ff
- VISCHER1976 Vischer, Daniel
Die Einleitung von Abwasser in Seen
GWA 56.Jg. 1976 Nr.5-363 ff
- VISCHER1977 Vischer, Daniel
Die Einleitung von Abwasser in Seen
GWA 57.Jg. 1977 Nr.5-395 ff

- WAGNER1980 Wagner, R
Temperaturkorrekturfaktoren für die elektrische Leitfähigkeit
von natürlichen Wässern
Z. Wasser Abwasser Forsch. 13(2), 62 ff, 1980
- WAGNER1996 Wagner, R
Temperaturkorrekturfaktoren für die Umrechnung von
Meßwerten der elektrischen Leitfähigkeit von natürlichen

Z. Wasser Abwasser Forsch. 13 (2):62 ff
in: Hölting, Bernward, Hydrogeologie, Ferdinand Enke Verlag,
Stuttgart 1996
- WIEGHARDT1956 Wieghardt, K
Theoretische Strömungslehre
Teubner 1956
- WU1995 Wu, J et.al.
Numerical Study of Wind-Induced Water Currents
J. of Hydraulic Eng. / May 1995- 388 ff
- WYGNANSKI1969 Wagnanski, I / Fiedler, H
Some measurements in the self-preserving jet
Journal of Fluid Mechanics, Vol. 38, Part3, pp. 577-612, 1996
- YAMASAKI1991 Yamasaki, H et.al.
Forming 2-dimensional jet flow by vortex ring in fluidic
devices
FLUCOME '91 ASME 1991 – 291ff

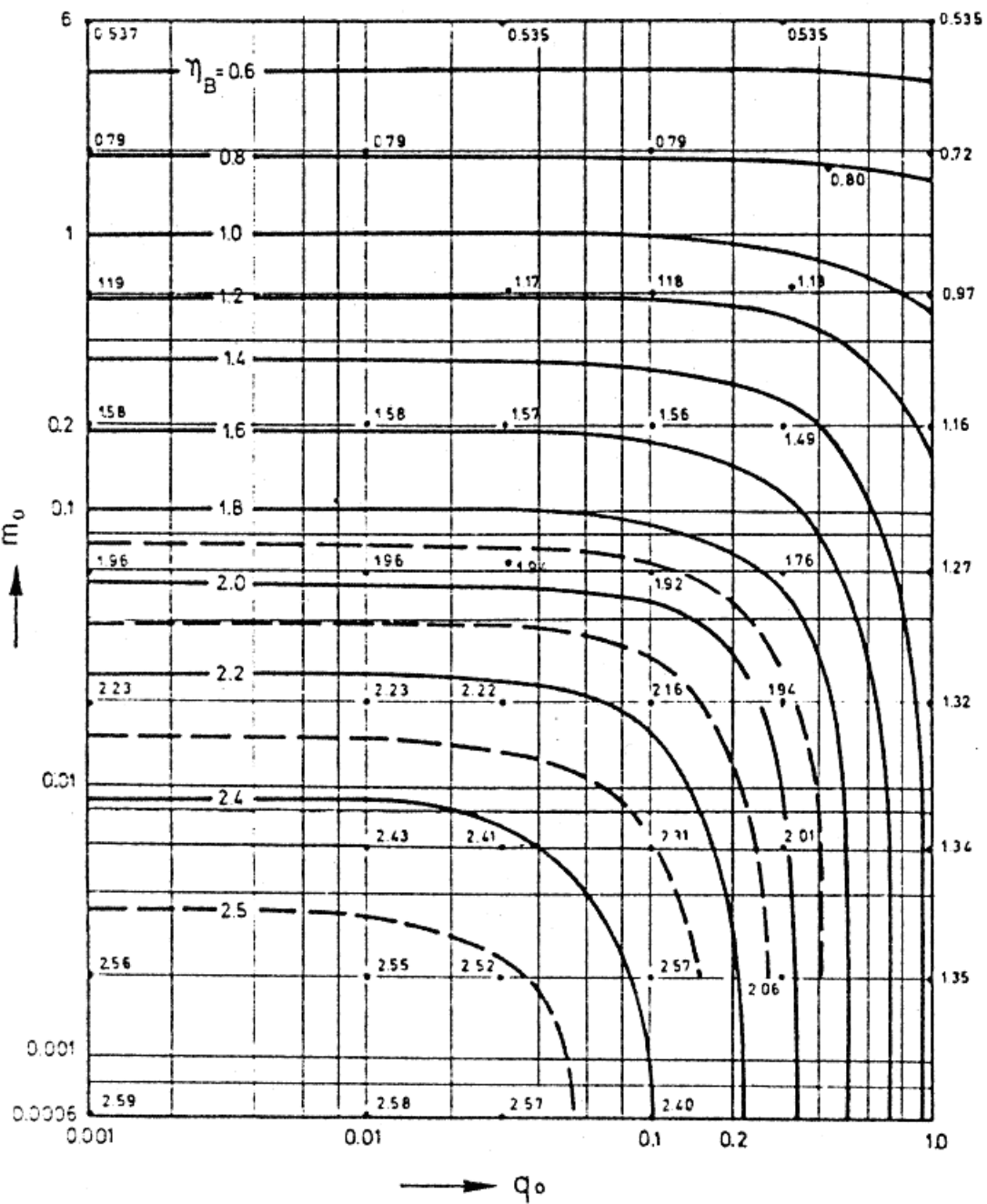


Abb. A-1: Diagramm zur graphischen Bestimmung von η_B nach [VISCHER1976]

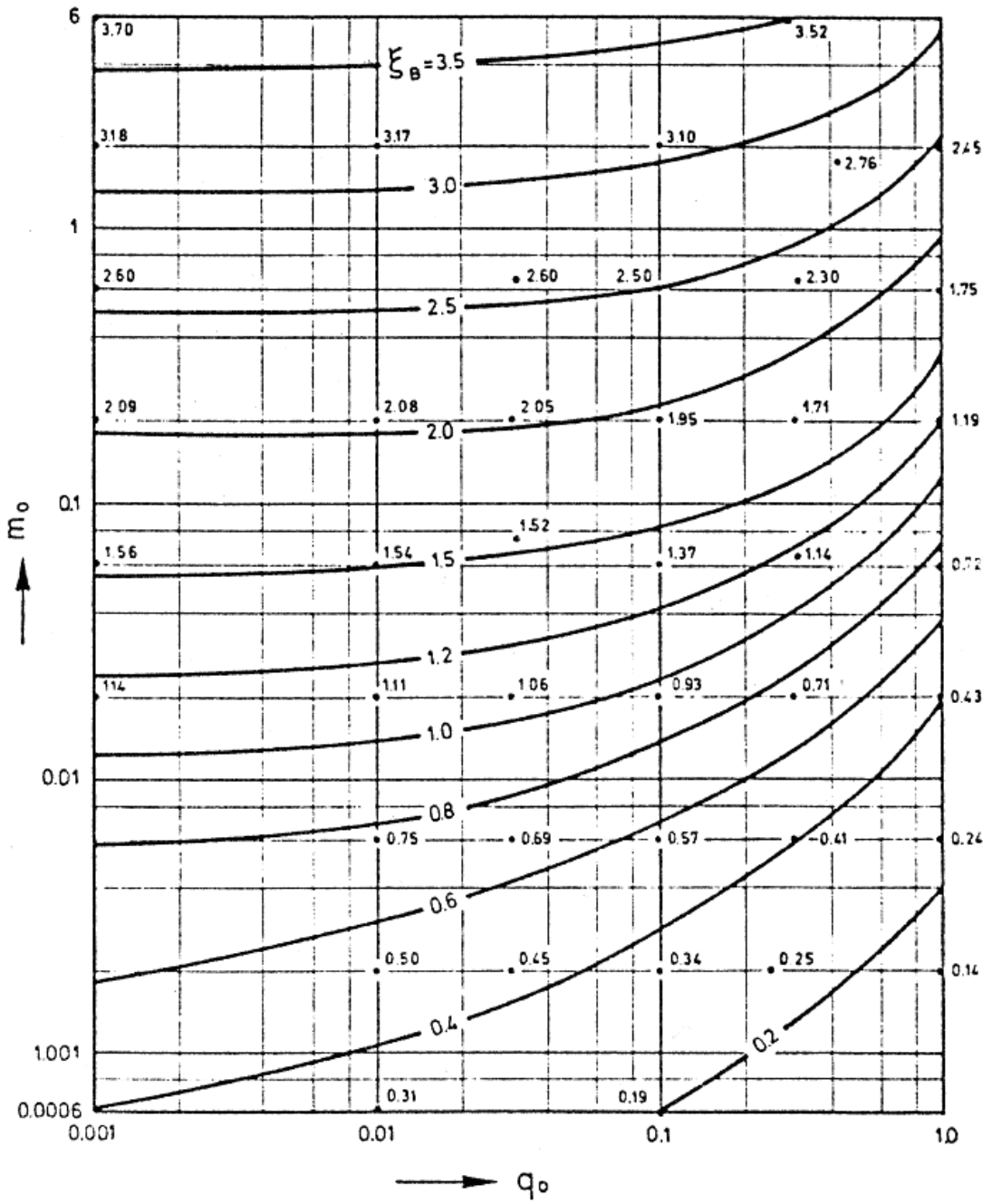


Abb. A-2: Diagramm zur graphischen Bestimmung von ξ_B nach [VISCHER1976]

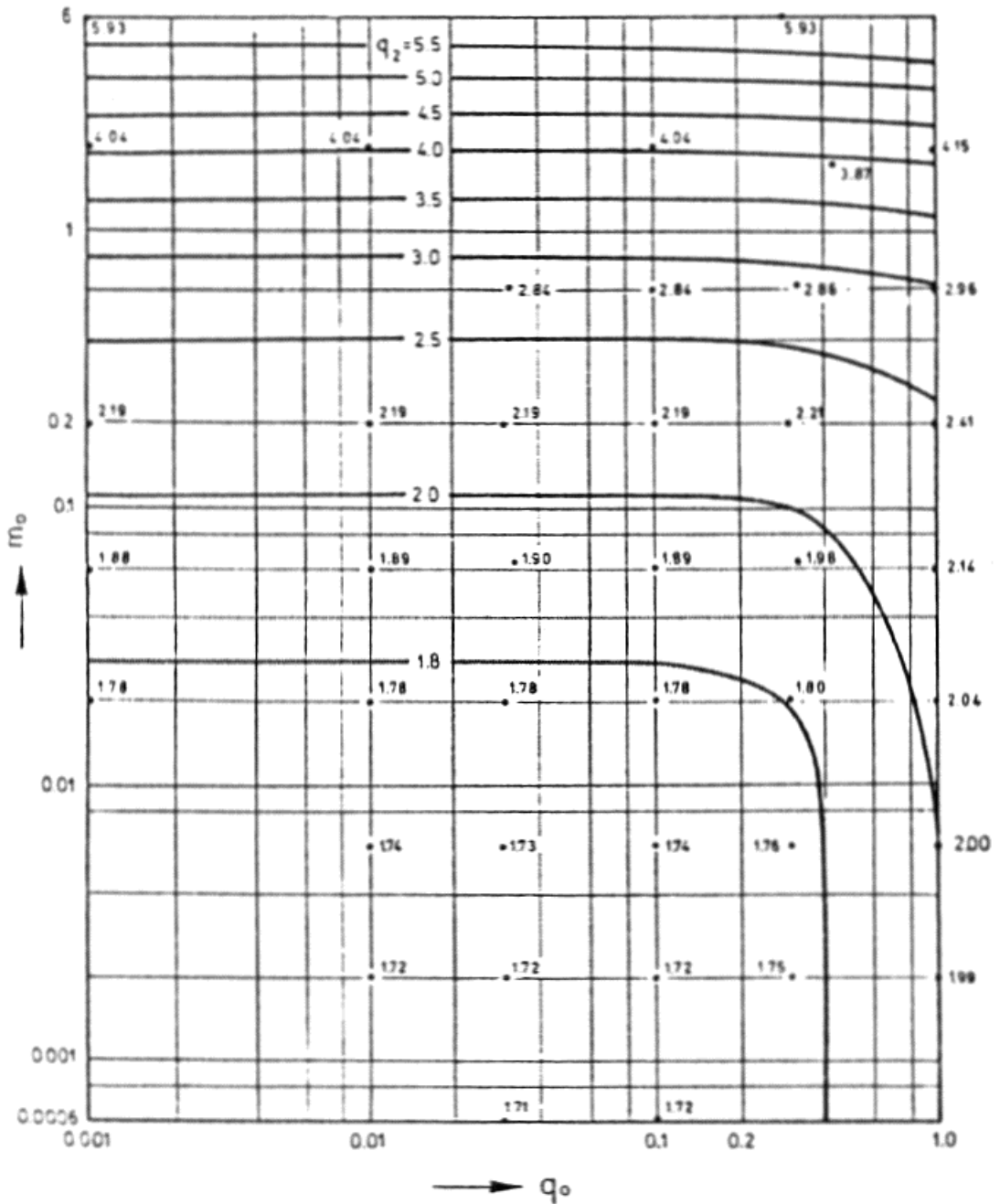


Abb. A-3: Diagramm zur graphischen Bestimmung von q_2 nach [VISCHER1976]

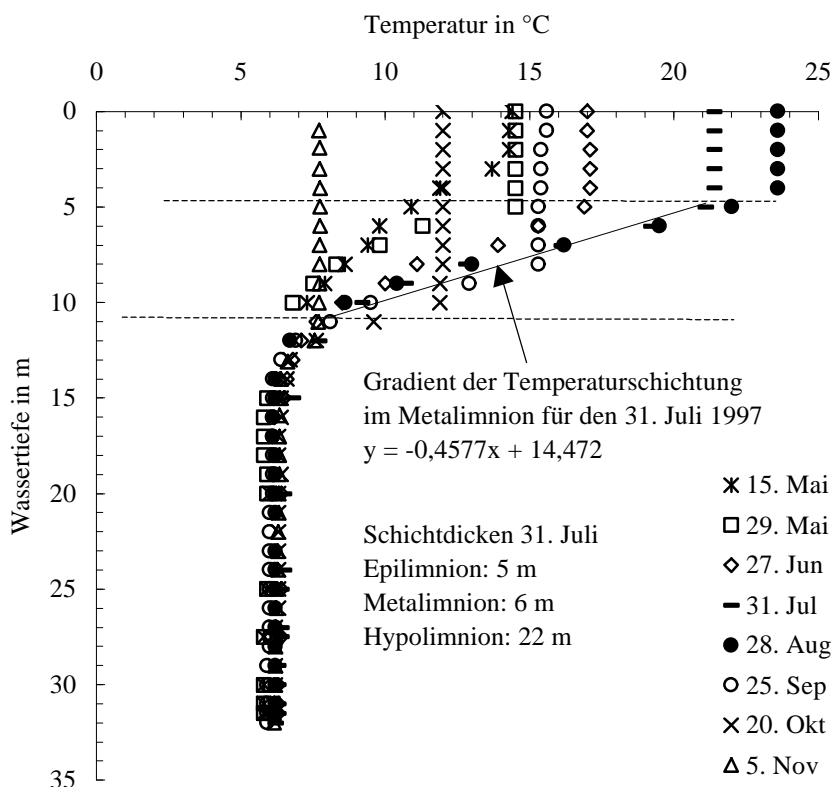


Abb. A-4: Temperaturverteilung im Schmalen Luzin / Carwitzer Becken 1997 am Meßpunkt 0 (TIBEAN)

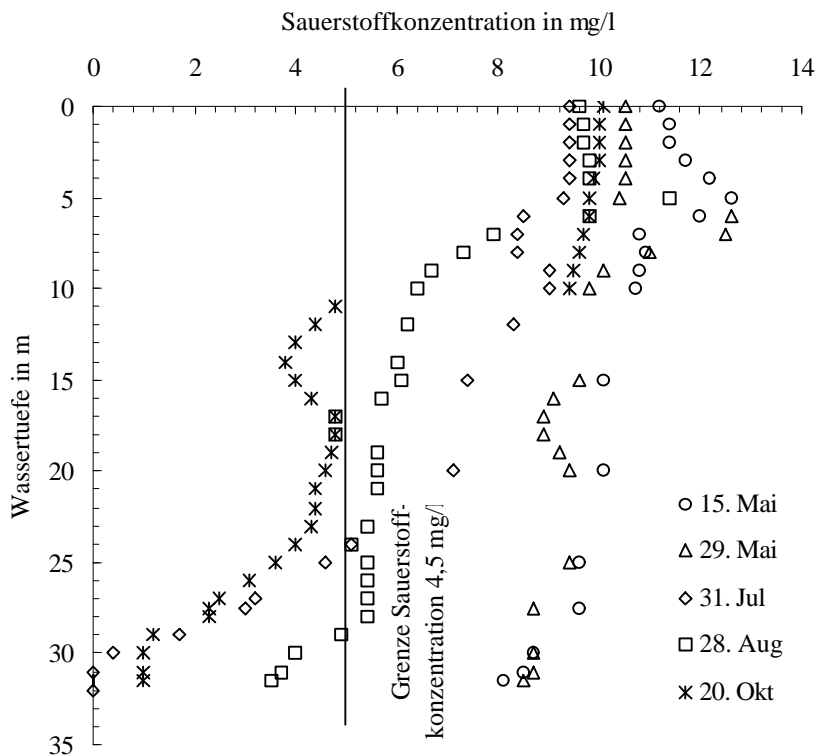


Abb. A-5: Konzentrationsverteilung des Sauerstoffs im Schmalen Luzin / Carwitzer Becken 1997 am Meßpunkt 0 (TIBEAN)

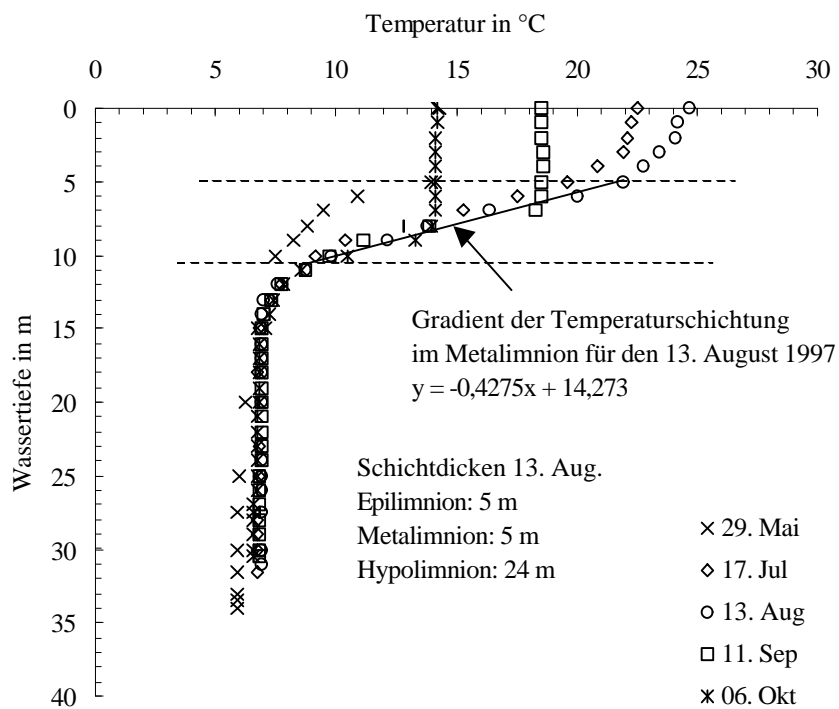


Abb. A-6: Temperaturverteilung im Schmalen Luzin / Mittelbecken 1997 am Meßpunkt 0 (TIBEAN)

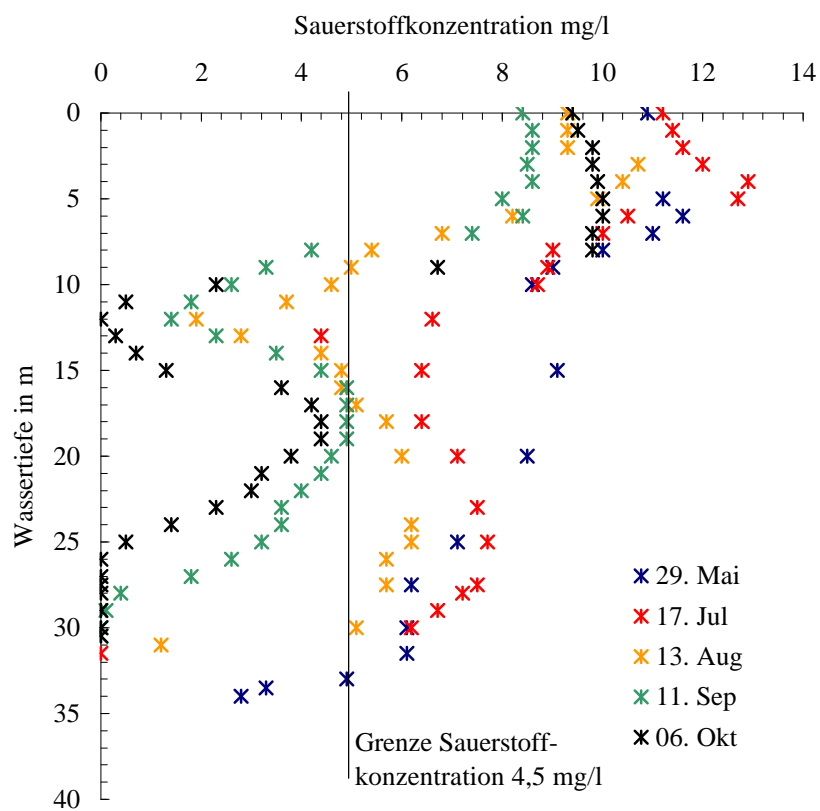


Abb. A-7: Konzentrationsverteilung des Sauerstoffs im Schmalen Luzin / Mittelbecken 1997 am Meßpunkt 0 (TIBEAN)

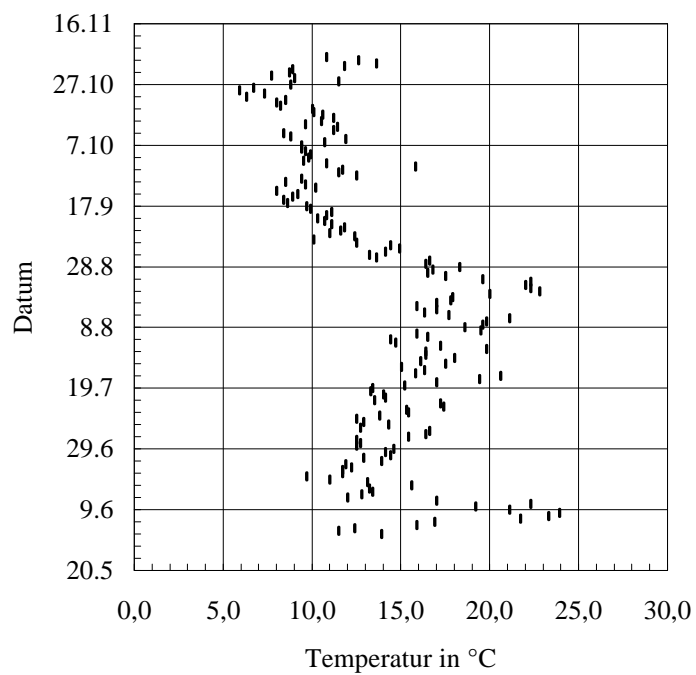
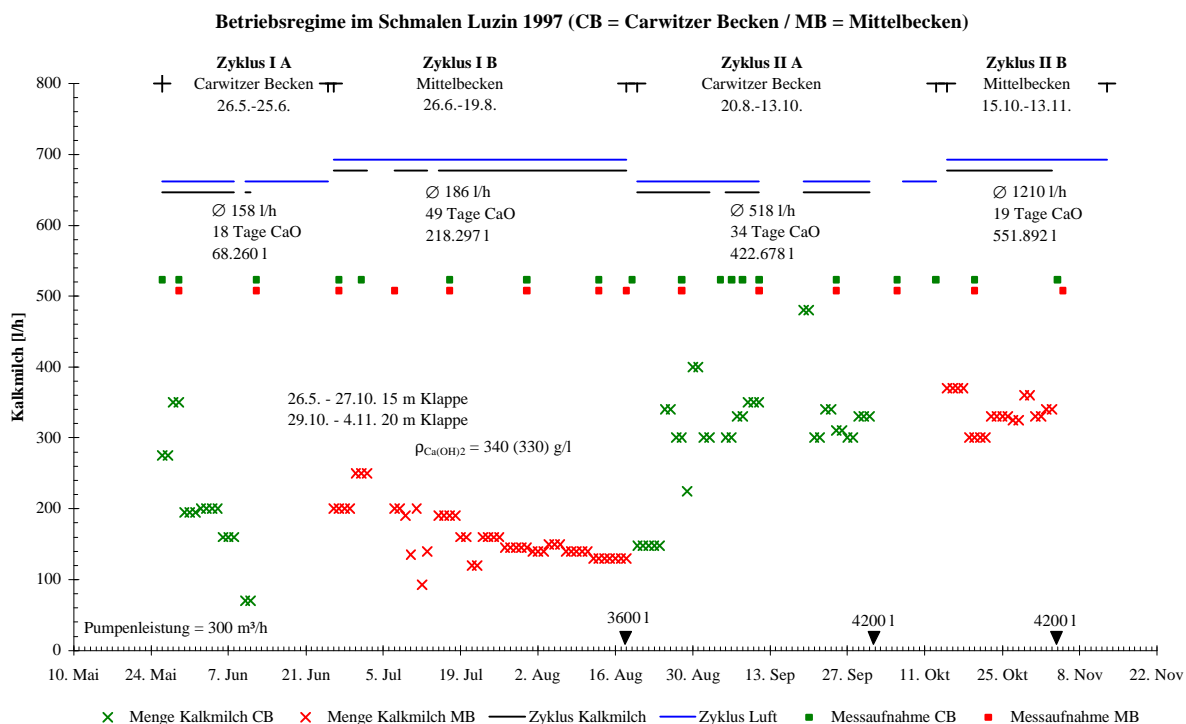
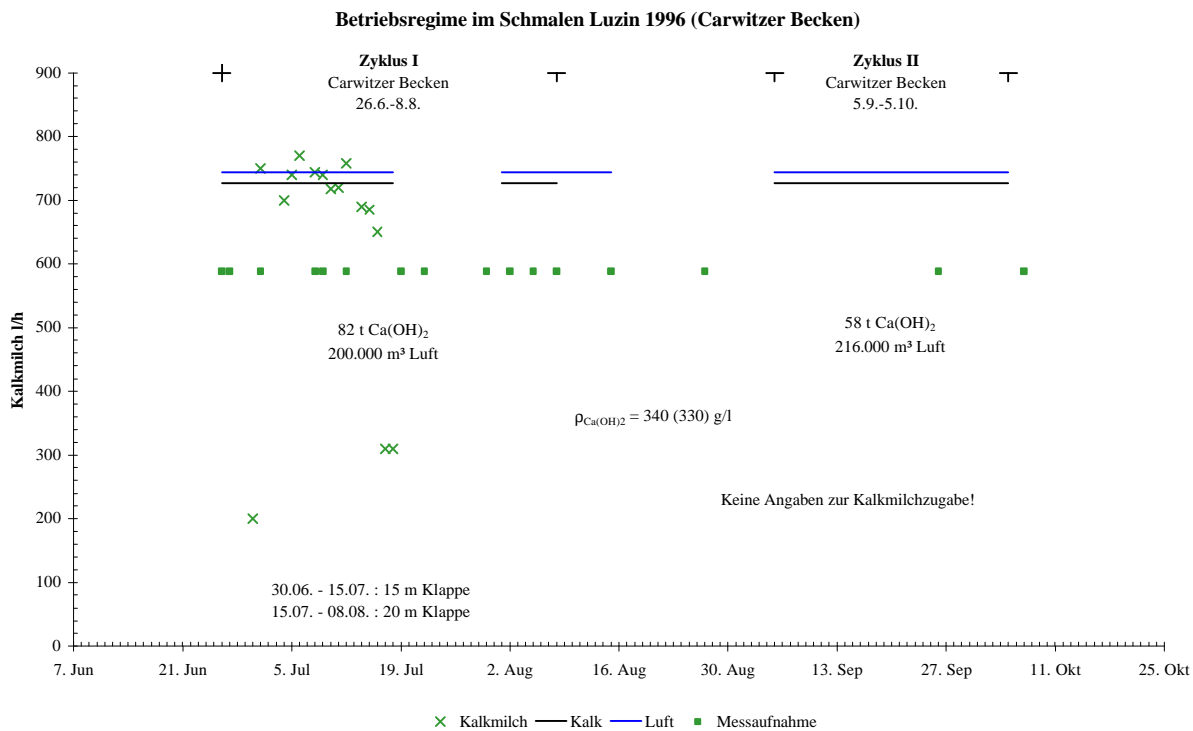


Abb. A-8: Tagesmittel der Lufttemperatur in °C für das Gebiet Luzinsee³² für den Zeitraum Mai bis November 1996

³² Deutscher Wetterdienst, Geschäftsfeld Klima- und Umweltberatung, Parkstraße 47, 18119 Rostock



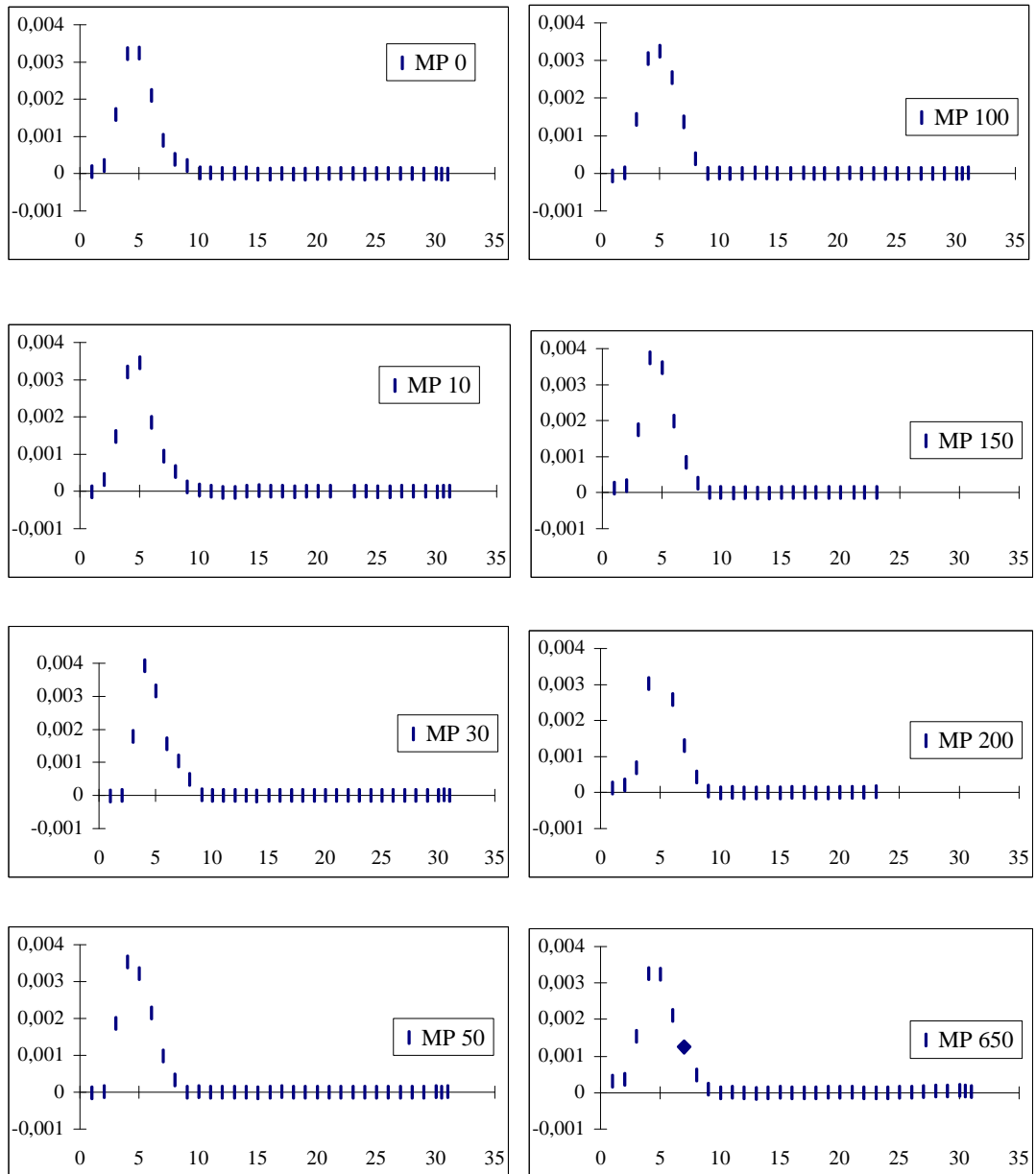


Abb. A-11: Brunt-Väisälä-Frequenz N^2 für den Schmalen Luzin / Carwitzer Becken am 1. Juli 1996 (Ordinatenachse: Brunt-Väisälä-Frequenz / Abszissenachse: Wassertiefe in m)

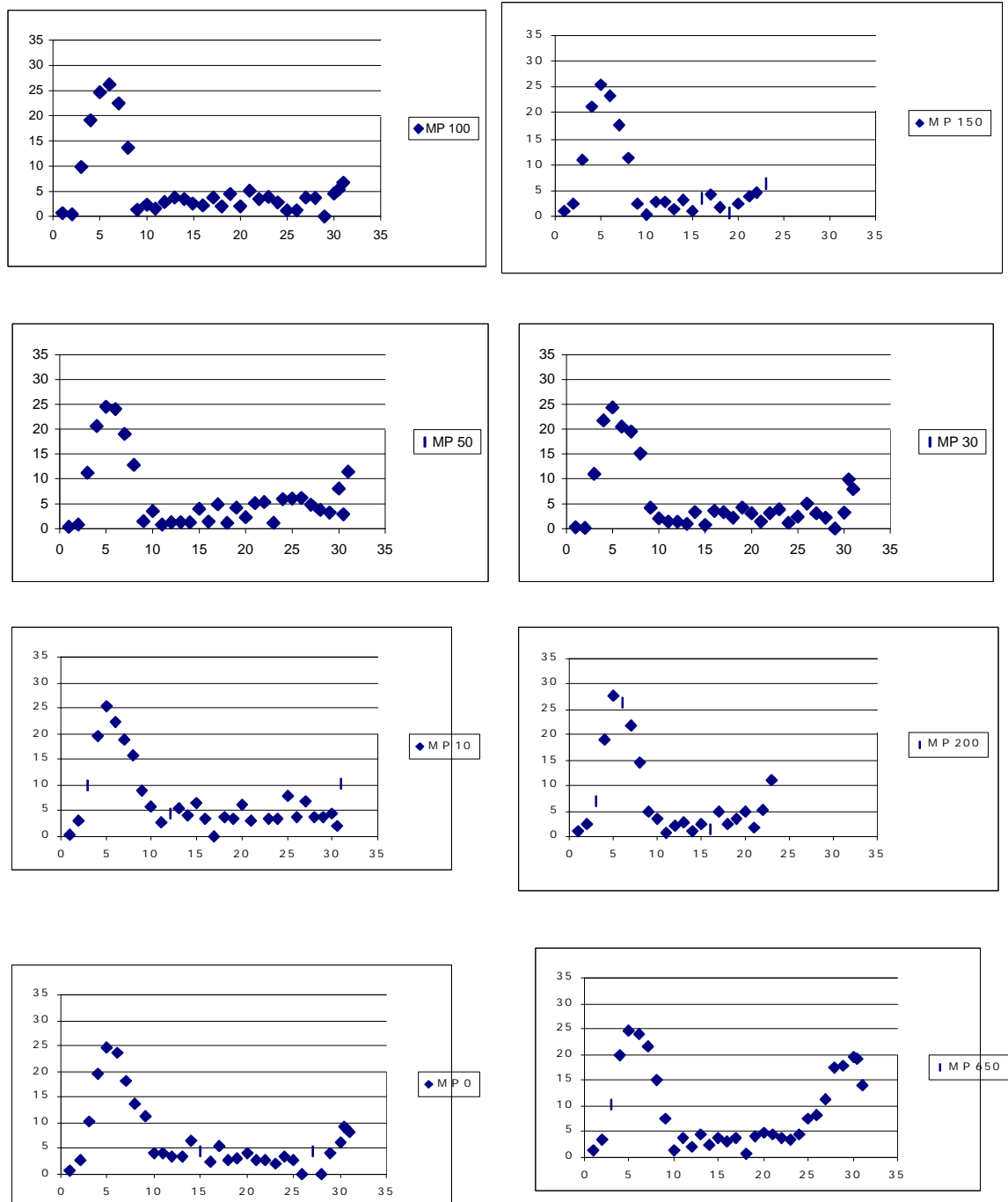


Abb. A-12: Potentielle Fließgeschwindigkeiten im Schmalen Luzin / Carwitzer Becken am 1. → 15 m

Klappe maßgebend (Ordinatenachse: Fließgeschwindigkeit in cm/s / Abszissenachse: Wassertiefe in m)

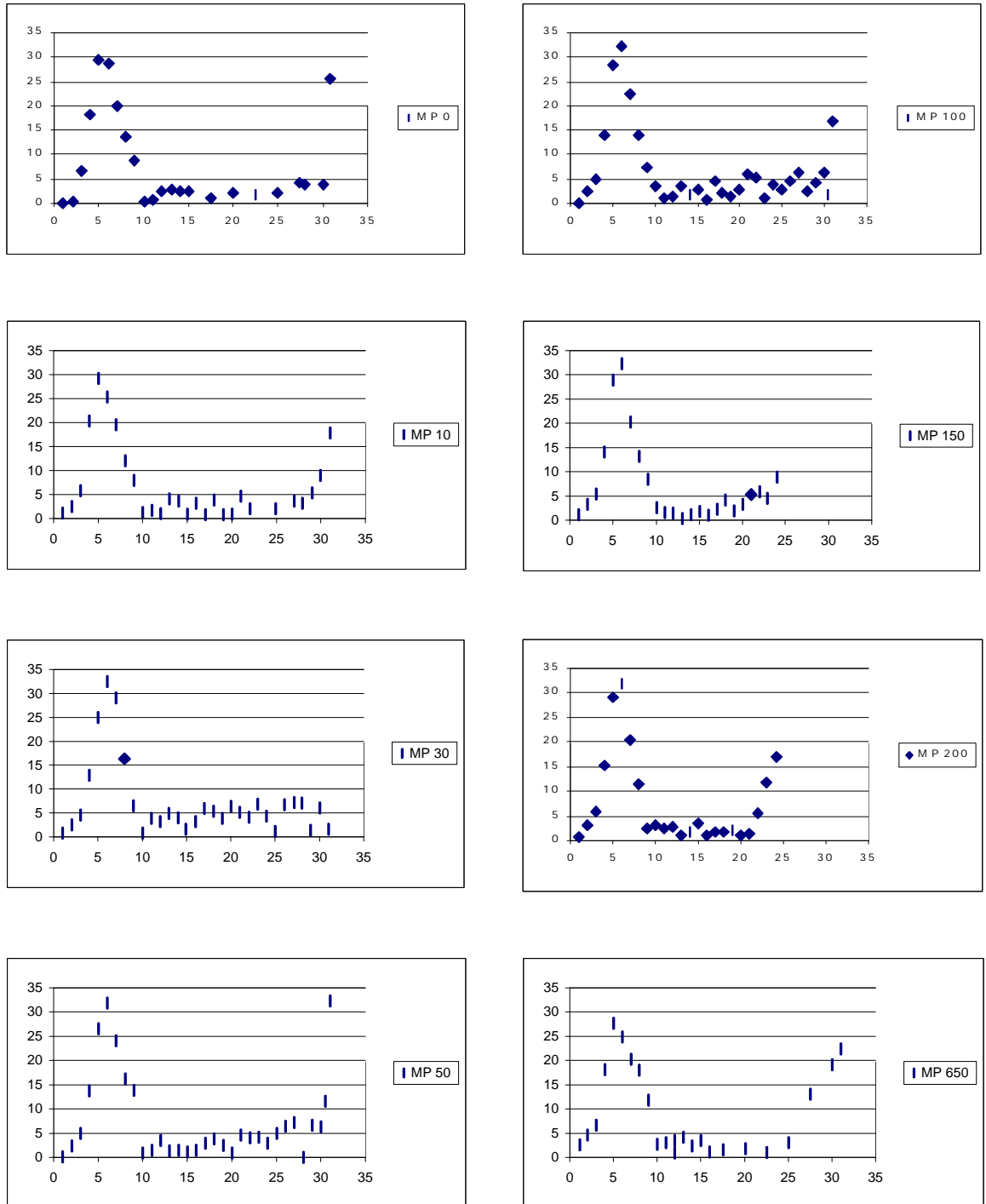


Abb. A-13: Potentielle Fließgeschwindigkeiten im Schmalen Luzin / Carwitzer Becken am 26. Juni 1996; vor Inbetriebnahme der TIBEAN / Zaklus I (Ordinatenachse: Fließgeschwindigkeit in cm/s / Abszissenachse: Wassertiefe in m)

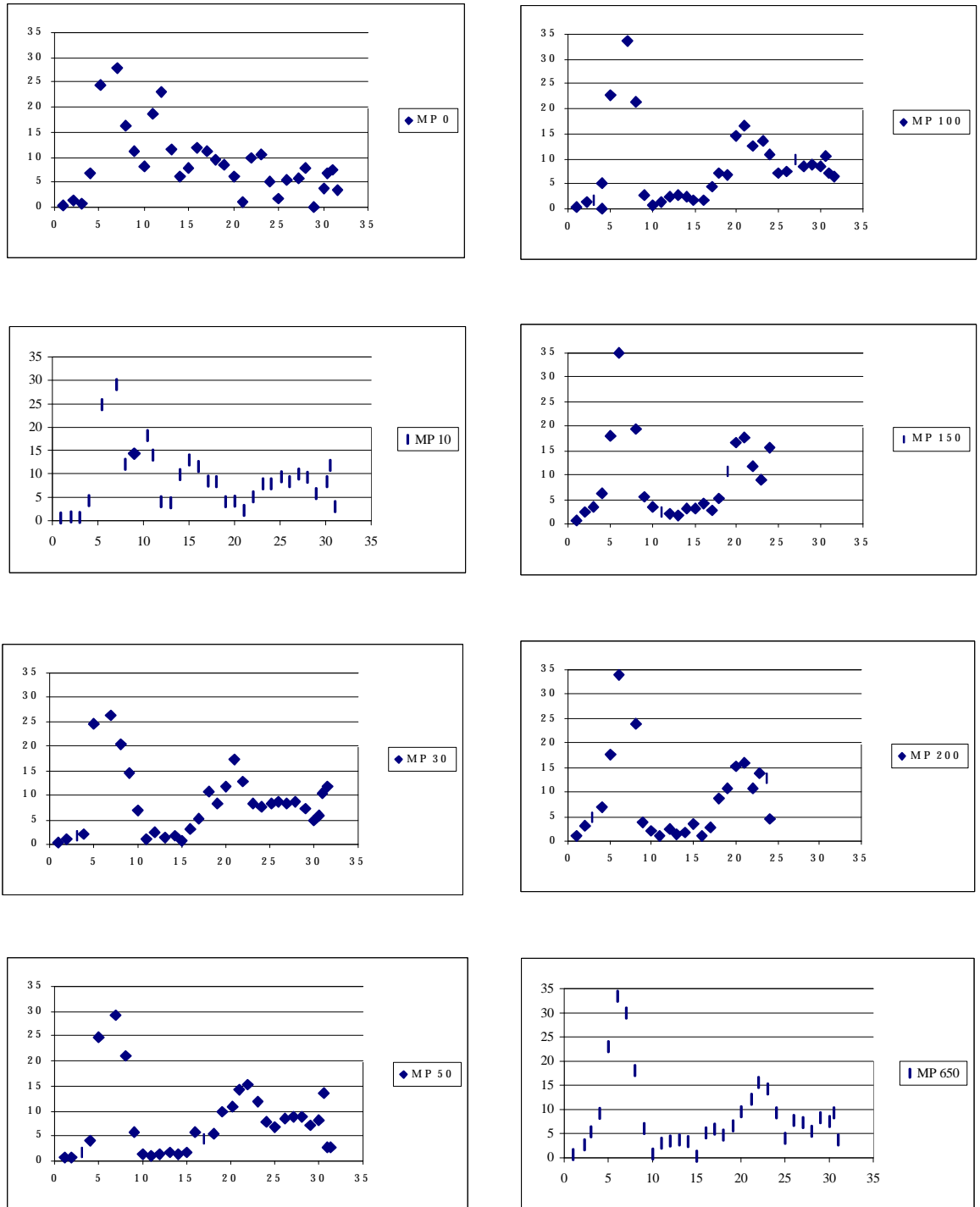


Abb. A-14: Potentielle Fließgeschwindigkeiten im Schmalen Luzin / Carwitzer Becken am 12. Juli 1996; 12 Tage Betrieb der TIBEAN / Zyklus I / 15 m Klappe (Ordinatenachse: Fließgeschwindigkeit in cm/s / Abszissenachse: Wassertiefe in m)

Temperaturkorrekturfaktor der elektrischen Leitfähigkeit

mit $f_{20,B}(T) = \frac{\kappa_{20}}{\kappa_T}$ und $f_{20,B}(T = 25^\circ\text{C}) = \frac{\kappa_{20}}{\kappa_{25}}$ ist

$$f_{25,B}(T) = \frac{\kappa_{25}}{\kappa_T} = f_{20,B}(T) \cdot \frac{\kappa_{20}}{\kappa_{20}} \cdot \frac{1}{f_{20,B}(T = 25^\circ\text{C})}$$

[Wagner1996]

$$f_{25,W}(T) = \frac{\kappa_{25}}{\kappa_T}$$

T [°C]	$f_{20,B}$	$f_{25,B}$	$f_{25,B}$	$f_{25,W}$	$ \Delta f_{25} $
0	1,721180000	1,924218447	1,924	1,918	0,006218447
1	1,668179293	1,864965529	1,865	1,857	0,007965529
2	1,617402068	1,808198385	1,808	1,800	0,008198385
3	1,568774964	1,753835000	1,754	1,745	0,008835000
4	1,522224623	1,701793363	1,702	1,693	0,008793363
5	1,477677686	1,651991461	1,652	1,643	0,008991461
6	1,435060794	1,604347281	1,604	1,596	0,008347281
7	1,394300587	1,558778809	1,559	1,551	0,007778809
8	1,355323707	1,515204034	1,515	1,508	0,007204034
9	1,318056794	1,473540942	1,474	1,467	0,006540942
10	1,282426490	1,433707520	1,434	1,428	0,005707520
11	1,248359435	1,395621756	1,396	1,390	0,005621756
12	1,215782271	1,359201637	1,359	1,354	0,005201637
13	1,184621638	1,324365149	1,324	1,320	0,004365149
14	1,154804177	1,291030281	1,291	1,287	0,004030281
15	1,126256529	1,259115019	1,259	1,256	0,003115019
16	1,098905335	1,228537351	1,229	1,225	0,003537351
17	1,072677236	1,199215263	1,199	1,196	0,003215263
18	1,047498874	1,171066743	1,171	1,168	0,003066743
19	1,023296888	1,144009777	1,144	1,141	0,003009777
20	0,999997920	1,117962354	1,118	1,116	0,001962354
21	0,977528611	1,092842460	1,093	1,091	0,001842460
22	0,955815602	1,068568083	1,069	1,067	0,001568083
23	0,934785533	1,045057209	1,045	1,044	0,001057209
24	0,914365046	1,022227825	1,022	1,021	0,001227825
25	0,894480781	0,999997920	1,000	1,000	0,000002080
26	0,875059380	0,978285480	0,978	0,979	0,000714520
27	0,856027484	0,957008491	0,957	0,959	0,001991509
28	0,837311732	0,936084943	0,936	0,940	0,003915057
29	0,818838768	0,915432820	0,915	0,921	0,005567180
30	0,800535230	0,894970112	0,895	0,903	0,008029888

Tab. A-1: Vergleich des Temperaturkorrekturfaktors f_{25} für die Umrechnung von Meßwerten der elektrischen Leitfähigkeit von natürlichen Wässern bei einer Meßtemperatur T auf 25 °C nach [WAGNER1996] und [BÜHRER1975]

Bestimmung des Wendepunktes und Ableitung der Tangentengleichung im Wendepunkt

$$y = \frac{v_x}{v_{\max}} = e^{-\frac{1,178^2}{2}c^2}$$

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{1,178^2}{2} \cdot 2 \cdot C \cdot e^{-\frac{1,178^2}{2}c^2} \\ &= -1,178^2 \cdot C \cdot e^{-\frac{1,178^2}{2}c^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' &= -1,178^2 \cdot e^{-\frac{1,178^2}{2}c^2} + (-1,178^2) \cdot C \cdot \left(-\frac{1,178^2}{2} \cdot 2 \cdot C \cdot e^{-\frac{1,178^2}{2}c^2} \right) \\ &= -1,178^2 \cdot e^{-\frac{1,178^2}{2}c^2} + 1,178^4 \cdot C^2 \cdot e^{-\frac{1,178^2}{2}c^2} \\ &= 1,178^2 \cdot e^{-\frac{1,178^2}{2}c^2} \cdot (-1 + 1,178^2 \cdot C^2) \end{aligned}$$

$$y'' = 1,178^2 \cdot e^{-\frac{1,178^2}{2}c^2} \cdot (-1 + 1,178^2 \cdot C^2) = 0$$

$$\Rightarrow -1 + 1,178^2 \cdot C^2 = 0$$

$$C = \sqrt{\frac{1}{1,178^2}} = 1,178^{-1} = 0,84890$$

$$y = \frac{v_x}{v_{\max}} = e^{-\frac{1,178^2}{2}(1,178^{-1})^2} = e^{-\frac{1,178^2}{2} \cdot 1,178^{-2}} = e^{-\frac{1}{2}} = 0,6065$$

$$y' = m = -1,178^2 \cdot 1,178^{-1} \cdot e^{-\frac{1,178^2}{2}(1,178^{-1})^2} = -1,178 \cdot e^{-\frac{1}{2}} = -0,7145$$

$$y = m \cdot x + b$$

$$e^{-0,5} = -1,178 \cdot e^{-0,5} \cdot 1,178^{-1} + b = -e^{-0,5} + b$$

$$\Rightarrow b = 2 \cdot e^{-0,5} = 1,2131$$

$$y = -1,178 \cdot e^{-0,5} \cdot x + 2 \cdot e^{-0,5}$$

$$\frac{v_x}{v_{\max}} = -1,178 \cdot e^{-0,5} \cdot \frac{r}{r_{0,5}} + 2 \cdot e^{-0,5}$$

Kraatz

$$y = \frac{v_x}{v_{\max}} = e^{-\frac{1,178^2}{2} \cdot C^2}$$

$$y = 0,5 \Rightarrow 0,5 = e^{-\frac{1,178^2}{2} \cdot C^2}$$

$$\ln 0,5 = -\frac{1,178^2}{2} \cdot C^2 \Rightarrow C = \sqrt{\frac{\ln 0,5}{-\frac{1,178^2}{2}}} = 0,999499$$

$$y' = m = -1,178^2 \cdot 0,999499 \cdot e^{-\frac{1,178^2}{2} \cdot 0,999499^2} = -0,69349$$

$$y = m \cdot x + b$$

$$0,5 = -0,69349 \cdot 0,999499 + b \Rightarrow b = 1,19314$$

$$\frac{v_x}{v_{\max}} = -0,69349 \cdot \frac{r}{r_{0,5}} + 1,19314$$

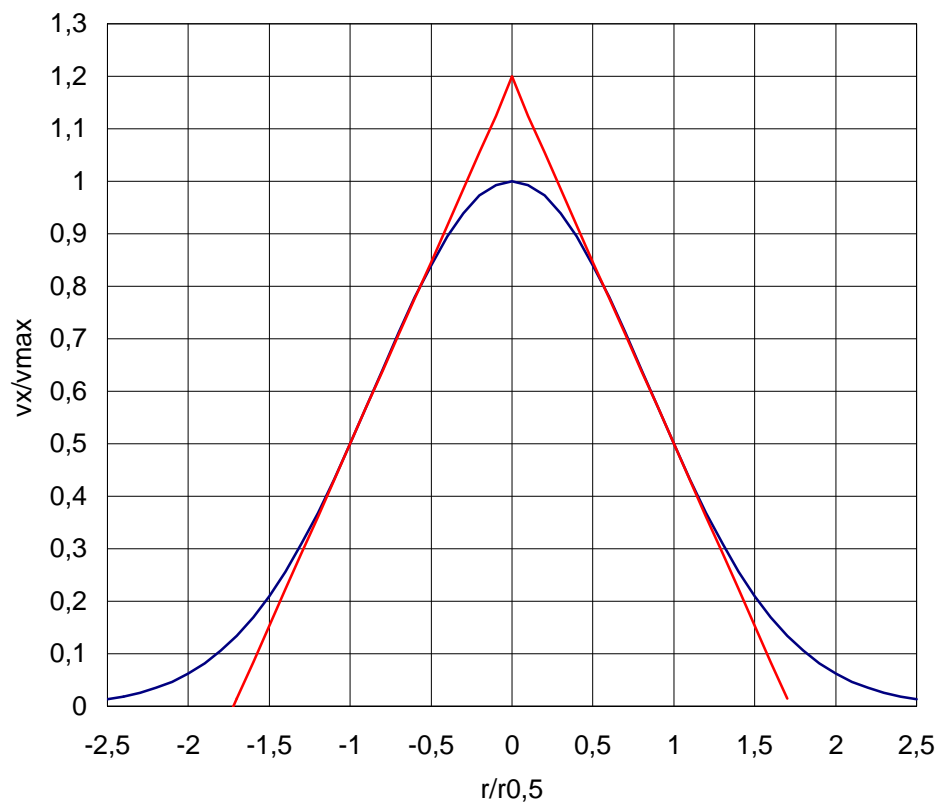


Abb. A-16: Dimensionslose Geschwindigkeitsverteilung orthogonal zur Strahltrajektorie nach [KRAATZ1989] und [KRANAWETTREISER1992]